

Les fonctions trigonométriques

Les funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques són les funcions obtingudes a partir de les raons trigonomètriques d'un angle. En general, l'angle s'expressa en radians.

Aquesta taula recull les principals característiques de les diferents funcions trigonomètriques:

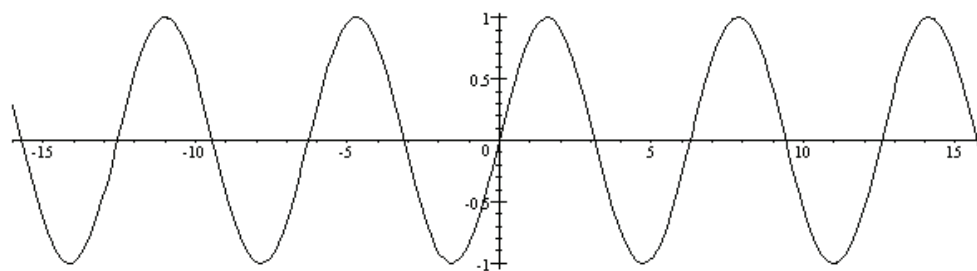
	funcions trigonomètriques					
	sinus $\sin x$	cosinus $\cos x$	tangent $\operatorname{tg} x$ (o $\tan x$)	secant $\operatorname{sec} x$	cosecant $\operatorname{cosec} x$	cotangent $\operatorname{cotg} x$
Domini	Tots els reals	Tots els reals	Els reals excepte $\pi/2 + k\pi$, on k és un enter	Els reals excepte $k\pi$, on k és un enter	Els reals excepte $\pi/2 + k\pi$, on k és un enter	Els reals excepte $k\pi$, on k és un enter
Imatge	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	Tots els reals	Tots els reals menys $(-1, 1)$	Tots els reals menys $(-1, 1)$	Tots els reals
Punts de tall	$(k\pi, 0)$ on k és un nombre enter	$((2k+1)\pi/2, 0)$ on k és un nombre enter, i $(0, 1)$	$(k\pi, 0)$ on k és un nombre enter	$(0, 1)$	cap	$((2k+1)\pi/2, 0)$ on k és un nombre enter
Creixement	decreixent: $((4k+1)\pi/2, (4k+3)\pi/2)$ creixent: $((4k+3)\pi/2, (4k+5)\pi/2)$	decreixent: $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ creixent: $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$	sempre creixent	creixent: $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ decreixent: $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$	creixent: $((4k+1)\pi/2, (4k+3)\pi/2)$ decreixent: $((4k+3)\pi/2, (4k+5)\pi/2)$	sempre decreixent
Màxims	$((4k+1)\pi/2, 1)$ on k és un nombre enter	$(2k\pi, 1)$ on k és un nombre enter.	no en té	$((4k+3)\pi/2, -1)$ on k és un nombre enter	$((2k+1)\pi, -1)$ on k és un nombre enter	no en té
Mínims	$((4k+3)\pi/2, -1)$ on k és un nombre enter	$((2k+1)\pi, -1)$ on k és un nombre enter.		$((4k+1)\pi/2, 1)$ on k és un nombre enter	$(2k\pi, 1)$ on k és un nombre enter	

Les funcions inverses de les funcions sinus, cosinus i tangent són les funcions arc sinus, arc cosinus i arc tangent. Les gràfiques d'aquestes funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$, tal com passa amb totes les funcions inverses.

- La funció inversa de la funció sinus: només s'utilitzen els valors dels angles entre $[-\pi/2, \pi/2]$. Es designa amb el símbol arc sin.
- La funció inversa de la funció cosinus: només s'utilitzen els valors dels angles entre $[0, \pi]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc cos.
- La funció inversa de la funció tangent es denomina arc tangent: només s'utilitzen els valors dels angles entre $(-\pi/2, \pi/2)$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc tan.

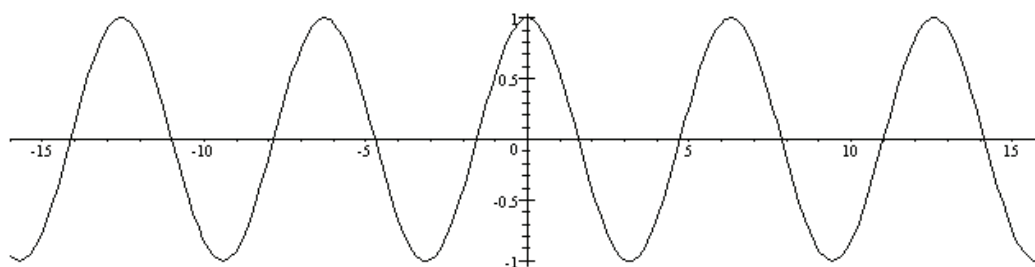
Gràfiques de les funcions trigonomètriques

Funció sinus



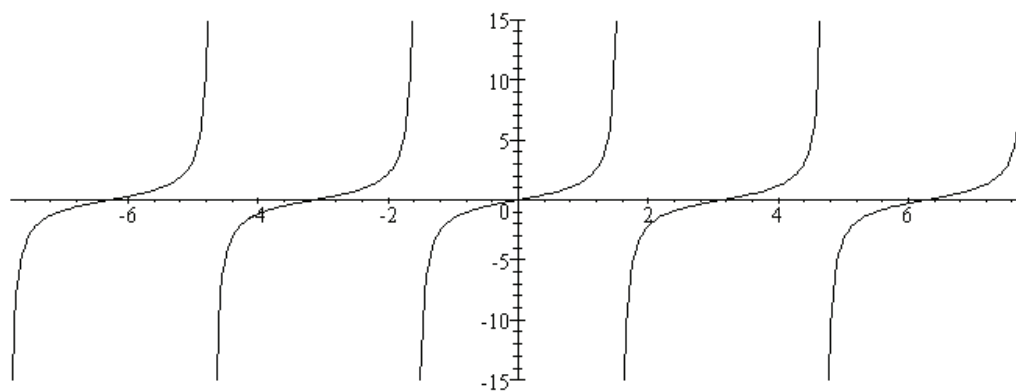
$$y = \sin x$$

Funció cosinus



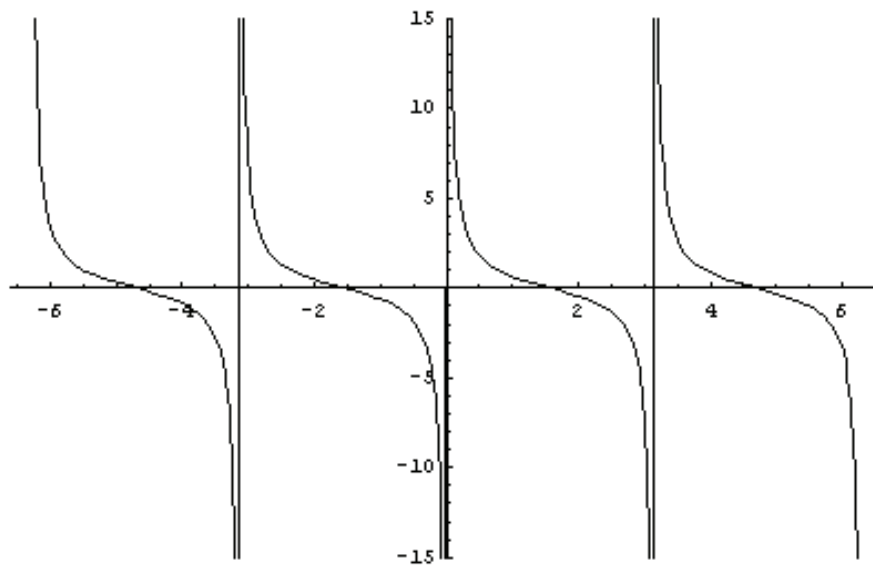
$$y = \cos x$$

Funció tangent



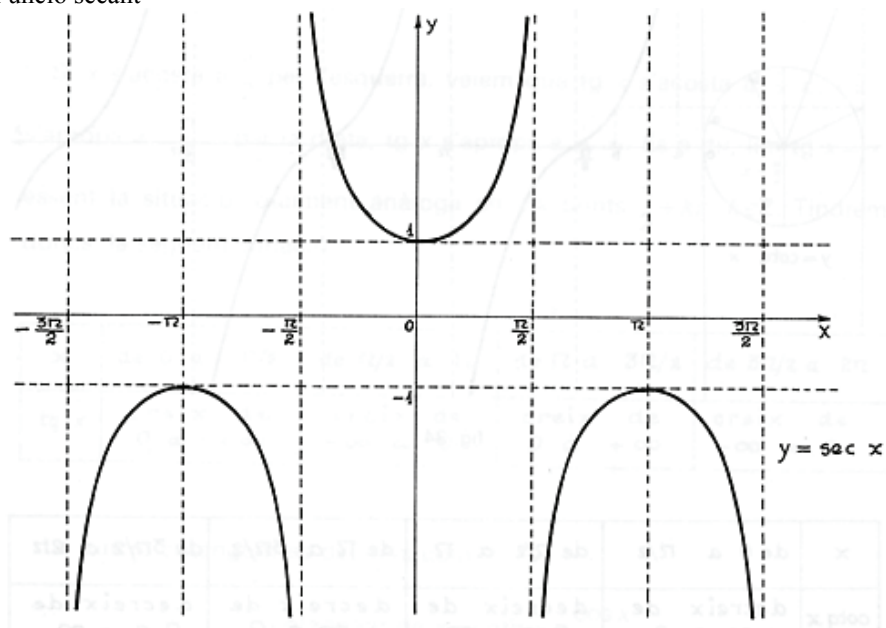
$$y = \text{tg } x$$

Funció cotangent



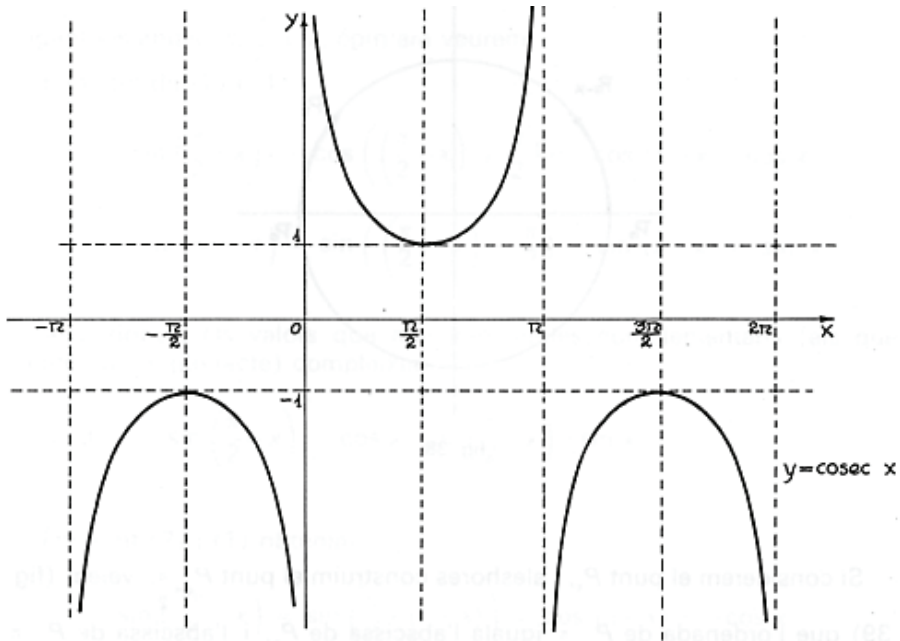
$$y = \cotg x$$

Funció secant



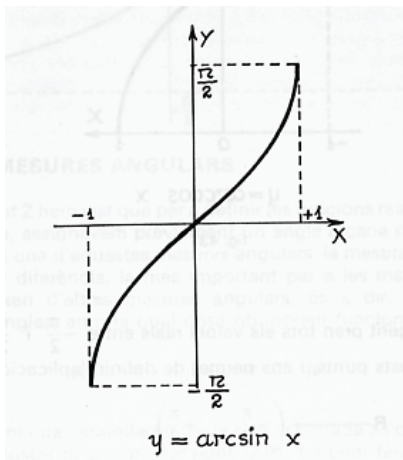
$$y = \sec x$$

Funció cosecant

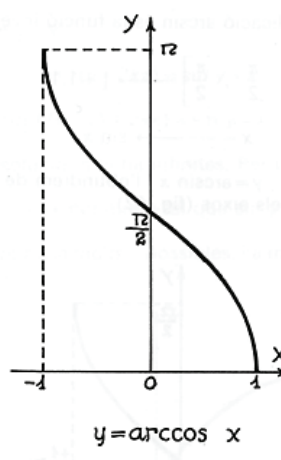


Funcions inverses

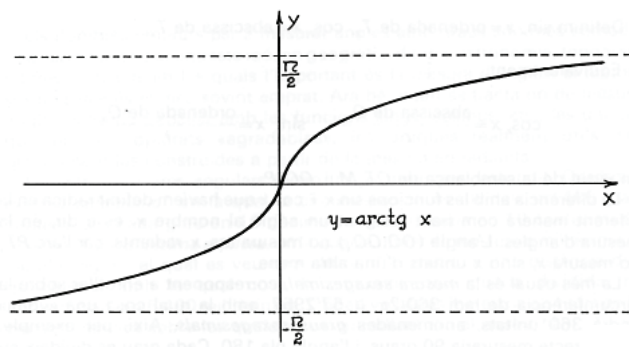
funció arc sinus



funció arc cosinus



Funció arc tangent

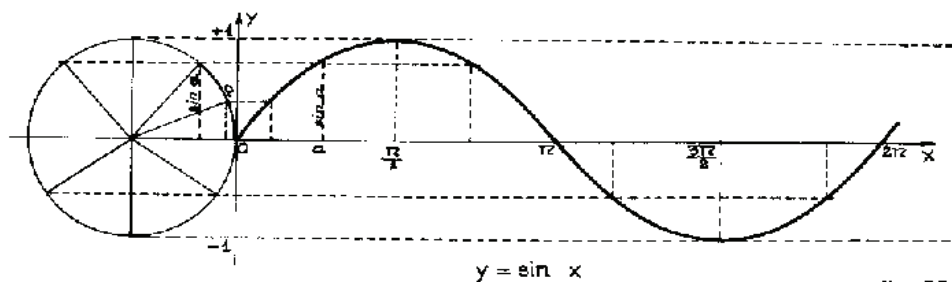


Què és la funció sinus i quines en són les característiques?

Una funció trigonomètrica és una funció associada a una raó trigonomètrica. Les més importants són la funció sinus, la funció cosinus i la funció tangent. La funció sinus és aquella funció que a cada valor (en radians) hi fa correspondre el seu sinus. La funció sinus és una funció periòdica, de període 2π . El seu domini són tots els nombres i la seva imatge és $[-1,1]$.

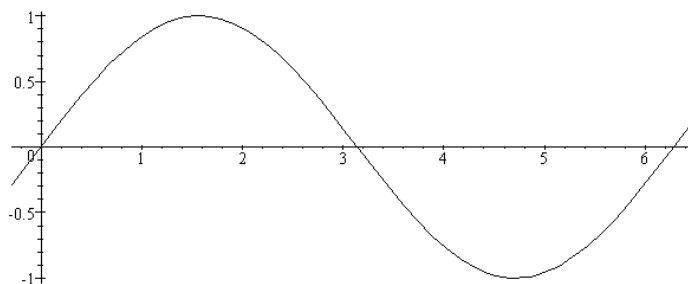
Les funcions circulars o trigonomètriques són les funcions associades a les raons trigonomètriques; les més importants són la funció sinus, la funció cosinus i la funció tangent. La variable d'aquestes funcions circulars sempre s'expressa en radians i no en graus sexagesimals.

La funció sinus és aquella funció que associa a un angle en radians, el seu sinus; la gràfica d'aquesta funció es construeix d'aquesta manera, quan l'angle es troba entre 0 i 2π :



Cada valor del sinus en la circumferència unitat de l'esquerra es trasllada a la seva posició corresponent en el valor de l'angle en l'eix d'abscisses. Així, per exemple, $\sin \pi/2 = 1$, o $\sin \pi = -1$; si α és del primer quadrant, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

D'aquesta manera s'obté la gràfica següent:



Algunes de les característiques fonamentals de la funció sinus en l'interval $[0, 2\pi)$ són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$.
- Els punts de tall són $(0,0)$ i $(\pi,0)$.
- És creixent en $(0, \pi/2)$ i $(\pi, 3\pi/2)$ i decreixent en $(\pi/2, \pi)$ i $(3\pi/2, 2\pi)$.
- Té un màxim en el punt $(\pi/2, 1)$ i un mínim en el punt $(3\pi/2, -1)$.

Sabem que per a angles més grans de 2π n'hi ha prou de recórrer a la fórmula:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

i per a angles negatius:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

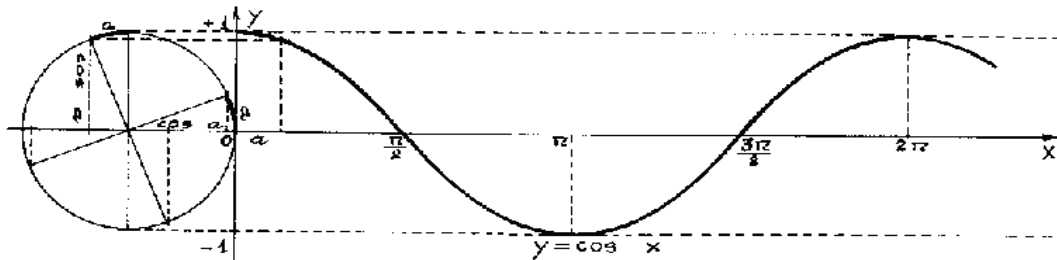
D'aquesta manera, es pot estendre la funció sinus a tot nombre real; la gràfica en un interval major seria com una ona i se sol denominar sinusoidal. Observem que la gràfica repeteix els valors de la funció cada 2π ; és a dir, n'hi ha prou de conèixer els valors de la funció en l'interval $[0, 2\pi)$ per a conèixer els valors de la funció en qualsevol altre punt perquè es tracta de repetir la gràfica en aquest interval. Per aquest motiu la funció sinus és una funció periòdica, de període 2π . Així, doncs, les seves característiques globals són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$ i el domini són tots els reals.
- Els punts de tall són $(k\pi, 0)$ on k és qualsevol nombre enter, i $(0, 1)$.
- Decreixent: $((4k + 1)\pi/2, (4k + 3)\pi/2)$, creixent: $((4k + 3)\pi/2, (4k + 5)\pi/2)$, on k és qualsevol nombre enter
- Té un màxim en $((4k + 1)\pi/2, 1)$ i un mínim en $((4k + 3)\pi/2, -1)$, essent k un nombre enter.

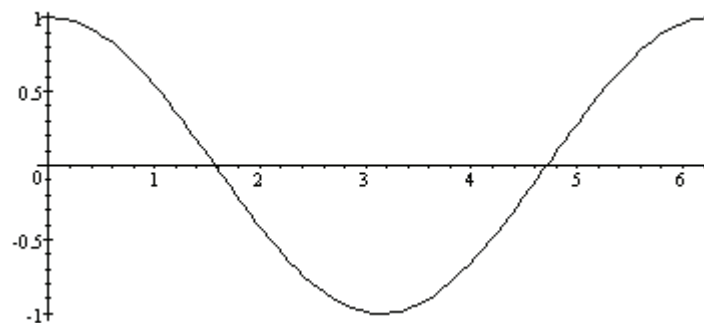
Què és la funció cosinus i quines en són les característiques?

La funció cosinus és una altra de les funcions trigonomètriques que a cada valor (en radians) li fa correspondre el seu cosinus. La funció cosinus és una funció periòdica, de període 2π . El seu domini són tots els nombres i la seva imatge és $[-1, 1]$.

La funció cosinus és aquella funció que associa a un angle en radians el seu cosinus; la gràfica d'aquesta funció es construeix com segueix, quan l'angle es troba entre 0 i 2π , de manera semblant a com es construeix la funció sinus:



Així, doncs, la gràfica de la funció cosinus en l'interval $[0, 2\pi)$ és com segueix:

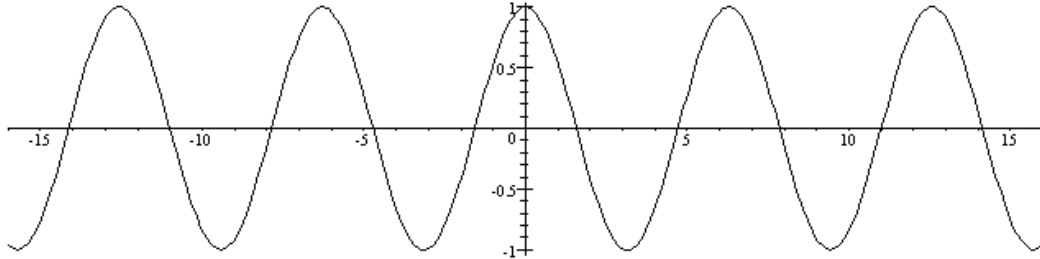


Algunes de les característiques de la funció cosinus en l'interval $[0, 2\pi)$ són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$.
- Els punts de tall són $(0, 1)$, $(\pi/2, 0)$ i $(3\pi/2, 0)$.

- És creixent en $(\pi, 2\pi)$ i decreixent en $(0, \pi)$.
- Té un màxim en el punt $(0, 1)$ i un mínim en el punt $(\pi, -1)$.

Com la funció sinus, la funció cosinus és una funció periòdica perquè es repeteix en intervals d'amplada 2π ; d'aquesta manera, la gràfica de la funció cosinus en un interval més gran presenta aquesta forma:



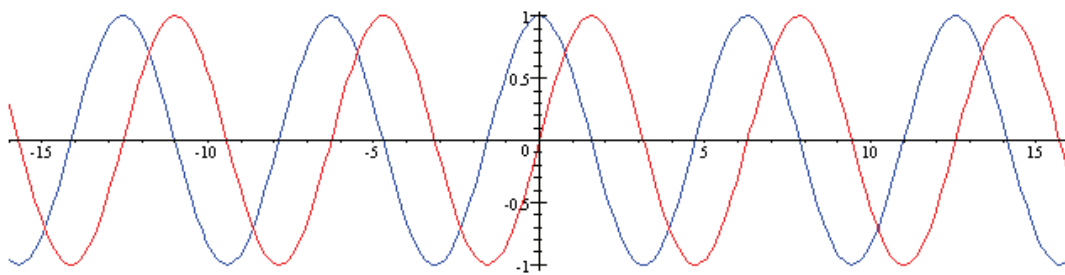
Algunes de les característiques fonamentals de la funció cosinus:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$ i el domini són tots els reals.
- Els punts de tall són $((2k + 1)\pi/2, 0)$ on k és qualsevol nombre enter, i $(0, 1)$.
- Decreixent: $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$, creixent: $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$, on k és qualsevol nombre enter.
- Té un màxim en $(2k\pi, 1)$ i un mínim en $((2k + 1)\pi, -1)$, essent k un nombre enter.

Quina és la relació entre la funció sinus i la funció cosinus?

La forma de les funcions sinus i cosinus és la mateixa, encara que hi ha un desfament de $\pi/2$ entre l'una i l'altra. Això és així perquè és sabut que $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

A primer cop d'ull, es pot comprovar que la funció sinus i la funció cosinus són molt semblants. Si representem ambdues funcions en un mateix gràfic, aquesta semblança és més palesa:



Observem que la seva forma és exactament la mateixa, però la funció sinus (en vermell) està lleugerament "avançada" (en $\pi/2$) respecte de la funció cosinus (en blau). Això és així perquè com és sabut:

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

En aquesta taula es mostra aquesta relació de manera més detallada, descrivint cadascuna de les funcions segons el quadrant:

x	0	de 0 a $\pi/2$ 1r quadrant	$\pi/2$	de $\pi/2$ a. π 2n quadrant	π	de π a $3\pi/2$ 3r quadrant	$3\pi/2$	de $3\pi/2$ a 2π 4t quadrant	2π
$\sin x$	0	positiva i creixent	1	positiva i decreixent	0	negativa i decreixent	-1	negativa i creixent	0.
$\cos x$	1	positiva i decreixent	0	negativa i decreixent	-1	negativa i creixent	0	positiva i creixent	1.

Què és la funció tangent i quines en són les característiques?

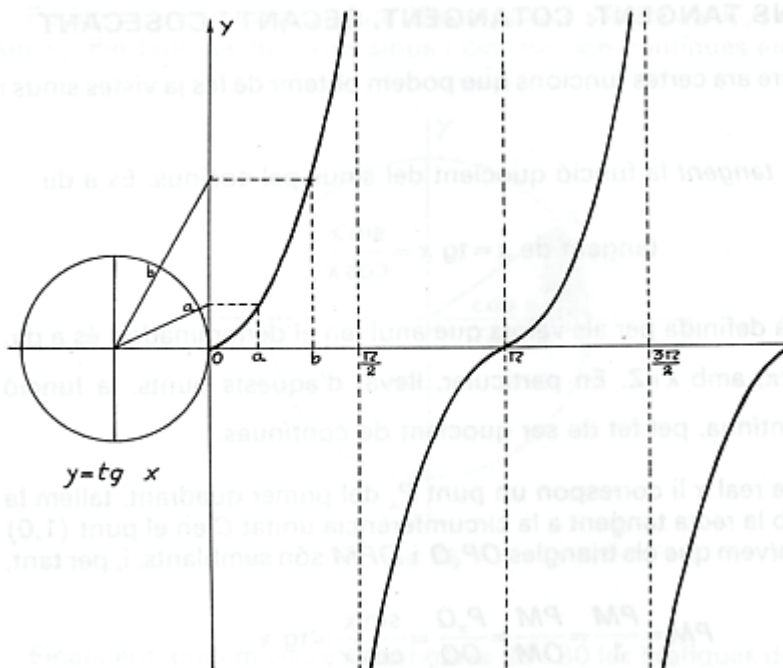
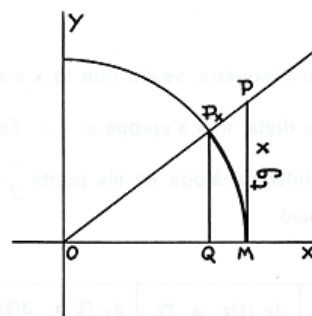
La funció tangent és una altra de les funcions trigonomètriques que a cada valor (en radians) hi fa correspondre la seva tangent. La funció tangent és una funció periòdica, de període π . El seu domini són tots els nombres excepte alguns punts i la seva imatge són tots els nombres.

La funció tangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians, la seva tangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte que:

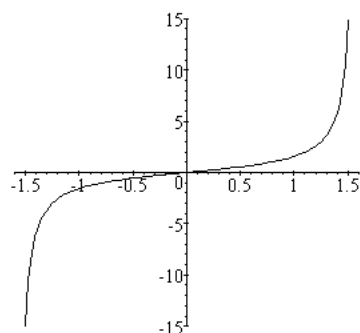
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \quad (\text{també } \tan x)$$

Per a representar aquesta funció, s'ha de recórrer a la interpretació geomètrica de la tangent. En aquest gràfic es pot observar el primer quadrant d'una circumferència de radi 1. El sinus de l'angle representat és QP_x , el cosinus és OQ i la tangent és MP .

Per tant, es pot representar la funció tangent de la manera següent:



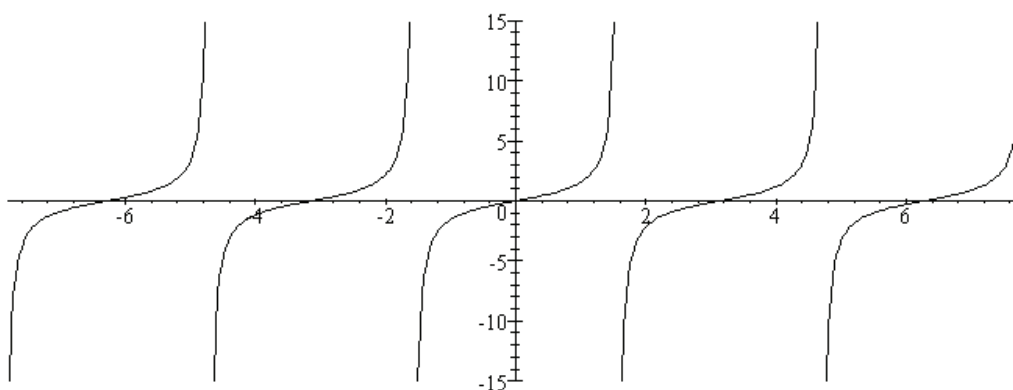
Així, doncs, si es representa la funció tangent entre $-\pi/2$ i $\pi/2$, aquesta és la seva gràfica:



Algunes de les característiques fonamentals de la funció tangent en l'interval $[-\pi/2, \pi/2)$ són:

- La imatge d'aquesta funció es compon de tots els nombres reals, positius i negatius.
- L'únic punt de tall és $(0,0)$.
- És una funció creixent.
- No té ni màxims ni mínims.

La funció tangent, com les funcions sinus i cosinus, és una funció periòdica, en aquest cas de període π . Així, doncs, si representem la seva gràfica en un interval més gran, la seva representació serà la següent:



Les propietats d'aquesta funció són:

- A diferència de la majoria de les funcions estudiades fins al moment, el domini d'aquesta funció no inclou tots els nombres: per als valors en els quals el cosinus és 0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible); això passa quan x és igual a $\pi/2 + k\pi$ (essent k un nombre enter qualsevol), és a dir, per a $\dots -7\pi/2, -5\pi/2, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2 \dots$
- La imatge d'aquesta funció són tots els nombres reals, positius o negatius.
- La tangent és sempre una funció creixent.
- La coordenada x dels punts de tall amb els eixos és un múltiple de π , és a dir, els punts de tall amb els eixos són $(k\pi, 0)$, on k és un nombre enter.

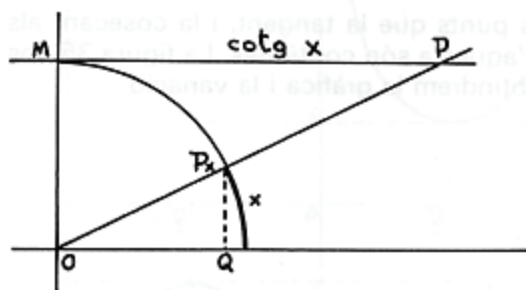
Què és la funció cotangent i quines en són les característiques?

La funció cotangent és una altra de les funcions trigonomètriques que a cada valor (en radians) hi fa correspondre la seva cotangent. La funció cotangent és una funció periòdica, de període π . El seu domini són tots els nombres excepte alguns punts i la seva imatge són tots els nombres.

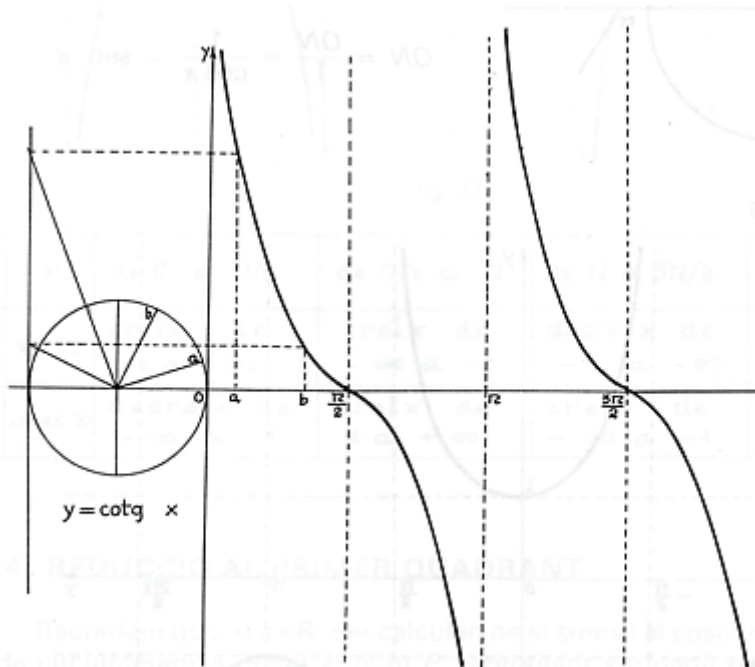
La funció cotangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians la seva cotangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte que:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

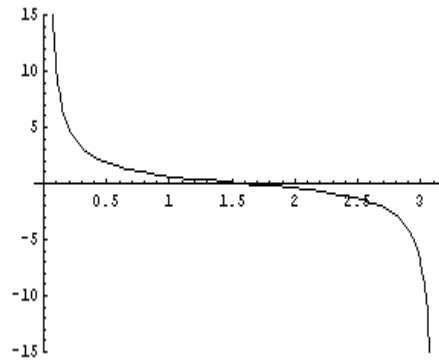
Per a representar aquesta funció, s'ha de recórrer a la interpretació geomètrica de la cotangent. En aquest gràfic es pot observar el primer quadrant d'una circumferència de radi 1. El sinus de l'angle representat és QP_x , el cosinus és OQ i la tangent és MP .



Per tant, es pot representar la funció tangent de la manera següent:



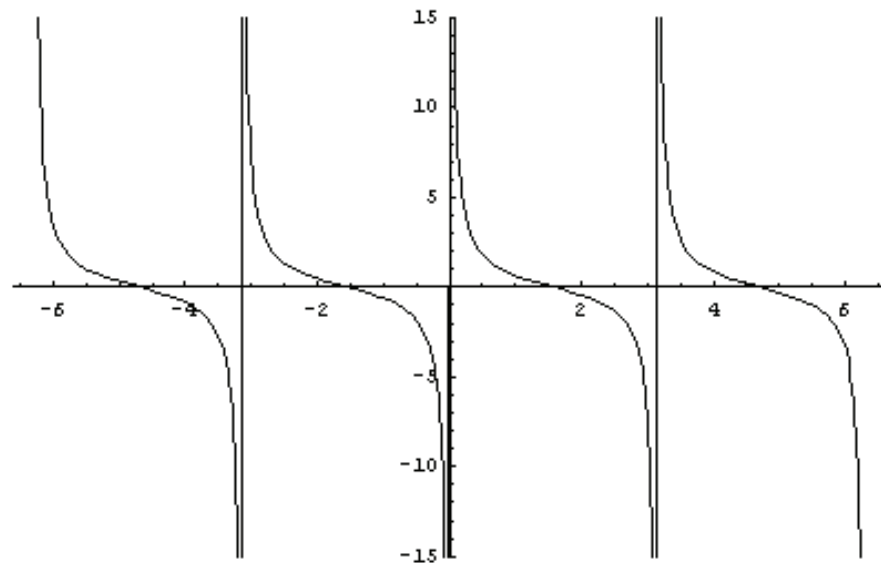
Així, doncs, si es representa la funció tangent entre 0 i π , aquesta és la seva gràfica:



Algunes de les característiques fonamentals de la funció cotangent en l'interval $[0, \pi)$ són:

- La imatge d'aquesta funció es compon de tots els nombres reals, positius o negatius.
- L'únic punt de tall és $(\pi/2, 0)$.
- És una funció decreixent.
- No té ni màxims ni mínims.

La funció cotangent, com les funcions sinus, cosinus i tangent, és una funció periòdica, en aquest cas el període π ; per tant, si representem la seva gràfica en un interval major, la seva representació serà la següent:



Les propietats d'aquesta funció són:

- El domini no inclou tots els nombres, com en el cas de la tangent: per als valors en els quals el sinus és 0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible); això passa quan x és igual a $k\pi$ (essent k un nombre enter qualsevol), és a dir, per a $\dots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi \dots$
- La imatge es compon de tots els nombres reals, positius o negatius.
- La cotangent és sempre una funció decreixent.
- Els punts de tall amb els eixos són $(\pi/2 + k\pi, 0)$, on k és un nombre enter.

Què són les funcions secant i cosecant i quines en són les característiques?

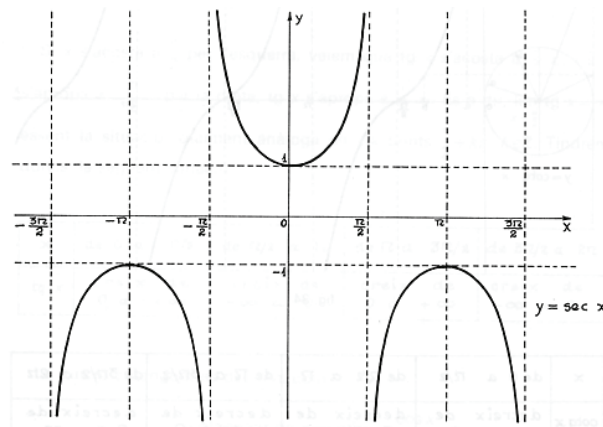
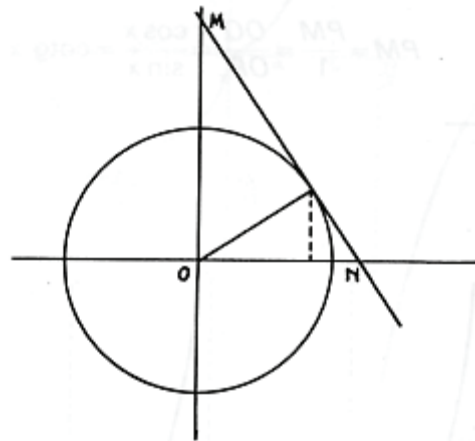
De manera semblant a la funció cotangent, les funcions secant i cosecant són les funcions que es calculen dividint 1 entre les funcions cosinus i sinus, respectivament. També són funcions periòdiques de període 2π .

Les funcions secant i cosecant es defineixen de la manera següent:

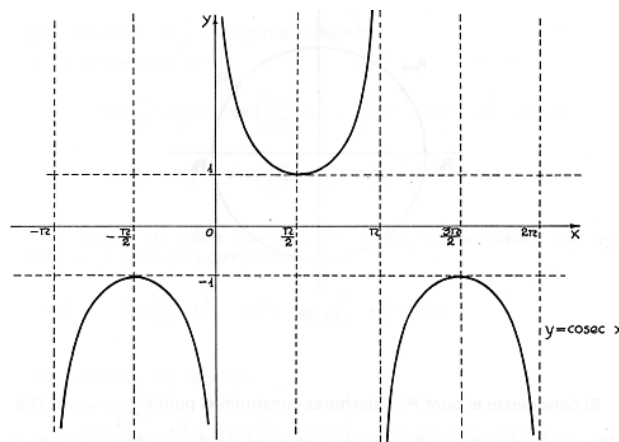
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Per a representar aquesta funció, cal recórrer a la interpretació geomètrica: el segment ON es correspon amb la secant i el segment OM es correspon amb la cosecant.



i la funció cosecant:



Es tracta, doncs, de funcions periòdiques de període 2π les característiques essencials de les quals són:

- Els dominis són:
 - la funció secant: tots els nombres excepte $\pi/2 + k\pi$, essent k un nombre enter;
 - la funció cosecant: tots els nombres excepte $k\pi$, essent k un nombre enter.
- La imatge es compon de tots els nombres reals, excepte l'interval $(-1,1)$.
- Els intervals de creixement són (sense comptar els punts que no són del domini):
 - secant:
creixent: $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, decreixent: $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, on k és qualsevol nombre enter.
 - cosecant:
creixent: $((4k+1)\pi/2, (4k+3)\pi/2)$, decreixent: $((4k+3)\pi/2, (4k+5)\pi/2)$, on k és qualsevol nombre enter.
- Màxims i mínims:
 - secant:
Té un mínim en $(2k\pi, 1)$ i un màxim en $((2k+1)\pi, -1)$, essent k un nombre enter.
 - cosecant:
Té un mínim en $((4k+1)\pi/2, 1)$ i un màxim en $((4k+3)\pi/2, -1)$, essent k un nombre enter.
- La secant té un únic punt de tall, el $(0,1)$, mentre que la tangent no en té cap.

Quines són les funcions inverses de les funcions trigonomètriques?

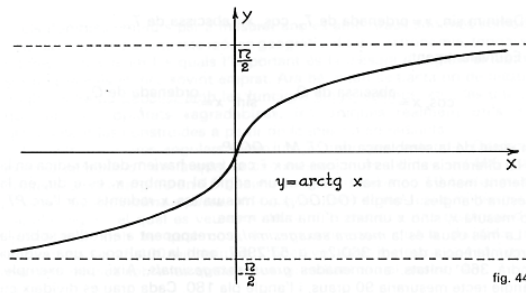
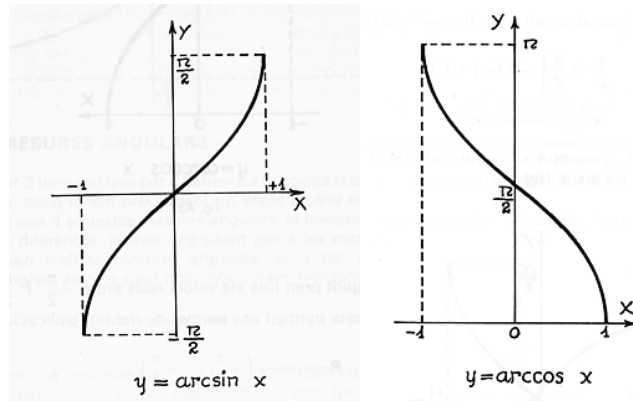
Les funcions inverses de les funcions sinus, cosinus i tangent són les funcions arc sinus, arc cosinus i arc tangent. Les gràfiques d'aquestes funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$, tal com passa amb totes les funcions inverses.

Totes les funcions trigonomètriques tenen inversa en l'interval de periodicitat propi de la funció. En qualsevol cas, les més importants són les funcions inverses del sinus, cosinus i tangent. Per a denominar-les, totes elles precedeixen el nom de la funció original del terme arc.

- La funció inversa de la funció sinus es denomina *arc sinus* i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1,1]$ l'angle el sinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en què passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $[-\pi/2, \pi/2]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc sin. Per exemple, $\text{arc sin}(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor del sinus 0 és l'angle 0 radians.
- La funció inversa de la funció cosinus es denomina *arc cosinus* i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1,1]$ l'angle el cosinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $[0, \pi]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc cos. Per exemple, $\text{arc cos}(0) = \pi/2$, ja que l'angle que correspon al valor del cosinus 0 és l'angle $\pi/2$ radians.
- La funció inversa de la funció tangent es denomina *arc tangent* i és una funció que assigna a cada valor real l'angle la tangent del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $(-\pi/2, \pi/2)$. Aquesta funció es designa amb el símbol

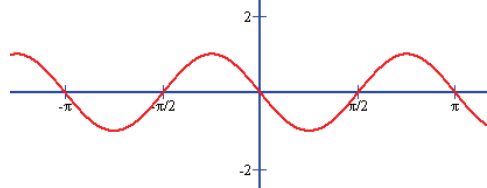
arc tan. Per exemple, $\text{arc tan}(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor de la tangent 0 és l'angle 0 radians.

Aquestes són les representacions d'aquestes funcions, que, com sabem, són funcions simètriques de la funció original respecte de la recta $y = x$:

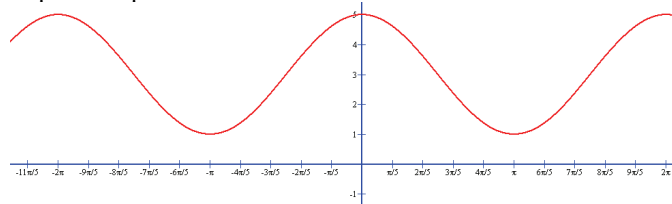


Exercicis

1. Quines són les característiques bàsiques de la funció $f(x) = \cos(2x)$ (domini, imatge, període, punts de tall, creixement i decreixement, màxims i mínims, ...)?
2. Hi ha cap punt que compleixi que $\sin x = \tan x$?
3. Quina és la imatge de les funcions $f(x) = 3 \sin x$ i $g(x) = 3 + 2 \cos x$.
4. Expressa aquesta funció utilitzant només el sinus:



5. Expressa aquesta funció utilitzant només el cosinus:



Solucions

1. $f(x) = \cos(2x)$ és molt semblant a la funció cosinus, amb la diferència que el seu argument augmenta/disminueix més ràpidament, per tant la seva gràfica serà més “comprimida”:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1,1]$.
- El seu període és π .
- Els punts de tall són $(0, 1)$, $(\pi/4, 0)$ i $(3\pi/4, 0)$.
- És creixent en $(\pi/2, \pi)$ i decreixent en $(0, \pi/2)$.
- Té un màxim en el punt $(0,1)$ i un mínim en el punt $(\pi/2,-1)$.

2. Només cal resoldre $\sin x = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, és a dir,

$$1 = \frac{1}{\cos x}, \text{ per tant, } \cos x = 1. \text{ Així } x = 0 + 2\pi k.$$

3. $f(x) = 3\sin x$: la imatge és $[-3,3]$, perquè els valor del sinus es multipliquen per 3.

$g(x) = 3 + 2\cos x$: La imatge de $2\cos x$ és $[-2,2]$, si hem de sumar 3, la seva imatge serà $[1,5]$.

4. El període és π i el valor a 0 és 0 i a continuació és negatiu. Per tant, podria ser $f(x) = \sin(2x + \pi)$
5. La imatge és $[1,5]$ i el valor a 0 és el màxim. El període és 2π . Per tant, pot ser $f(x) = 2\cos x + 3$

