Elements de geometria
a l’espai

Elements de geometria a l'espai

Elements bàsics de l'espai

Els elements bàsics de l'espai són:

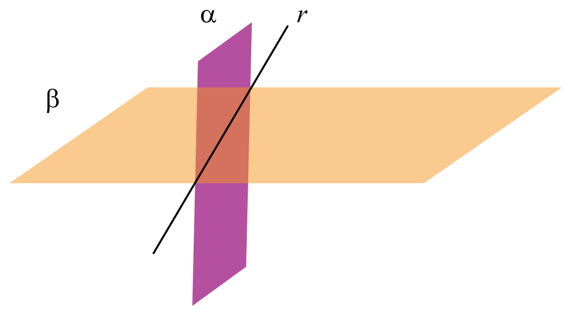
- punts, denominats amb lletres majúscules, per exemple P.
- rectes, denominades amb lletres minúscules, per exemple *r*.
- plans, denominats amb lletres gregues, per exemple α.

Posicions relatives de dos plans a l'espai

Dos plans diferents de l'espai poden:

- ser paral·lels: per exemple, els plans β i γ són paral·lels.

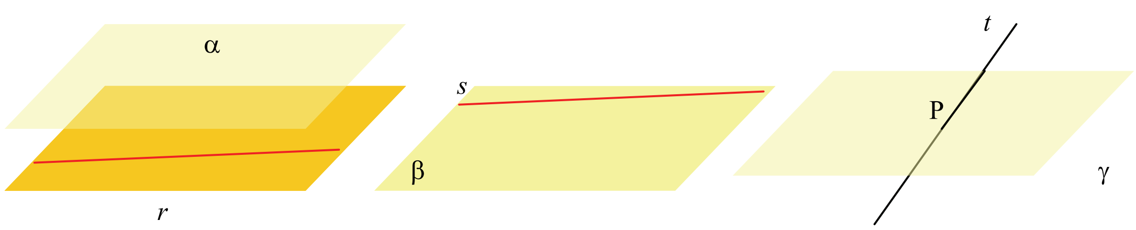
- tallar-se en una recta. Per exemple, el pla α i el pla β es tallen en la recta *r*. Cadascuna de les zones en què es divideix l'espai quan dos plans es tallen es denomina *angle díedre.*



Posicions relatives d'una recta i un pla a l'espai

Un pla i una recta poden ser:

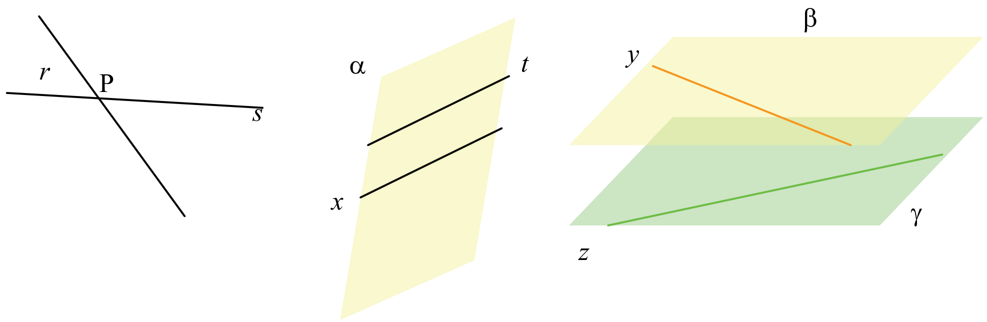
- paral·lels: per exemple, la recta *r* és paral·lela al pla α.
- tallar-se: la intersecció pot ser
    - un sol punt: per exemple, la recta *t* talla el pla γ en el punt P.
    - tota la recta es troba inclosa en el pla; per exemple, la recta *s* pertany al pla β.



Posicions relatives de dues rectes a l'espai

Dues rectes diferents de l'espai poden:

- tallar-se en un punt; per exemple, les rectes *r* i *s* es tallen en el punt P.
- ser paral·leles; per exemple, les rectes *t* i *x* són paral·leles.
- creuar-se, sense tallar-se; per exemple, les rectes *z* i *y* es creuen.



L'expressió algebraica dels elements de l'espai

Un pla de l'espai s'expressa en forma d'una equació lineal les solucions de la qual són, precisament, els punts del pla:

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

Una recta de l'espai s'expressa en forma d'un sistema d'equacions les solucions de les quals són els punts de la recta:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Donats els plans

$$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

i les rectes:

$$r: \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a_5x + b_5y + c_5z + d_5 = 0 \\ a_6x + b_6y + c_6z + d_6 = 0 \end{cases}$$

Aquestes són les possibilitats per a les posicions relatives entre rectes i plans, que depenen del rang de la matriu del sistema associat a les equacions dels elements i del rang de la matriu ampliada:

1. Les possibles posicions relatives entre α i β són:

rang(A^*) / rang(A)	2	3
2	Sistema compatible indeterminat → els plans es tallen en una recta.	Sistema incompatible → els plans són paral·lels.

Essent:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$$

2. Les possibles posicions relatives entre α i *r* són:

rang(A^*) / rang(A)	2	3
2	Sistema compatible indeterminat → la recta està continguda en el pla.	Sistema incompatible → la recta és paral·lela al pla.
3		Sistema compatible determinat → la recta i el pla es tallen en un punt.

Sent:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right)$$

3. Les possibles posicions relatives entre *r* i *s* són:

rang(A^*) / rang(A)	2	3	4.
2	Sistema compatible indeterminat → les rectes coincideixen.	Sistema incompatible → les rectes són paral·leles.	
3.		Sistema compatible determinat → les rectes es tallen en un punt.	Sistema incompatible → Les rectes es creuen.

Essent:

$$A = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 \end{array}\right)$$

Quins són els elements bàsics de la geometria de l'espai?

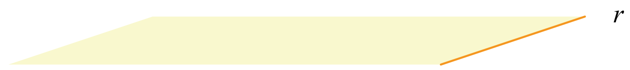
> Igual que en el pla, l'espai conté punts, rectes i segments, que s'indiquen de la mateixa manera que en el pla. A més, a l'espai també hi ha els plans, que s'han d'imaginar talment fulles de paper sense límits, sense ondulacions i sense espessor. Normalment, els plans es designen amb lletres de l'alfabet grec.

Els elements de la geometria plana (el punt, el segment, la recta i la semirecta, i l'angle entre dos segments) també es troben a l'espai de tres dimensions. Aquests elements es designen de la mateixa forma que en el pla.

A més, a l'espai es poden definir els plans que s'han d'imaginar talment immenses fulles de paper sense límits, sense ondulacions i sense espessor; per això, un pla té dues dimensions, de la mateixa manera que una recta té una única dimensió (i un punt, cap). Normalment, un pla s'acostuma a designar amb una lletra grega. Per a representar un pla s'utilitza, normalment, una forma trapezoïdal, com la de la imatge:

Una propietat important de qualsevol pla és que si conté dos punts, sempre conté la recta que passa per aquests dos punts.

Un semiplà és la part d'un pla que té per extrem una recta. És difícil representar-lo de manera diferent; per això s'haurà de subratllar la recta que li serveix d'extrem.

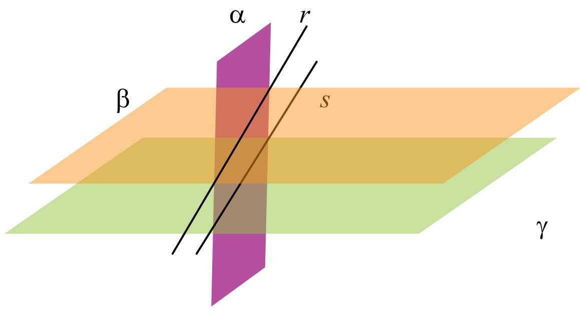


Semiplà limitat per la recta *r*.

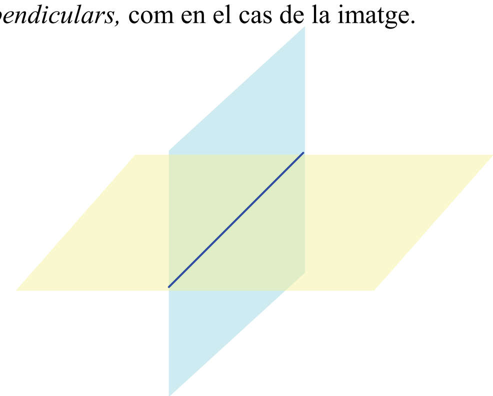
Quines són les posicions relatives dels diversos elements de l'espai?

> Dos plans diferents de l'espai poden ser paral·lels, o bé tallar-se en una recta. Un pla i una recta poden ser paral·lels, o bé tallar-se; en aquest cas, la intersecció és un sol punt, o bé tota la recta es troba inclosa en el pla. Finalment, dues rectes a l'espai poden tallar-se en un punt, o bé ser paral·leles, o bé es poden creuar, sense tallar-se.

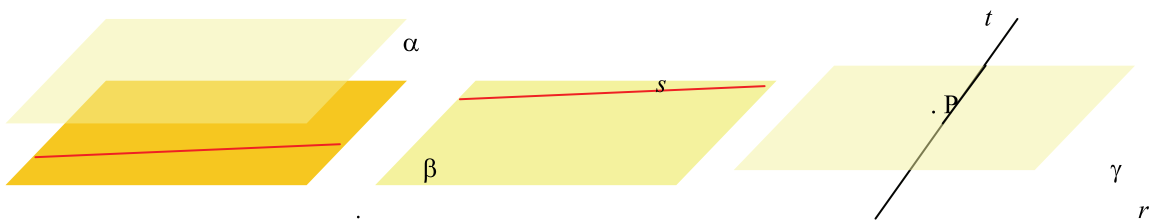
Dos plans diferents de l'espai poden ser paral·lels, o bé tallar-se en una recta. Per exemple, els plans β i γ són paral·lels. En canvi, el pla α i el pla β es tallen en la recta r, mentre que el pla γ i el pla α es tallen en la recta s.



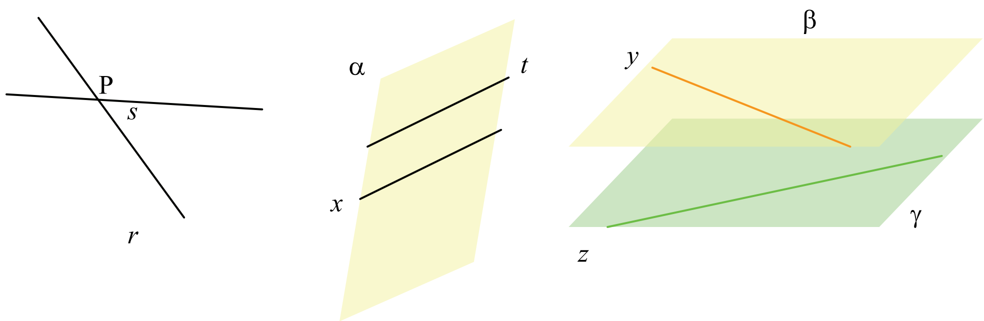
Dos plans que es tallen divideixen tot l’espai en quatre zones, cadascuna de les quals es denomina *angle díedre*. Quan les quatre zones tenen una forma similar, es diu que els plans són *perpendiculars,* com en el cas de la imatge.



Un pla i una recta poden ser paral·lels, o bé tallar-se. En aquest últim cas, la intersecció és un sol punt, o bé tota la recta es troba inclosa en el pla. Així, la recta *r* és paral·lela al pla α; la recta *s* pertany al pla β; la recta *t* talla el pla γ en el punt P:



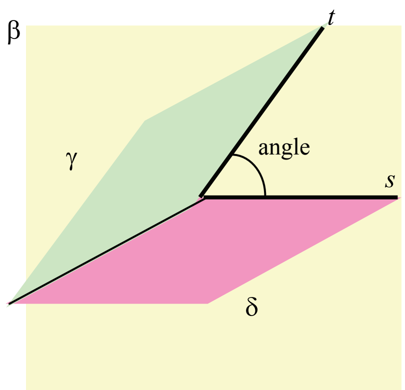
Finalment, dues rectes a l’espai poden tallar-se en un punt, o bé ser paral·leles, o bé es poden creuar, sense tallar-se. Per exemple, les rectes *r* i *s* es tallen en el punt P; les rectes *t* i *x* són paral·leles (perquè es troben en el mateix pla, α); les rectes *z* i *y* es creuen (perquè pertanyen a plans diferents paral·lels).



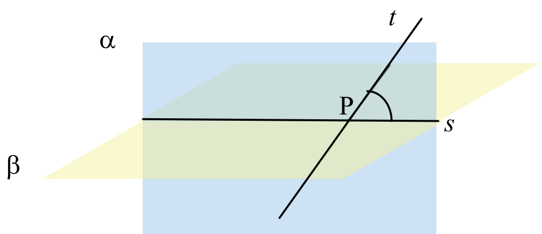
Què és i com es calcula l'angle entre els elements de l'espai?

> Dues rectes que es tallen generen quatre angles, amb les mateixes propietats que els angles entre dues rectes del pla que es tallen. Per a definir un angle entre dos plans, s'ha de traçar un tercer pla que sigui perpendicular a tots dos plans; les rectes que resulten de la intersecció d'aquest pla amb els dos primers ens donen els angles entre ambdós plans. Finalment, per a trobar un angle entre una recta i un pla que es tallen, s'ha de representar el pla perpendicular al pla donat i que inclogui la recta; l'angle entre la recta d'intersecció dels plans i la recta original és l'angle buscat.

Els angles entre dues rectes que es tallen es defineixen d'igual manera que els angles entre dues rectes del pla que es tallen. En canvi, per a definir un angle entre dos plans, s'ha de traçar un tercer pla que sigui perpendicular a ambdós plans. Per exemple, per a saber l'angle que formen els plans γ i δ, s'ha de traçar el pla β, perpendicular tant a com γ a δ. La intersecció entre β i γ és la recta t; la intersecció entre β i δ és s. Els angles entre γ i δ seran els angles entre t i s.

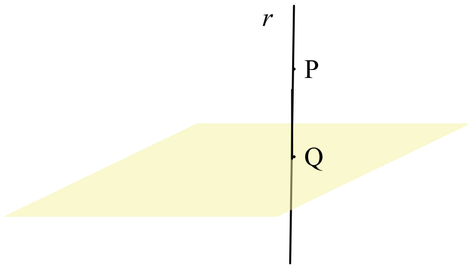


Finalment, per a trobar un angle entre una recta i un pla que es tallen, s'ha de representar el pla perpendicular al pla dau i que inclogui la recta. Per exemple, per a trobar un angle entre el pla β i la recta t (que es tallen en P), es construeix el pla α, perpendicular a β i que conté t; s és la intersecció d'ambdós plans. Qualsevol angle format entre les rectes s i t és un angle entre la recta t i el pla β (encara que, de vegades, es diu que l'angle entre la recta i el pla és el menor d'aquests angles, tal com s'observa en la imatge). Es diu que una recta és perpendicular a un pla si qualsevol d'aquests angles és de 90º.



També es pot definir la projecció d'una recta sobre un pla utilitzant la imatge anterior: es construeix un pla perpendicular al pla en qüestió que contingui la recta. La intersecció entre ambdós plans serà la projecció buscada. En l'exemple, la projecció de la recta t sobre el pla β és la recta s, perquè el pla perpendicular que β conté la recta t, és α; a més, la intersecció entre α i β és, precisament, s.

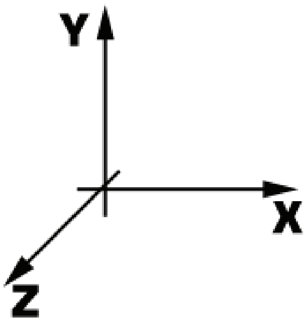
De manera similar, es pot definir la projecció d'un punt sobre un pla com la intersecció de la recta perpendicular al pla que passi pel punt, i el pla en qüestió. Per exemple, la projecció del punt P sobre el pla α de la imatge és igual a l'instant Q, perquè la recta perpendicular que α passa per P és *r*, i talla el pla α en el punt Q



Com s'expressen algebraicament els elements de l'espai?

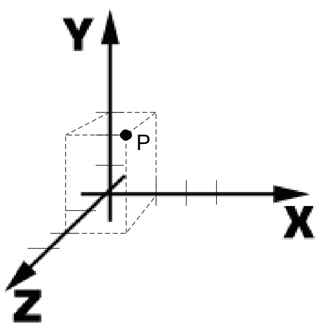
> Un punt de l'espai s'expressa mitjançant una terna (x, y, z); cadascun dels elements indica una de les coordenades referides a cadascun dels tres eixos del sistema de referència de l'espai. Un pla de l'espai s'expressa mitjançant una equació lineal de tres incògnites, les solucions de les quals són precisament tots els punts del pla. Una recta de l'espai s'expressa com la intersecció de dos plans.

Com és sabut, un sistema de referència en l'espai consta de tres eixos: eix X, eix Y i eix Z, tal com es mostra en la imatge:



Un punt en l'espai s'expressa mitjançant una terna que indica les coordenades d'aquest punt, que expressen les tres dimensions de l'espai: altura, amplària, profunditat.

Així, per exemple, el punt P = (1,3,2) es representaria de la manera següent:

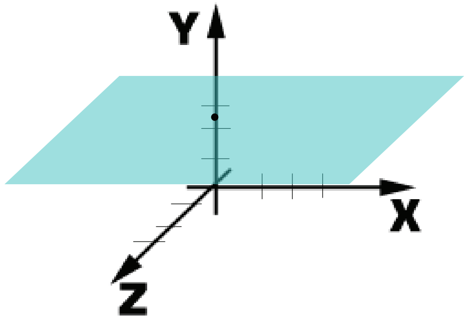


Un pla de l'espai es pot expressar per mitjà d'una equació lineal amb tres incògnites, del tipus:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Les solucions d'aquesta equació formen un pla de l'espai, de la mateixa manera que la solució d'una equació lineal de dues incògnites representava una recta del pla.

Per exemple, aquest pla



que talla l'eix Y en el punt (0,2,0), i que és paral·lel al pla format pels eixos X i Z, té per equació:

$$y = 2$$

perquè tots els punts que tenen coordenada y igual a 2 pertanyen a aquest pla.

Una recta de l'espai es pot concebre com la intersecció de dos plans. Efectivament, si cada pla s'expressa amb una equació lineal amb tres incògnites, la recta intersecció, es pot expressar com un sistema de dues equacions lineals, amb tres incògnites, les solucions de les quals són, precisament, tots els punts de la recta. Per exemple, els sistemes d'equacions que defineixen les rectes que formen els eixos de coordenades són:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ sistema que expressa l'eix X.

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ sistema que expressa l'eix Y.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ sistema que expressa l'eix Z.

És fàcil demostrar-ho: en el cas de l'eix X, els seus punts són tots aquells que tenen les coordenades z i y igual a 0; de la mateixa manera, els punts de l'eix Y són aquells que tenen les coordenades x i z igual a 0; igualment, els punts de l'eix Z són aquells que tenen les coordenades x i y igual a 0.

Com s'expressen les posicions relatives entre plans i rectes?

> Expressant els plans mitjançant una equació i les rectes mitjançant un sistema de dues equacions, es poden deduir les relacions entre aquests elements examinant les solucions del sistema d'equacions que resulta de combinar totes les equacions d'aquests elements.

Dos plans de l'espai s'expressen mitjançant dues equacions lineals amb tres incògnites. A causa d'això, les posicions relatives dels plans s'han de correspondre amb els tipus de solucions possibles del sistema:

- Si el sistema és compatible indeterminat, és a dir, el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada, en aquest cas, els plans es tallen. Es poden donar dues situacions:

- Que aquest rang sigui igual a 2.
  En aquest cas, la solució del sistema depèn d'un sol paràmetre. Per tant, els dos plans es tallen en una recta.
- Que aquest rang sigui igual a 1.
  En aquest cas, ambdues equacions són equivalents, o el que és el mateix, ambdós plans són iguals.

- Si el sistema és incompatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és 1 i el rang de la matriu ampliada és 2 (per tant, són diferents), en aquest cas, ambdós plans són paral·lels.

Per exemple, donats aquests plans:

α: $x + y + z = 1$

β: $x + y + z = -3$

γ: $2x + 3y + z = 1$

Els plans α i β són paral·lels, ja que si s'expressen en forma de sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

i aquest sistema s'expressa de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

es pot observar que el rang de la matriu del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és 1, mentre que el rang de la matriu ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$ és 2. Per tant, el sistema és incompatible, és a dir, no té solució. O el que és el mateix, els plans no es tallen, o sigui, són paral·lels.

En canvi, els plans β i γ es tallen en una recta, perquè el sistema que generen les seves equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

és compatible determinat i el rang de la matriu del sistema és igual a 2, el mateix valor que el rang de la matriu ampliada.

De manera similar, les posicions relatives d'un pla i una recta s'han de correspondre amb els tipus de solucions possibles del sistema resultant d'agrupar les tres equacions (una del pla i dos de la recta):

- Si el sistema és compatible, el pla i la recta es tallen, i es poden donar dues situacions:
  - Que el rang de la matriu i de l'ampliada sigui igual a 2.
    En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat, és a dir, la recta es troba inclosa en el pla.
  - Que aquest rang sigui igual a 3.0.
    En aquest cas, el sistema té una única solució. Per tant, hi ha un únic punt d'intersecció entre el pla i la recta.
- Si el sistema és incompatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada és 3.
  En aquest cas, no hi ha solució i, per tant, el pla i la recta són paral·lels.

Dues rectes de l'espai s'expressen mitjançant dos sistemes d'equacions lineals amb tres incògnites (ambdós sistemes han de ser compatibles determinats). A causa d'això, les posicions relatives d'aquestes rectes s'han de correspondre amb els tipus de solucions possibles del sistema resultant d'agrupar les quatre equacions:

- Si el sistema és compatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada, en aquest cas, les rectes es tallen i es poden donar dues situacions:
    - Que aquest rang sigui igual a 2.
      En aquest cas, el rang del sistema i l'ampliada de quatre equacions és el mateix que el rang del sistema i l'ampliada dels sistemes de cadascuna de les rectes. Així, doncs, las dues rectes són iguals.
    - Que aquest rang sigui igual a 3.
      En aquest cas, el sistema té una única solució. Per tant, aquest punt ha de ser la intersecció d'ambdues rectes. Així, doncs, les rectes es tallen en un punt.
- Si el sistema és incompatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és menor que el rang de la matriu ampliada. Per tant, les rectes no coincideixen en cap punt. Es poden donar dos casos:
    - Que el rang de la matriu del sistema sigui 2 i el rang de la matriu ampliada sigui 3.
      En aquest cas, les rectes són paral·leles.
    - Que el rang de la matriu del sistema sigui 3 i el rang de la matriu ampliada sigui 4.
      En aquest cas, les rectes es creuen a l'espai.

Per exemple, donades les rectes:

$$r\!:\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \\ 3x+y+z-1=0 \end{cases} \qquad s\!:\begin{cases} 6x-2y-2=0 \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$$

Es pot observar que el sistema format per les quatre equacions:

$$\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \\ 3x+y+z-1=0 \\ 6x-2y-2=0 \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$$

és compatible determinat, i la seva única solució és: $x = -1$, $y = 2$, $z = 2$. Per tant, ambdues rectes es tallen en un únic punt.

Considerem altre exemple: donades les rectes

$$t\!:\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \qquad m\!:\begin{cases} 2x+2y-2z=2 \\ 4x+z=5 \end{cases}$$

en aquest cas, el sistema format per les quatre equacions:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=2 \\ 2x+2y-2z=2 \\ 4x+z=5 \end{cases} \quad \text{o sigui} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

és incompatible, perquè el rang de la matriu associada al sistema és 2, mentre que el rang de la matriu ampliada és 3. Per tant, ambdues rectes són paral·leles.