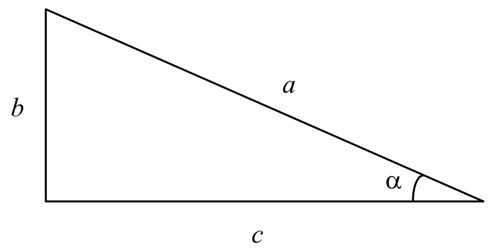
Trigonometria

Trigonometria

Raons trigonomètriques d’un angle agut

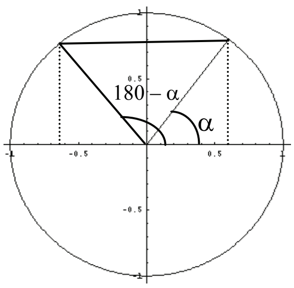


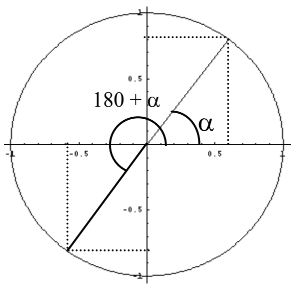
Denominació	Definició	Propietat bàsica
Sinus	$\sin\alpha = \dfrac{b}{a}$	$0 \le \text{sen}\ \alpha \le 1$
Cosinus	$\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$	$0 \le \cos\alpha \le 1$
Tangent	$\text{tg}\ \alpha = \tan\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\text{tg}\ \alpha = \tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$

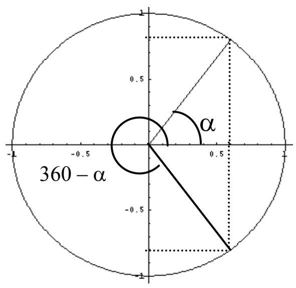
Propietat fonamental

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Raons trigonomètriques de qualsevol angle







Si α és un angle del primer quadrant:

180 – α és del segon quadrant i $\quad \sin(180-\alpha) = \sin\alpha \quad \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$

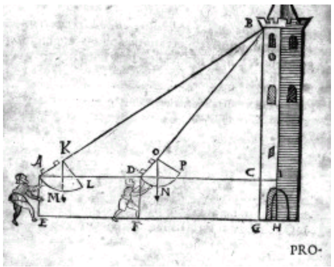
180 + α és del tercer quadrant i $\quad \sin(180+\alpha) = -\sin\alpha \quad \cos(180+\alpha) = -\cos\alpha$

360 – α és del quart quadrant i $\quad \sin(360-\alpha) = -\sin\alpha \quad \cos(360-\alpha) = \cos\alpha$

Nota històrica sobre els termes trigonomètrics

La trigonometria és una part de la matemàtica que, genèricament, estudia la relació entre la mesura dels angles i els costats d'un triangle. De fet, la mateixa paraula *trigonometria* té l'origen en aquest fet: *tri–* significa "tres", *gono–*, significa "angle" i *–metria* significa "mesura", és a dir, *trigonometria* significa una "mesura de (figures) amb tres angles".

El terme trigonometria el trobem per primera vegada en l'obra del matemàtic alemany Bartholomaeus Pitiscus, *Blatnometria sive de dimensione triangulorum*, publicada el 1595, encara que molts resultats de la trigonometria ja eren coneguts a l'antiguitat (teorema de Pitàgores, teorema de Tales...). Els primers usos de la trigonometria (encara que no tingués aquest nom) van ser la cartografia, l'astronomia i la navegació, i només recentment el seu ús s'ha estès a molts altres camps. L'astronomia és, potser, el camp que des d'antic va estar més unit a la trigonometria i, de fet, la major part d'estudis trigonomètrics es presentaven en treballs astronòmics. Fins al segle XIII no es va produir la primera presentació de la trigonometria com a ciència independent de l'astronomia: va ser el matemàtic persa Sharaf al–Din al–Tusi.



De l'obra *Problematum variorum geodaeticum* de B. Pitiscus.

Els termes *sinus, cosinus* i *tangent* tenen una història curiosa. Una antiga obra hindú sobre astronomia, *Surya Siddhanta*, dóna una taula de mitjanes–cordes (en un altre tema s'estudiarà el significat de la corda), que coincideixen amb la idea del sinus d'un angle, molt útils per a calcular els moviments de les estrelles. Posteriorment, l'obra *Aryabhatiya* d'Aryabhata, que també era hindú (cap al 500 dC) fa un estudi més profund de les mitjanes–cordes, que denomina *jiva* (en sànscrit, llengua en què està escrita aquesta obra). Els àrabs la van traduir i el terme *jiva* va ser transformat en l'àrabic *jiba*, però escrit *jb* (atès que l'àrab clàssic no té vocals). Més endavant, els traductors al llatí d'aquesta obra, van traduir *jb* per *sinus*, ja que van pensar que es referia a *jaib* (i no a *jiba*), i *jaib* significa *pit* o *sina* (tot i que en català utilitzem la paraula *sinus*). Així, del significat original, *mitjana–corda*, es va passar, per una traducció errònia, a *sinus*.

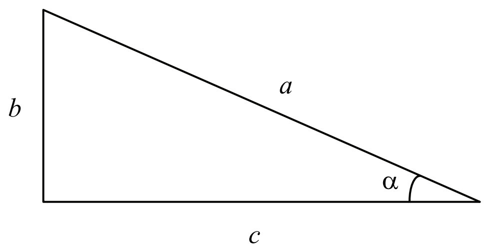
A banda de l'anècdota, aquest relat il·lustra el recorregut dels estudis trigonomètrics al llarg de la història: primer, a l'Índia, posteriorment, en àrab, des de Bagdad fins a l'Al–Andalus; des d'aquí es va introduir a Europa amb les traduccions llatines, fins a les llengües modernes.

Les altres dues raons trigonomètriques tenen una història més recent. El cosinus va sorgir de la necessitat de calcular el sinus de l'angle complementari. Així, originàriament, Edmund Gunter el 1620 va escriure *co.sinus* precisament per a indicar "sinus de l'angle complementari" (que com sabem, és igual al cosinus de l'angle); una mica més tard, John Newton (no Isaac Newton) va estandarditzar el terme *cosinus*, del qual prové el nostre *cosinus*.

Finalment, la paraula *tangent* deriva de la paraula llatina *tangere*, que significa *tocar* (molt relacionat amb la idea geomètrica de la tangent), i va ser introduïda per Dane Thomas Fincke el 1583.

Quines són les raons trigonomètriques d'un angle agut?

A partir dels resultats anteriors poden definir les **raons trigonomètriques** d'un angle agut qualsevol: el sinus, el cosinus i la tangent.



El **sinus** d'un angle agut α és igual al quocient entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa:

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}$$

S'ha de destacar que el sinus és un nombre positiu mai més gran que 1 (un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa): $0 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$.

Per la seva banda, el **cosinus** d'aquest angle α és igual al quocient entre el catet contigu a l'angle i a la hipotenusa:

$$\cos \alpha = \frac{c}{a}$$

També cal destacar que el cosinus és un nombre positiu mai més gran que 1 (un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa): $0 \leq \cos \alpha \leq 1$.

La tangent d'aquest angle α és igual al quocient entre el catet oposat i el catet contigu a l'angle (s'usen indistintament els símbols tg o tan):

$$\text{tg } \alpha = \tan \alpha = \frac{b}{c}$$

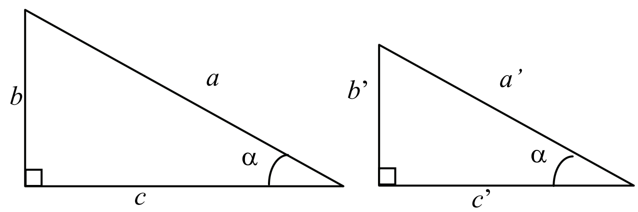
No és difícil constatar que la tangent també es pot calcular com el quocient del sinus entre el cosinus de l'angle:

$$\text{tg } \alpha = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b/\cancel{a}}{c/\cancel{a}} = \frac{b}{c}$$

Les raons trigonomètriques d'un angle depenen del triangle rectangle escollit?

Les raons trigonomètriques d'un angle no depenen del triangle escollit per a definir-les.

Cal destacar que el sinus, el cosinus i la tangent d'un angle no depenen del triangle rectangle en el qual es troba aquest angle. Efectivament, donats aquests triangles rectangles amb dos angles iguals (el recte i α):



Llavors, el tercer angle també és igual (180 – 90 – α, en ambdós casos). Així, doncs, es tracta de dos triangles semblants i, per això, amb costats proporcionals. Per tant, es compleix:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

La primera igualtat també es pot expressar així:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

en altres paraules, el càlcul del sinus de l'angle α en ambdós triangles ha de donar el mateix resultat. De la mateixa manera, com

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \qquad \text{o també} \qquad \frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

així, doncs, el cosinus de l'angle α tampoc no depèn del triangle que escollim per a trobar-lo. Igualment,

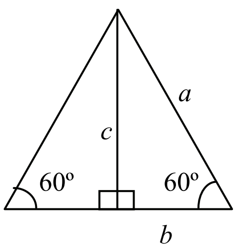
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{per tant,} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

d'aquesta manera, tampoc la tangent d'α no depèn del triangle que s'utilitzi per a calcular-la.

En definitiva, per a qualsevol angle de 0 a 90º, hi ha un únic nombre que pugui ser el seu sinus, un únic nombre, el seu cosinus i, finalment, un únic nombre, la seva tangent. Aquests tres nombres es coneixen com les raons **trigonomètriques** bàsiques de l'angle.

Quines són les raons trigonomètriques bàsiques de l'angle de 60º o $\pi/3$ rad?

> L'angle de 60º o $\pi/3$ rad té per cosinus 1/2 , per sinus $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$ i per tangent $\sqrt{3} \cong 1,732$.



Si unim dos triangles rectangles iguals amb un angle de 60º (o $\pi/3$ rad), pel seu catet major, obtindrem indefectiblement un triangle equilàter, perquè l'altre angle del triangle rectangle és 30º, i 30 + 30 = 60. La hipotenusa de qualsevol d'ambdós triangles rectangles és igual al costat del triangle equilàter. El catet contigu a l'angle de 60º fa la meitat de la hipotenusa. És a dir, si a és la hipotenusa, i b és el catet contigu a l'angle de 60º, el quocient entre aquest catet i la hipotenusa és:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

Aquest resultat no depèn ni del valor concret de la hipotenusa, ni del valor concret del catet. És a dir, aquest quocient sempre serà igual a 1/2 per a un triangle rectangle amb un angle de 60º, i sabem que es denomina **cosinus de 60º**, i s'escriu cos 60. Així, doncs,

cos 60 = ½ o bé, en radians cos $\pi/3$ = 1/2

El catet oposat a l'angle de 60º, c, es pot relacionar amb els altres dos costats, per mitjà del teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ara bé, com que $a = 2b$

$(2b)^2 = b^2 + c^2$ és a dir, $4b^2 = b^2 + c^2$

en definitiva,

$c^2 = 3b^2$ o el que és el mateix $c = b\sqrt{3}$

Per tant, si volem establir la proporció entre el catet oposat a l'angle de 60º i la hipotenusa:

$$\frac{c}{a} = \frac{b\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$$

Aquesta proporció no depèn de la longitud dels costats del triangle rectangle amb un angle de 60º i sabem que es denomina sinus de 60º, i s'escriu sin 60. Així, doncs,

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866 \text{ o bé, en radians } \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$$

Finalment, podem trobar la relació entre el catet oposat i el catet contigu de 60º:

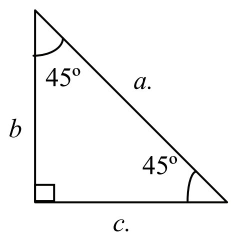
$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

tampoc depèn aquesta proporció del valor concret dels catets i, com sabem, es denomina tangent de 60º, i s'escriu tg 60, o també, tan 60. De manera que,

$$\text{tg } 60 = \sqrt{3} \cong 1,732 \text{ o bé, en radians, } \quad \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cong 1,732$$

Quines són les raons trigonomètriques bàsiques de l'angle de 45º o π/4 rad?

> L'angle de 45º o π/4 rad té tant per cosinus com per sinus $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$ i per tangent, 1.



Si un dels angles d'un triangle rectangle és igual a 45º (o π/4 rad), és evident que l'altre angle (a part del recte) ha de ser també de 45º. Per la mateixa raó, ambdós catets han de ser iguals, és a dir, $b = c$. Si combinem aquest fet amb el teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$

és a dir:

$$a = \sqrt{2}b$$

o, també,

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

així, doncs, la proporció entre el catet contigu de 45º i la hipotenusa és igual a $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$, i és independent del valor concret dels costats d'aquest triangle. Així, doncs, el **cosinus de 45º** és igual a

$$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707 \quad \text{o bé, en radians} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$$

Evidentment, com que ambdós catets són iguals, la proporció entre el catet oposat de 45º i la hipotenusa haurà de tenir el mateix valor. Aquest valor és el **sinus de 45º**. És a dir:

$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707 \qquad \text{o bé, en radians} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$$

Finalment, podem trobar la relació entre el catet oposat i el catet contigu de 45º. En aquest cas és molt fàcil:

$$\frac{b}{c} = 1$$

tampoc no depèn aquesta proporció del valor concret dels catets. Així, doncs, la tangent de 45º és 1, és a dir,

$$\text{tg } 45 = 1 \qquad \text{o bé, en radians} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Com es calculen les raons trigonomètriques d'un angle amb la calculadora?

> Per a calcular les raons trigonomètriques d'un angle en una calculadora, s'utilitzen les tecles que hi corresponen, tenint en compte si aquesta es troba en mode DEG (graus) o en mode RAD (radians).

En general, no és tan fàcil trobar les raons trigonomètriques de qualsevol altre angle, a part dels ja estudiats. Fins a l'aparició de les calculadores científiques, hi havia taules trigonomètriques que permetien trobar les raons trigonomètriques de qualsevol angle; de la mateixa manera, també hi havia taules que permetien trobar un angle a partir d'una de les seves raons trigonomètriques. En l'actualitat, aquestes taules no s'utilitzen, perquè qualsevol calculadora fa aquestes funcions de manera més eficient i senzilla.

Abans de començar a realitzar qualsevol càlcul, s'ha de tenir en compte de quina manera s'introdueix l'angle, en graus sexagesimals o en radians. La calculadora té un mode de treball en graus sexagesimals, mode DEG (de l'anglès, *degree*, és a dir, grau), i un mode de treball en radians, mode RAD. Normalment, el mode de treball es pot llegir sempre sobre la pantalla, en algun dels seus extrems.

Per a canviar d'un mode a un altre només cal localitzar les tecles MODE (si no existeix, acostuma a ser la tecla INV) i les dues anteriors: es pressiona primer la tecla MODE (o INV), i posteriorment la de la mode que volem. Per exemple, per a posar la calculadora en mode graus sexagesimals s'ha de fer el següent:

MODE + DEG

Si volem treballar amb radians, s'ha de fer el mateix, però pressionant la tecla RAD en lloc de la tecla DEG. Una vegada fet això, per a calcular les raons trigonomètriques, primer s'han de localitzar les tres tecles que permeten calcular-les: les tecles SIN, COS i TAN. Es pot observar que en la part superior d'aquestes tecles hi ha, habitualment, certes expressions ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, generalment), que indiquen que amb aquestes tecles també es poden calcular els angles a partir de les raons trigonomètriques.

Per a calcular el sinus d'un angle, s'ha de posar la calculadora en el mode correcte (DEG o RAD). Per exemple, si volem calcular el sinus de 33º, hem de posar la calculadora en mode DEG. Posteriorment, cal escriure l'angle, 33, i finalment, pressionar la tecla SIN. Obtindrem, 0.544639035 (a la calculadora la coma decimal és un punt), que és el sinus de 33º. De manera semblant, podem calcular el cosinus i la tangent de qualsevol angle agut.

En canvi, si coneixem el sinus d'un angle i volem saber de quin angle es tracta, hem d'actuar així: introduïm l'angle, pressionem la tecla INV seguida de la tecla SIN (és a dir, calculem l'invers del sinus, o sigui, l'angle a partir del seu sinus). Per exemple, si volem conèixer l'angle (en mode DEG) que té per sinus 0,823, introduïm aquest nombre, seguit de INV i SIN; apareixerà a la pantalla 55.35624273. És a dir, el sinus de 55,35624273º és 0,823. De manera semblant es poden trobar els angles que tenen per cosinus (o per tangent) un valor determinat. En aquest cas, cal recordar que el sinus i el cosinus han de ser valors entre 0 i 1. A més, en general, els valors obtinguts són aproximats.

<u>Exercicis bàsics amb calculadora:</u>

Calculeu les raons trigonomètriques d'aquests angles:

α que el seu sinus és igual a 0,32 (sol: cos α = 0,9474, tg α = 0,3378)

β el cosinus del qual és igual 0,93 (sol: sin β = 0,3676, tg β = 2,5302)

γ la tangent del qual és igual a 1,23 (sol: sin γ = 0,7759, cos γ = 0,6308)

Quines són les raons trigonomètriques de l'angle de 83º? (sol: sin 83 = 0,9925; cos 83 = 0,1219; tg 83 = 8,1443)

Quines són les raons trigonomètriques de l'angle de 1 rad? (sol sin 1 = 0,8415; cos 1 = 0,5403; tg 1 = 1,5574)

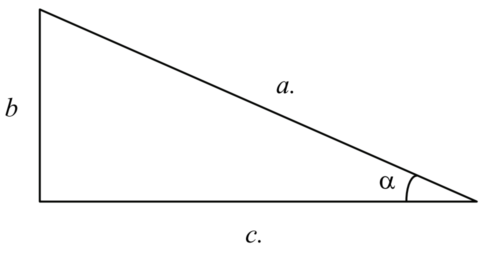
Quin és l'angle que té per sinus 0,1231? Quines són les seves altres raons trigonomètriques? (sol: α = 0,1234 rad = 7,071º; cos 7,071 = 0,9924; tg 7,071 = 0,1124).

Quina és la igualtat bàsica de la trigonometria?

> Qualsevol angle α menor que l'angle recte compleix el següent:
> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Donat un triangle de catets *b* i *c*, i d'hipotenusa *a* es pot calcular:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$



tenint en compte que $a^2 = b^2 + c^2$.

En definitiva,

$$(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1.$$

qualsevol que sigui l'angle α, la suma dels quadrats del sinus i el cosinus és igual a 1. De vegades, aquesta igualtat també s'escriu així:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Aquesta fórmula ens permet calcular el sinus a partir del cosinus (i a l'inrevés):

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ per tant, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

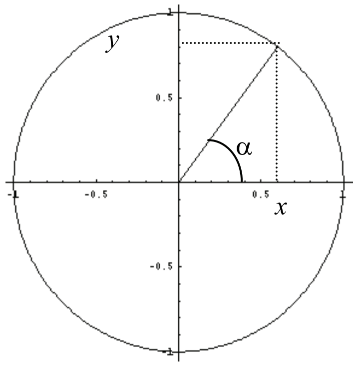
de la mateixa manera

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Per exemple, si el sinus d'un angle α fos 0,4, el seu cosinus hauria de ser $\cos\alpha = \sqrt{1-0,4^2}$. De la mateixa manera, si el cosinus d'un angle β fos 0,8, el seu sinus seria $\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-0,8^2}$.

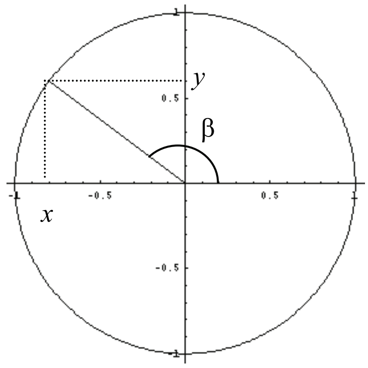
Com es calculen las raons trigonomètriques de qualsevol angle?

> Les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden deduir fàcilment de les raons trigonomètriques d'un angle agut.



Per a calcular les raons trigonomètriques de qualsevol angle, sigui o no agut, hem de dibuixar en el pla cartesià una circumferència unitària de centre l'origen de coordenades: és a dir, es representen dues rectes reals perpendiculars, que incloguin els punts de l'interval [–1,1], i que es tallin en el punt 0 de cadascuna d'elles. Es dibuixa una circumferència de radi 1, centrada en la intersecció de les rectes, com s'observa en la il·lustració.

Es dibuixa un angle, α, tal com es mostra en la imatge. Si projectem el segment que forma l'angle sobre la recta horitzontal, obtenim un triangle rectangle. Com que la hipotenusa fa exactament 1, el cosinus de l'angle α ha de ser $x/1$: per tant, cos α = x. De la mateixa manera és fàcil comprovar que sin α = y. Evidentment, la tangent d'aquest angle ha de ser tg α = y/x.



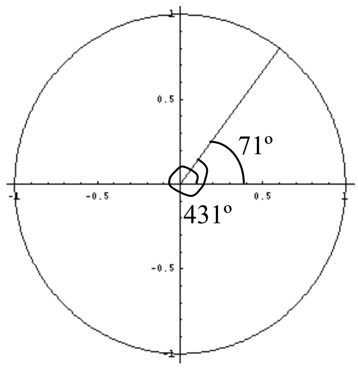
Ara podem dibuixar aquest segon angle, β, aquesta vegada obtús. En aquest cas, podem definir, de manera semblant al cas anterior:

sin β = y cos β = x

A partir d'aquí, la tangent d'aquest angle es pot calcular com a tg β = y/x = sin β/cos β.

Es pot observar en la il·lustració qui el cosinus de β serà negatiu; ara bé, el seu valor absolut no pot ser, en cap cas, major que 1. En general es poden definir d'aquesta manera les raons trigonomètriques de qualsevol angle de 0 a 360º, essent el sinus i el cosinus de qualsevol angle nombres compresos entre –1 i 1.

D'altra banda, qualsevol angle més gran de 360º (o 2π rad) es correspon a un angle entre 0º i 360º, tal com mostra aquesta imatge:



Evidentment, els angles 71º i 431º (71 + 360) tenen les mateixes raons trigonomètriques. En general, si α és un angle de 0º a 360º, llavors:

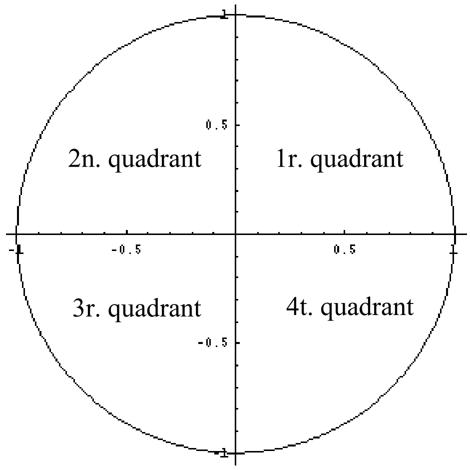
$$\sin \alpha = \sin (360 + \alpha) = \sin (2 \cdot 360 + \alpha) = \ldots$$

$$\cos \alpha = \cos (360 + \alpha) = \cos (2 \cdot 360 + \alpha) = \ldots$$

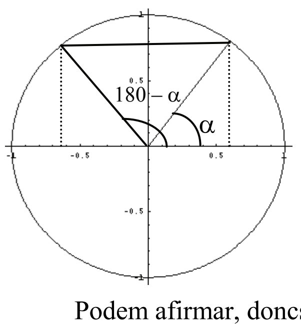
És a dir, les raons trigonomètriques es van repetint quan se suma 360 a un angle. Així, per exemple,

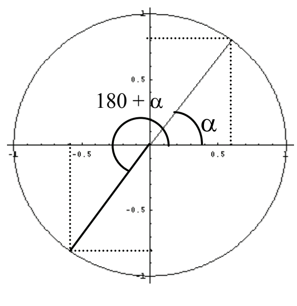
$$\sin (8342) = \sin (23 \cdot 360 + 62) = \sin 62.$$

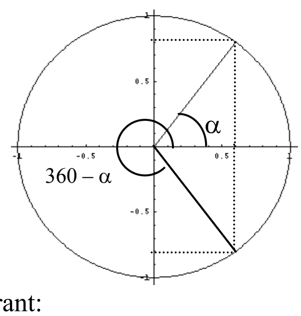
Cada zona de la circumferència unitària dividida per les dues rectes reals es denomina **quadrant**. Així, doncs, hi ha quatre quadrants, que es denominen de l'1 al 4 tal com mostra la imatge:



En tot cas, les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden trobar coneixent únicament les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant. Per a demostrar-ho, n'hi ha prou d'observar aquestes il·lustracions:







Podem afirmar, doncs, que si α és un angle del primer quadrant:

$\sin (180 - \alpha) = \text{sense } \alpha \quad \cos (180 - \alpha) = -\cos \alpha$

$\sin (180 + \alpha) = -\text{sense } \alpha \quad \cos (180 + \alpha) = -\cos \alpha$

$\sin (360 - \alpha) = -\text{sense } \alpha \quad \cos (360 - \alpha) = \cos \alpha$

La propietat fonamental de la trigonometria se segueix complint; és a dir, per a qualsevol angle α es compleix sempre:

$$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1.$$

Això és així, perquè en últim terme el sinus i el cosinus d'un angle sempre es calculen a partir del sinus i el cosinus d'un angle agut; l'única modificació és el signe, que no és important quan s'eleva el valor al quadrat.