Les funcions polinòmiques

Les funcions polinòmiques

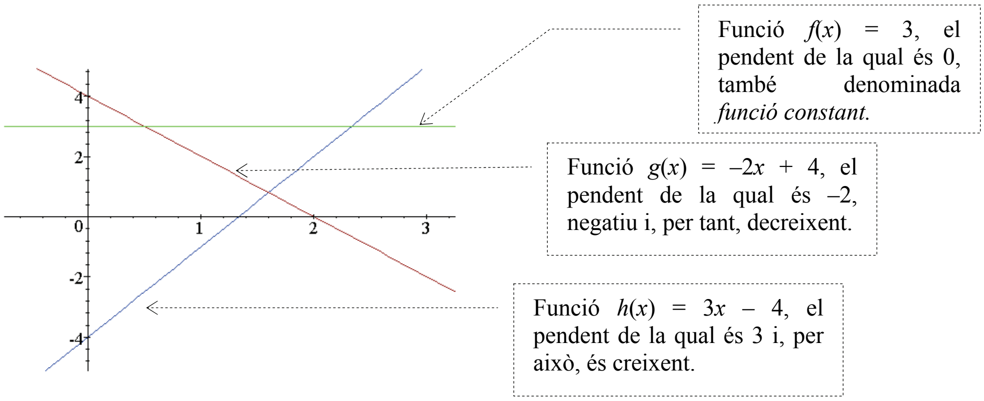
Una funció polinòmica és la que té per expressió un polinomi. En general, se solen estudiar segons el grau del polinomi:

Les funcions afins

Una funció afí és una funció polinòmica l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1, del tipus:

$$f(x) = ax + b$$

La gràfica d'una funció lineal és una recta. El nombre a es diu *pendent de la recta* i informa de la inclinació d'aquesta. Per exemple:



Punts de tall amb els eixos:

amb l'eix X: $(-b/a, 0)$

amb l'eix Y: $(0, b)$

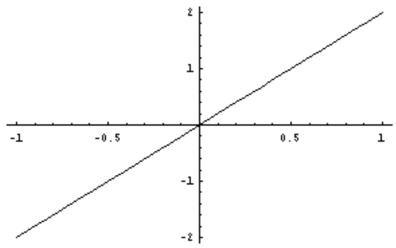
Creixement:

la funció és creixent si $a > 0$

la funció és constant si $a = 0$

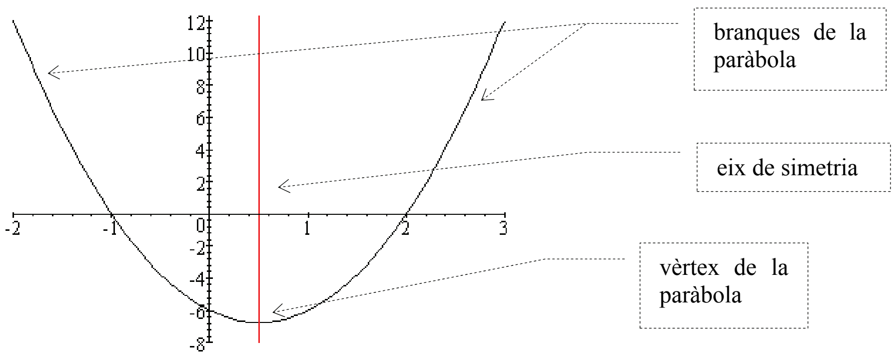
la funció és decreixent si $a < 0$

Un tipus especial de funcions afins són les funcions lineals: una funció lineal és una funció afí el terme independent de la qual és 0. La seva representació és una recta que passa per l'origen. Per exemple: recta corresponent a la funció $f(x) = 2x$.



Les funcions quadràtiques

Una funció quadràtica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 2. La seva representació és una paràbola, els elements essencials de la qual són l'eix de simetria, el vèrtex i les branques:



Si una funció quadràtica té per expressió $f(x) = ax^2 + bx + c$,

l'eix de simetria és la recta $x = -b/2a$.

el vèrtex és el punt $(-b/2a\ ,\ b^2/4a - b^2/2a + c)$.

les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt si $a > 0$, i cap avall si $a < 0$.

Punts de talls amb els eixos:

amb l'eix X: els punts la x dels quals resol l'equació $ax^2 + bx + c = 0$. Poden ser:

dues: si $b^2 - 4ac > 0$.

un: si $b^2 - 4ac = 0$.

cap: si $b^2 - 4ac < 0$.

amb l'eix Y: $(0, y)$

Creixement:

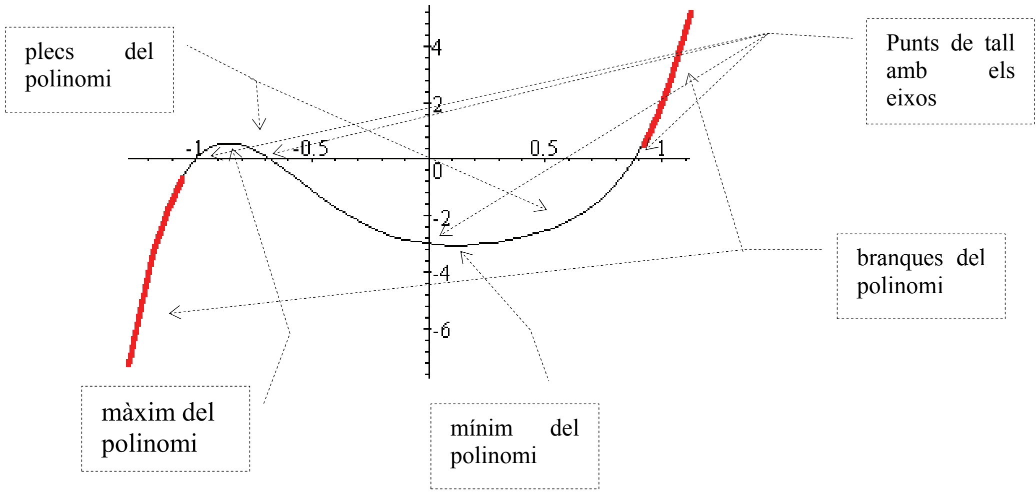
si $a > 0$, decreixent en l'interval $(-\infty,-b/2a)$, creixent en l'interval $(-b/2a,+\infty)$.

si $a < 0$, creixent en l'interval $(-\infty,-b/2a)$, decreixent en l'interval $(-b/2a,+\infty)$.

Les funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi; per això, de vegades, es denomina simplement *polinomi.*

En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central; també els màxims i els mínims, i els punts de tall amb els eixos:



La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.

La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.

El geni de Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) fou un matemàtic suís els treballs més importants del qual es van estendre per gairebé tots camps de la matemàtica, i fins i tot per altres ciències. Alguns d'aquests es van centrar en les funcions i va ser el primer matemàtic que en va donar una definició semblant a l'actual.

Euler va néixer a Basilea i va estudiar a la Universitat de Basilea amb el matemàtic suís Johann Bernoulli, i es va llicenciar amb 16 anys. El 1727, per invitació de l'emperadriu de Rússia Catalina va ser membre del professorat de l'Acadèmia de Ciències de Sant Petersburg. Va ser nomenat catedràtic de Física el 1730 i de Matemàtiques el 1733. El 1741 fou professor de Matemàtiques en l'Acadèmia de Ciències de Berlín a petició del rei de Prusia, Frederic el Gran. Euler va tornar a Sant Petersburg el 1766, on va romandre fins a la seva mort. Encara que impedit per una pèrdua parcial de visió abans de complir 30 anys i per una ceguesa gairebé total al final de la seva vida, Euler va produir nombroses obres matemàtiques importants, i també ressenyes matemàtiques i científiques.

En la *Introducció a l'anàlisi dels infinits* (1748), Euler va fer el primer tractament analític complet de l'àlgebra, la teoria d'equacions, la trigonometria i la geometria analítica. En aquesta obra va tractar el desenvolupament de sèries de funcions i va formular la regla per la qual només les sèries convergents infinites poden ser avaluades adequadament. També va abordar les superfícies tridimensionals i va demostrar que les seccions còniques es representen mitjançant l'equació general de segon grau en dues dimensions. Altres obres tractaven del càlcul (inclòs el càlcul de variacions), la teoria de nombres, nombres imaginaris i àlgebra determinada i indeterminada. Euler, encara que principalment era matemàtic, va fer també aportacions a l'astronomia, la mecànica, l'òptica i l'acústica. Entre les seves obres es troben *Institucions del càlcul diferencial* (1755), *Institucions del càlcul integral* (1768-1770) i *Introducció a l'àlgebra* (1770).

L'extensió de la seva obra és immensa, i el seu mèrit és encara més gran si es té en compte la seva vida accidentada i, especialment, la seva ceguesa parcial en els anys finals de la seva existència.

El matemàtic suís Leonhard Euler.

Què és una funció lineal i quines en són les característiques?

> Una funció lineal o de proporcionalitat directa és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1 sense terme independent, del tipus $f(x) = ax$. La gràfica d'una funció lineal és una recta que passa per l'origen de coordenades. El nombre a rep el nom de *pendent de la recta.*

Una funció polinòmica és la que té per expressió un polinomi. L'estudi de les funcions polinòmiques s'efectua segons el grau del polinomi; per tant, s'ha de començar per les funcions que tenen per expressió polinomis de grau 1. Una funció lineal o de proporcionalitat directa és aquella l'expressió de la qual consisteix en el producte d'un nombre per la variable. És a dir, f és una funció lineal (o de proporcionalitat directa) si:

$$f(x) = ax \qquad \text{essent } a \text{ un nombre qualsevol}$$

Per exemple, són funcions lineals:

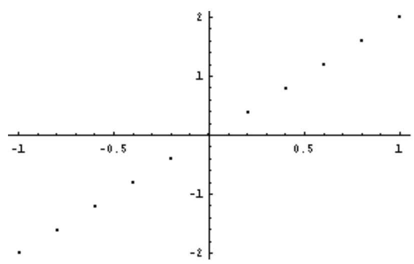
$$g(x) = 2x \qquad h(x) = 4x \qquad s(x) = -3x$$

El nombre que multiplica la variable es denomina *raó de proporcionalitat*. Així, la raó de proporcionalitat de la funció g és 2; la de la funció h és 4; la de s és –3.

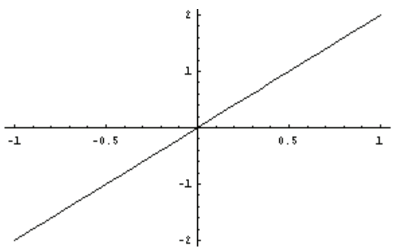
Per estudiar la forma de la gràfica d'una funció lineal, es pot crear, en primer lloc, una taula de la funció $g(x) = 2x$.

x	f(x)
–1	–2.
–0,8	–1,6
–0,6	–1,2
–0,4	–0,8
–0,2	–0,4
0,2	0,4
0,4	0,8
0,6	1,2
0,8	1,6
1	2.

Si es representen aquests punts, s'obté aquesta gràfica:



Fàcilment es pot observar com si es poguessin dibuixar tots els punts de la gràfica de la funció, el resultat seria una recta que contindria l'origen de coordenades.



En general, la gràfica de qualsevol funció lineal és una recta que passa per l'origen de coordenades. Es pot demostrar aquest fet, ja que qualsevol funció lineal és de la forma $f(x) = ax$, essent a un nombre real; si es busca la imatge del *0*, $f(0) = a \cdot 0 = 0$. És a dir, la imatge del 0 sempre ha de ser 0; després el punt (0,0) sempre pertany a la gràfica de la funció.

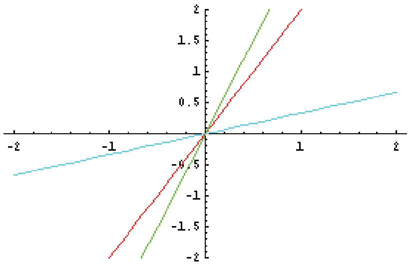
Així, doncs, per dibuixar una funció lineal qualsevol només s'han de seguir aquests passos:

- Es troba la imatge d'un valor qualsevol de la variable que no sigui el 0 (que ja sabem que és 0).
- Es marca el punt que correspon a aquest parell ordenat en el pla cartesià.
- Es traça la recta que passa pel punt (0,0) i pel punt anterior.

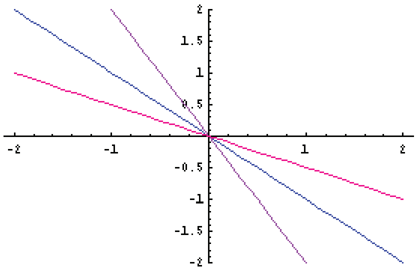
Aquesta recta ha de ser la gràfica de la funció lineal.

La gràfica de qualsevol funció s'ha de mirar d'esquerra a dreta. Dit això, si dibuixem diverses funcions lineals, com les següents $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -1/2 \cdot x$, $s(x) = 1/3 \cdot x$, $t(x) = 2x$ i $r(x) = 3x$, es pot observar com varia la inclinació o pendent de la recta:

- Si la raó de proporcionalitat és positiva, la recta creix amb més rapidesa com més gran és la raó.



- Si la raó de proporcionalitat és negativa, la recta decreix amb més rapidesa com més petita és la raó.



Per això, a la raó de proporcionalitat també se la denomina *pendent de la recta*, a causa de l'estreta relació entre aquest valor i la inclinació o pendent de la gràfica.

Què és una funció afí i quines en són les característiques?

> Una funció afí és una funció polinòmica l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1, del tipus $f(x) = ax + b$. La gràfica d'una funció lineal és una recta. El nombre a rep el nom de *pendent de la recta* i informa de la inclinació d'aquesta.

Una funció afí té per expressió algebraica un polinomi de primer grau:

$$f(x) = ax + b$$

essent a i b dos nombres reals qualssevol.

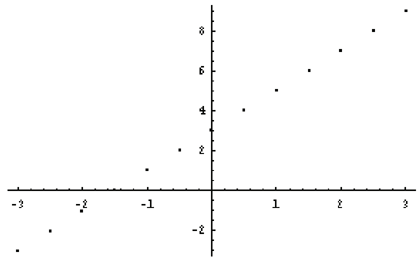
Així, doncs, l'única modificació amb la funció lineal és que la funció afí afegeix el terme independent al terme de grau 1. Per exemple, són funcions afins:

$$g(x) = 3x - 2 \qquad h(x) = 2x - 7$$

El coeficient de la variable, *a*, es denomina *pendent*, igual que en el cas de la funció lineal, mentre que l'altre nombre, *b*, es denomina *terme independent.*

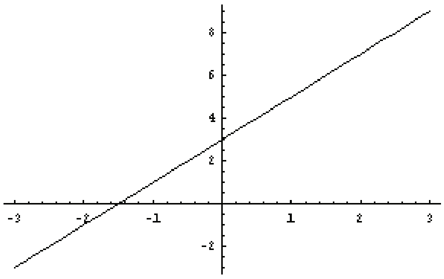
Si es representen diferents punts d'una funció afí, es pot arribar a deduir la forma de la seva gràfica. Per exemple, si es construeix una taula de la funció $f(x) = 2x + 3$, la representació resultant serà la següent:

x	$f(x)$
–3	–3
–2,5	–2
–2	–1
–1,5	0
–1	1
–0,5	2
0	3
0,5	4
1	5
1,5	6
2	7
2,5	8
3	9



Sembla evident que la gràfica d'aquesta funció ha de ser una recta, i en aquest cas concret no passa per l'origen de coordenades.

Una vegada conegut aquest fet, és fàcil representar una funció afí a partir de la seva expressió algebraica:



- Es busquen dos parells ordenats que pertanyin a la gràfica de la funció.
- Es representen aquests punts en el pla cartesià.
- S'uneixen els punts mitjançant una recta.

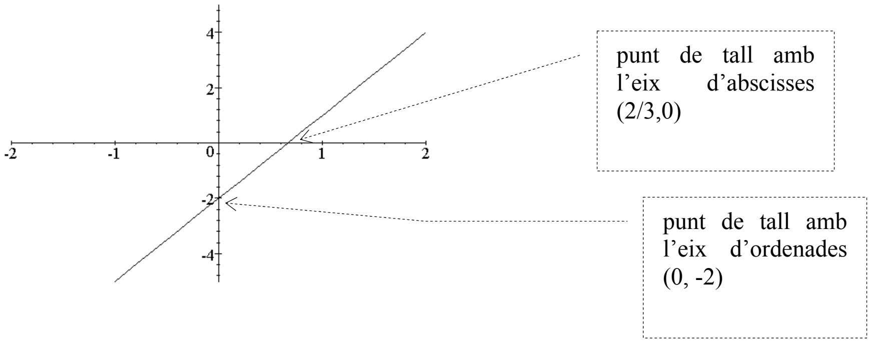
Aquesta recta ha de ser la gràfica de la funció afí.

En la gràfica d'una funció afí, *f*, s'han de destacar dos punts:

- La intersecció de la recta amb l'eix d'ordenades, que es pot trobar fent $f(0)$. El punt en qüestió serà, doncs, $(0, f(0))$. Per exemple, la intersecció de $f(x) = 3x - 2$ amb l'eix d'ordenades és $(0, f(0))$, és a dir, $(0, -2)$. Es pot observar que $f(0)$ és, sempre, el terme independent de l'expressió de la funció afí.

- La intersecció de la recta amb l'eix d'abscisses, que es pot trobar resolent $f(x) = 0$; si x' és la solució d'aquesta equació, el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses serà $(x',0)$. Per exemple, la funció $3x - 2$ talla l'eix d'abscisses en un punt la coordenada d'ordenades del qual compleix $f(x) = 0$, és a dir, $3x - 2 = 0$; resolent aquesta equació $x = 2/3$. El punt d'intersecció és, doncs, $(2/3,0)$.

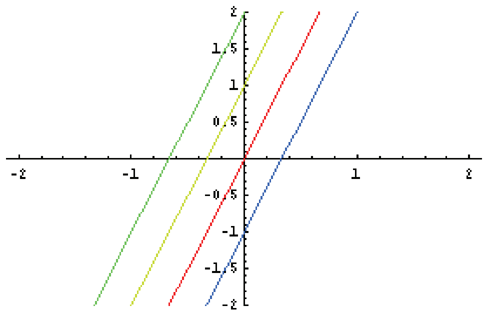
El gràfic següent mostra tots dos punts d'intersecció.



Aquestes funcions:

$(x) = 3x$ $\quad$ $g(x) = 3x + 1$ $\quad$ $h(x) = 3x + 2$ $\quad$ $s(x) = 3x - 1$

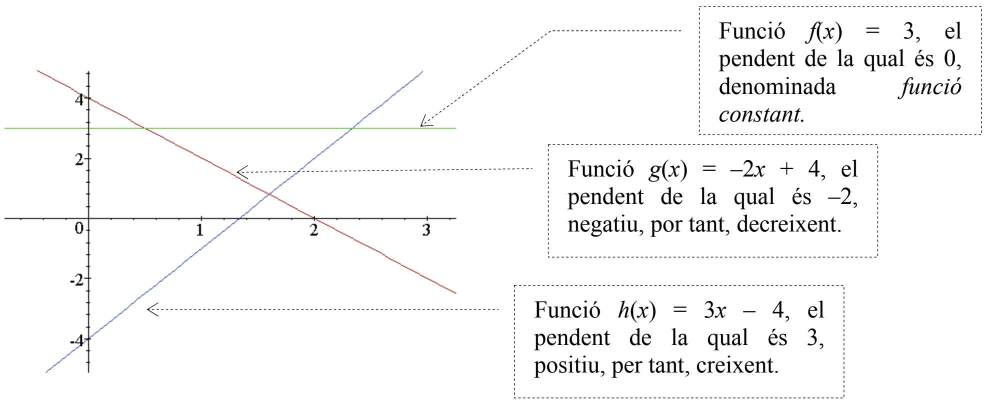
tenen el mateix pendent; si observem la seva representació comprovarem que són rectes paral·leles:



És a dir, l'única modificació gràfica que s'observa al canviar el terme independent d'una funció consisteix en el desplaçament paral·lel de la recta. A més, es pot observar que una funció lineal no és més que una funció afí el terme independent de la qual és 0, o bé és aquella funció afí que passa per l'origen.

D'aquesta manera podrem observar que les funcions afins poden, o bé mantenir-se paral·leles a l'eix X, o bé anar creixent a mesura que desplacem la vista cap a la dreta, o bé anar decreixent a mesura que desplacem la vista cap a la dreta.

A més, les funcions afins que van creixent a mesura que es desplaça la vista cap a la dreta, denominades *funcions creixents*, són aquelles que tenen el pendent positiu. En canvi, les funcions afins que van decreixent a mesura que desplacem la vista cap a la dreta, denominades *funcions decreixents*, són aquelles que tenen el pendent negatiu. Evidentment, les funcions afins que són paral·leles a l'eix X tenen el pendent igual a 0. En aquest gràfic observem una funció creixent, una decreixent i una paral·lela a l'eix X.



En definitiva, una funció és creixent quan, a mesura que augmenta el valor de la x, també augmenta el valor de la y. De manera semblant, una funció és decreixent quan, a mesura que augmenta el valor de la x, disminueix el valor de la y. Finalment, una funció és constant quan el valor de la y no canvia en variar el valor de la x.

De vegades és necessari descobrir la funció afí que conté dos punts determinats. Vegem com es fa seguint un exemple: suposem que volem trobar una funció afí la gràfica de la qual conté els punts $(1, -1)$ i $(-2, -7)$.

Es denomina a el pendent de la funció i b el seu terme independent. D'aquesta manera, l'expressió d'aquesta funció ha de ser $f(x) = ax + b$. S'ha de buscar un sistema d'equacions per trobar a y b:

Com que el punt $(1, -1)$ és de la gràfica de la funció: $f(1) = -1$, és a dir, $a + b = -1$. Com que el punt $(-2, -7)$ és de la gràfica de la funció: $f(-2) = -7$, és a dir, $-2a + b = -7$.

Es resol el sistema que ha sorgit de les condicions anteriors:

$$\begin{aligned} a + b &= -1 \\ -2a + b &= -7 \end{aligned}$$

les solucions de les quals $a = 2$ i $b = -3$. En aquest cas, doncs: $f(x) = 2x - 3$.

Què és una funció quadràtica i quines en són les característiques?

> Una funció quadràtica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 2. La seva representació és una paràbola, els elements essencials de la qual són l'eix de simetria, el vèrtex i les branques.

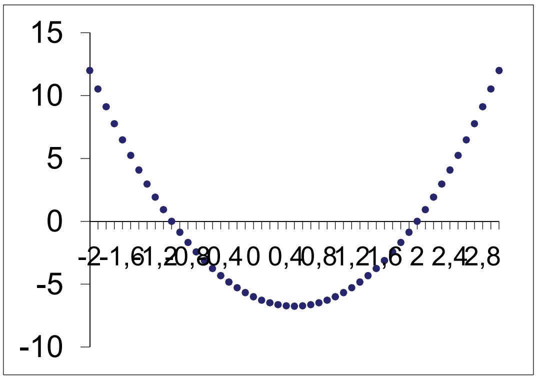
L'expressió d'una funció quadràtica correspon a un polinomi de 2n. grau amb una única variable. Per exemple, són funcions quadràtiques:

$f(x) = 3x^2 + 2x - 2.$

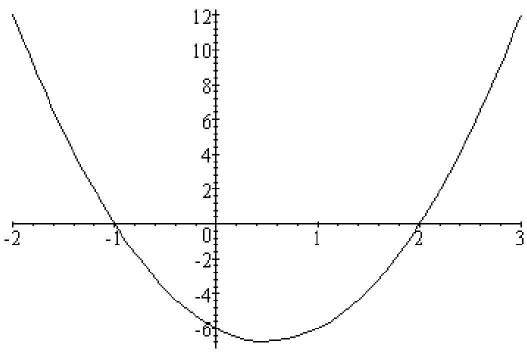
$g(x) = x^2 + 5$

x	*f(x)*
...	...
–0,5	–3,75
–0,4	–4,32
–0,3	–4,83
–0,2	–5,28
–0,1	–5,67
0	–6.
0,1	–6,27
0,2	–6,48
0,3	–6,63
0,4	–6,72
0,5	–6,75
0,6	–6,72
0,7	–6,63
0,8	–6,48
0,9	–6,27
1	–6.
1,1	–5,67
1,2	–5,28
1,3	–4,83
1,4	–4,32
1,5	–3,75
...	...

Per representar una funció quadràtica, construirem primer una taula amb alguns dels valors de la funció. Al marge hi ha una taula de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. No s'han inclòs més valors en la taula perquè seria massa extensa; s'han utilitzat més punts de la funció per fer la representació de la dreta.



És fàcil deduir que la representació completa de la funció quadràtica $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, en l'interval [–2,3] és aquesta:



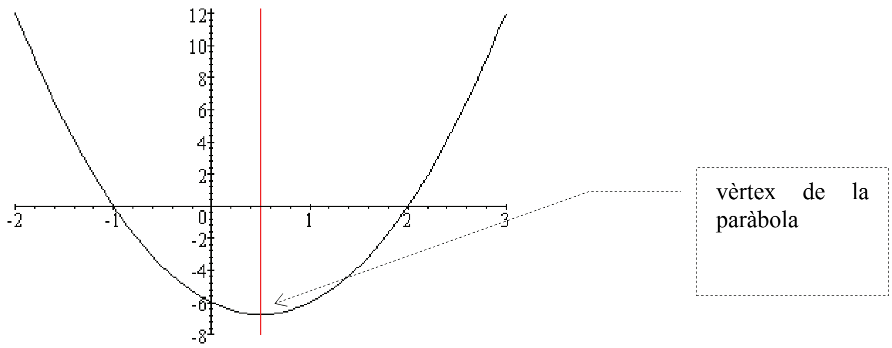
Aquest tipus de corba es denomina *paràbola*. Els elements més destacats d'una paràbola són:

L'eix de simetria
El valor de la funció anterior quan $x = 0,5$ és –6,75; podem comprovar que la imatge dels valors de x equidistants de 0,5 són:

x	$f(x)$
0,4	–6,72
0,3	–6,63
0,2	–6,48
0,1	–6,27
0	–6.
–0,1	–5,67
–0,2	–5,28
–0,3	–4,83
–0,4	–4,32
–0,5	–3,75

x	$f(x)$
0,6	–6,72
0,7	–6,63
0,8	–6,48
0,9	–6,27
1	–6.
1,1	–5,67
1,2	–5,28
1,3	–4,83
1,4	–4,32
1,5	–3,75

És a dir, a banda i banda de $x = 0,5$, els valors de la funció es repeteixen. Aquest fet es pot observar també visualment, dibuixant una recta perpendicular a l'eix X que passi per $x = 0,5$; la part de la gràfica que queda a l'esquerra d'aquesta recta és la imatge reflectida de la part dreta. Aquesta propietat es denomina *simetria.* Així, una paràbola és sempre simètrica respecte d'una recta, denominada *eix de simetria.*



El vèrtex
La intersecció entre la paràbola i l'eix de simetria es denomina *vèrtex de la paràbola*. A l'exemple, el vèrtex de la paràbola coincideix amb el punt de coordenada $x = 0,5$, i coordenada $y = –6,75$, és a dir, el punt (0,5,–6,75).
En general, el vèrtex de la paràbola que representa la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, té com a coordenada d'abscisses:

$$x = –b/2a$$

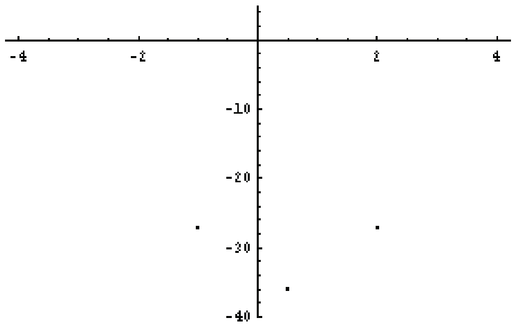
a l'exemple, essent $f(x) = 3x^2 – 3x – 6$, sabem que $a = 3$, $b = –3$ i $c = –6$; per tant, la coordenada x del vèrtex és $x = –(–3)/(2 \cdot 3) = 0,5$, tal com ja havíem anunciat.

Les branques
A partir del vèrtex de la paràbola, aquesta es desenvolupa en dos traços simètrics, cadascun dels quals es denomina *branca.* En el cas de l'exemple, les dues branques es dirigeixen cap amunt, però en altres casos es podrien dirigir cap avall.

Com es construeix la gràfica d'una funció quadràtica?

Per trobar la gràfica d'una funció quadràtica s'ha de buscar, en primer lloc, el vèrtex d'aquesta gràfica. A continuació, s'han de buscar parells de punts equidistants del vèrtex; com més parells de punts es trobin, més precisa serà la representació de la paràbola. A més, en tota paràbola és convenient assenyalar els punts de talls amb els eixos.

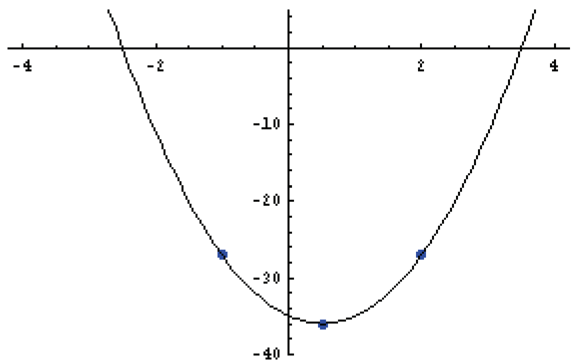
Donada l'expressió d'una funció quadràtica, aquests són els passos per aconseguir la seva representació en el pla cartesià:



1. Es troba el vèrtex de la paràbola, que té com coordenada $x = -b/2a$. Per exemple, si es vol representar la funció quadràtica $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$, el seu vèrtex té coordenada $x = 4/(2 \cdot 4) = 1/2$, la coordenada de la qual y serà $f(x) = 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 35 = -36$. Per tant, el vèrtex és (1/2, –36).

2. Es troben diferents parells de punts de la funció que tinguin la coordenada x equidistant respecte de la coordenada x del vèrtex, i es representen aquests punts juntament amb el vèrtex. N'hi ha prou de representar dos punts equidistants del vèrtex per fer-nos una idea de la forma de la paràbola. Per exemple, dos nombres equidistants de –1, podrien ser el –1 i el 2; les seves imatges són: $f(-1) = f(2) = -27$ (ja sabem que valors equidistants de la coordenada x del vèrtex tenen la mateixa imatge).

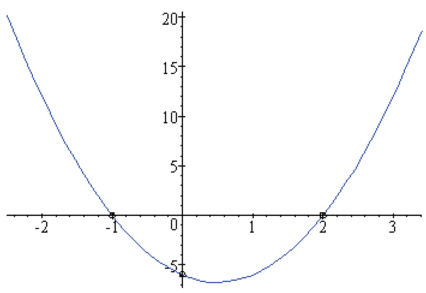
3. S'uneixen aquests punts mitjançant una corba parabòlica: el vèrtex no ha de ser de forma punxeguda, sinó arrodonida; a més, les branques de la paràbola s'han d'elevar (o dirigir cap a avall) de manera que sempre es vagin obrint més i més. Aquesta és la representació de la paràbola de l'exemple:



En tot cas, hi ha molts programes informàtics que permeten representar de manera més precisa una paràbola a partir de la seva expressió algebraica.

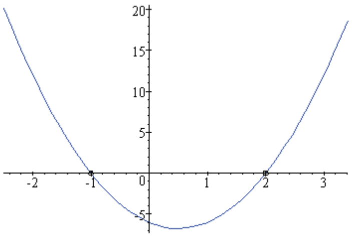
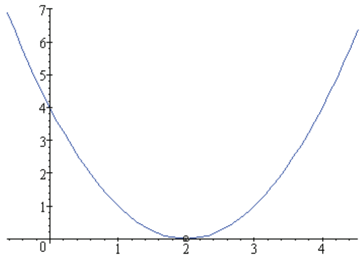
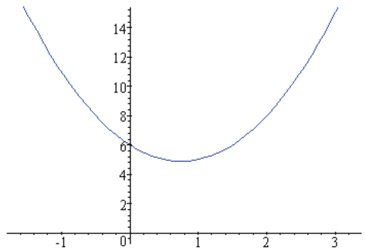
Juntament amb el vèrtex, altres punts importants d'una paràbola són les interseccions d'aquesta amb els eixos coordenats.

- Tota paràbola té una única intersecció amb l'eix d'ordenades; per trobar-la n'hi ha prou de calcular la imatge de $x = 0$; el punt intersecció serà $(0, f(0))$. Per exemple, en el cas de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $f(0) = -6$. Així, doncs, la intersecció de la paràbola amb l'eix Y serà (0, –6).



Per trobar la intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses, s'ha d'igualar la funció a 0; d'aquesta manera s'obté una equació de segon grau, denominada *equació associada a la funció quadràtica*. En el cas de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, la intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses es troba resolent $3x^2 - 3x - 6 = 0$. En aquest cas, les solucions són $x = -1$ i $x = 2$. Per tant, la paràbola talla l'eix en (–1,0) i (2,0). En aquesta il·lustració es poden observar tots els punts de tall de la funció $f(x)$ amb els eixos.

És sabut que una equació de segon grau pot tenir dos, una o cap solució; les interseccions d'una funció quadràtica amb l'eix X es corresponen amb les solucions de l'equació associada. Per tant, una paràbola pot tenir dues, una o cap intersecció amb l'eix X. Gràficament, aquests casos es corresponen amb les representacions següents:

D’esquerra a dreta, estan representades les funcions $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$ i $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$:

- La funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ talla l’eix X en dos punts perquè l’equació $3x^2 - 3x - 6 = 0$ té dues solucions: $x = -1$, $x = 2$.
- La funció $g(x) = x^2 - 4x + 4$ talla l’eix X en un sol punt perquè l’equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució: $x = 2$.
- La funció $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$ no talla l’eix X perquè l’equació $2x^2 - 3x + 6 = 0$ no té cap solució.

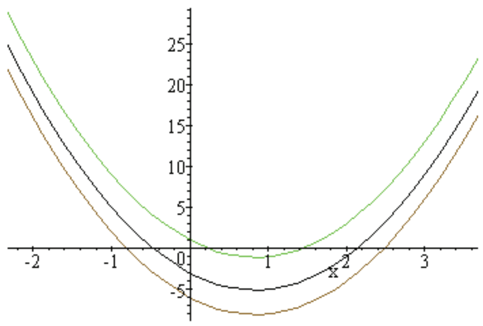
És a dir, si una paràbola talla en dos punts l’eix X, l’equació de 2n. grau associada a la funció quadràtica té dues solucions; si talla en un únic punt, l’equació té una única solució; si, en canvi, no talla en cap punt, l’equació no té cap solució.

Quina relació hi ha entre l’expressió de la funció quadràtica i la paràbola que en resulta?

> Els canvis més evidents en modificar els coeficients de l’expressió d’una funció quadràtica són els següents: si s’augmenta el terme independent de la funció, la paràbola es desplaça cap amunt; si canvia de signe el coeficient de grau 2, s’inverteixen les branques de la paràbola; si s’augmenta, en valor absolut, aquest coeficient, les branques de la paràbola tendeixen a tancar-se.

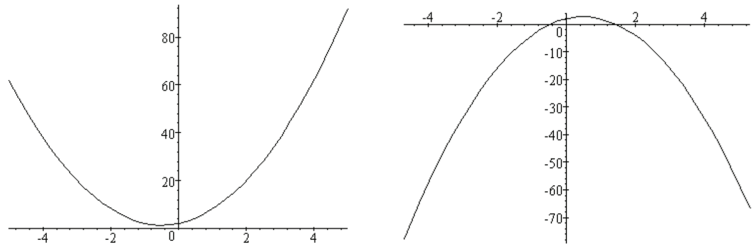
Si es modifiquen els coeficients d’una funció quadràtica, la paràbola resultant reflecteix aquestes modificacions:

- La modificació del terme independent d’una funció quadràtica provoca el desplaçament vertical de tota la paràbola: si el terme augmenta, la paràbola s’eleva; si el terme disminueix, la paràbola descendeix. Per exemple, si $f(x) = 3x^2 - 5x - 3$, i es representa juntament amb $g(x) = 3x^2 - 5x + 1$ i $h(x) = 3x^2 - 5x - 6$ observarem el següent:



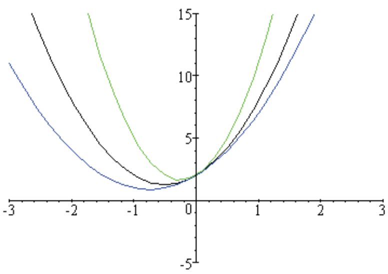
és a dir, si s’augmenta el terme independent, la paràbola s’eleva; en cas contrari, descendeix, tal com s’havia afirmat.

- El coeficient de grau 2 pot tenir signe positiu o negatiu. Si el terme és positiu, les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt, si és negatiu, es dirigeixen cap avall, tal com s'observa en aquesta il·lustració:



Funcions $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$ i $g(x) = -3x^2 + 3x + 2$

La modificació del valor absolut del coeficient de grau 2 també produeix, bàsicament, un canvi regular en la paràbola: si el valor absolut d'aquest coeficient disminueix, les branques de la paràbola se separen; en canvi, si el valor absolut del coeficient augmenta, les branques de la paràbola s'acosten, com es pot observar en la il·lustració. És clar que el vèrtex també canvia en modificar-se el coeficient de grau 2.



Funcions $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$ i $h(x) = 6x^2 + 3x + 2$

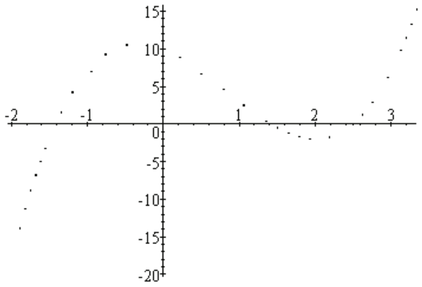
Què és una funció polinòmica i quines en són les característiques?

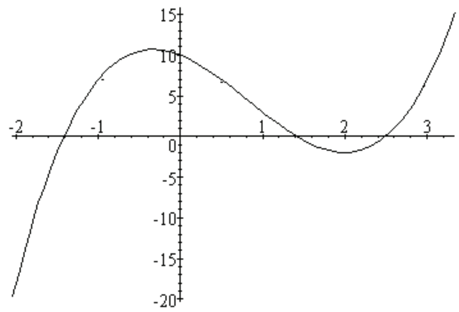
> Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi; per això, de vegades, es denomina simplement *polinomi.* En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central. En la part central la funció polinòmica es plega diverses vegades, com a molt, tantes com el grau del polinomi.

Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi; per això, de vegades, es denomina simplement *polinomi.* Las funcions afins i les funcions quadràtiques són exemples de funcions polinòmiques. Ara bé, també hi ha funcions polinòmiques de major grau. Un exemple de funció polinòmica de grau 3 és:

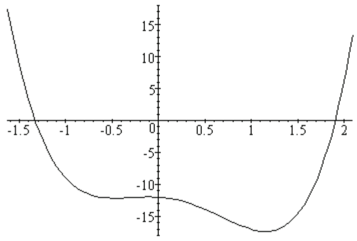
$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$$

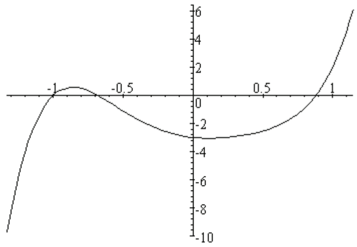
Per fer la gràfica d'aquesta funció podem crear una taula amb un bon nombre de punts i, posteriorment, representar-los. Una representació d'una taula d'aquesta funció (que no s'afegeix per la seva extensió) i la gràfica dibuixada d'un sol traç en l'interval [–2,3] són:

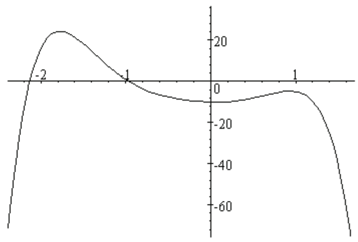




altres exemples de gràfiques de funcions polinòmiques són:







corresponents a les funcions:

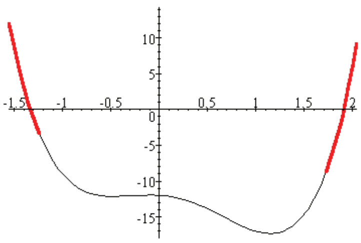
$f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 12$ $\qquad$ $g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$
$h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$

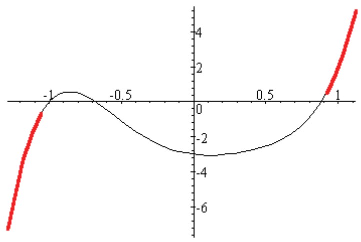
Normalment, es poden diferenciar, de manera genèrica, dues zones en la gràfica d'una funció polinòmica:

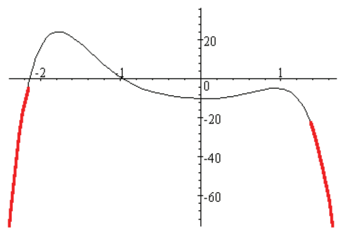
- Les branques

No són mai arriben a ser completament rectes, tot i que poden semblar-ho quan el domini representat és molt gran. Poden dirigir-se ambdues cap amunt, ambdues cap avall, o bé, una branca cap amunt i una altra cap avall. Si es representés la gràfica d'un polinomi en un interval major, la forma de les branques pràcticament no variaria; és a dir, les branques d'una gràfica ens donen una idea de com continua la gràfica d'una funció polinòmica més enllà de la part representada. Aquests exemples mostren les branques de les gràfiques anteriors:

Les branques de la funció $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 12$ es dirigeixen ambdues cap







amunt; té 3 plecs en la part central.

Les branques de la funció $g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$ es dirigeixen una cap avall i l'altra cap amunt; té 2 plecs.

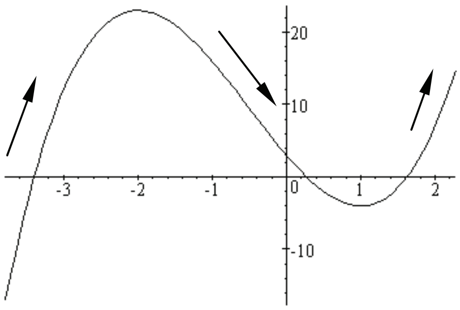
Les branques de la funció $h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$ es dirigeixen ambdues cap avall; té 3 plecs.

N'hi haurà prou amb unes normes senzilles per conèixer cap a on s'han de dirigir les branques d'una funció polinòmica:

➢ La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.

➢ La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall bé quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.

- La part central

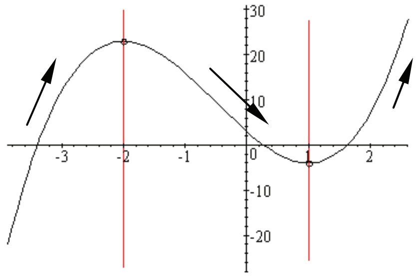


En aquesta part la gràfica es plega diverses vegades; el nombre de plecs depèn del grau del polinomi (com més gran sigui, la gràfica en pot tenir més). El màxim de plecs d'una funció polinòmica és el seu grau menys 1; així, com sabem, un polinomi de grau 1 no pot tenir cap plec; en canvi, un polinomi de grau dos té exactament un plec; un polinomi de grau 3 té dos plecs i un de grau 4, com a màxim 3.

Com sabem, la gràfica d'una funció s'ha de contemplar d'esquerra a dreta. Així, per exemple, observant la gràfica del marge, corresponent $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, comprovem que al principi la funció es dirigeix cap amunt, després cap avall i, finalment, una altra vegada cap amunt. De manera més rigorosa podem dir:

- La funció es denomina *creixent* quan, a mesura que augmenta la x, el valor de la funció també augmenta.

- La funció es denomina *decreixent* quan, a mesura que augmenta la x, el valor de la funció disminueix.

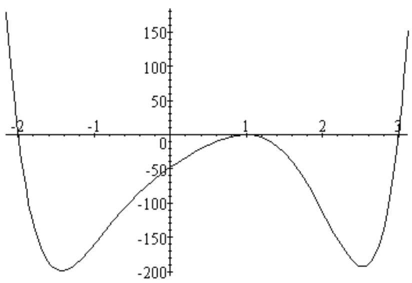


Així, doncs, en l'exemple anterior, la funció és creixent quan x és menor que -2, és decreixent entre -2 i 1, i torna a ser creixent a partir d'1, com mostra la il·lustració.

Els punts més destacats d'una gràfica són:

- Els extrems (màxims i mínims): denominem *màxim relatiu d'una funció* el punt en què la funció passa de ser creixent a ser decreixent; el valor de la funció en aquest punt és més gran que el de qualsevol altre punt de la gràfica que es trobi a prop. En canvi, un mínim relatiu d'una funció és aquell punt en el qual la funció passa de ser decreixent a ser creixent; el valor de la funció en aquest punt és menor que el de qualsevol altre punt de la gràfica que es trobi proper. Per exemple, en la funció anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, podem observar en la gràfica que un màxim relatiu es troba en $(-2, f(-2))$, és a dir, $(-2, 23)$; mentre que es troba un mínim en $(1, f(1))$, és a dir, $(1, -4)$.

- La intersecció amb l'eix Y: evidentment, només hi ha un punt intersecció entre la gràfica d'un polinomi i l'eix Y. Aquest punt és el que té coordenada $x = 0$. Per exemple, si $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$, el punt d'intersecció d'aquesta funció amb l'eix Y és $(0, f(0))$, és a dir, $(0, 10)$.



- La intersecció amb l'eix X: en aquest cas hi pot haver un nombre d'interseccions igual al grau del polinomi (encara que no sempre s'arriba a aquest nombre). Per trobar els punts d'intersecció s'ha de resoldre l'equació $f(x) = 0$, cosa que, en general, és difícil. Els valors de x que compleixen que $f(x) = 0$ es denominen *arrels del polinomi $f(x)$*. Un polinomi que tingui arrels es descompon com a producte de polinomis, alguns dels quals seran de grau 1. Per exemple, el polinomi $f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4$ té com a arrels 1, 3 i -2; la seva descomposició serà la següent:

$f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4 = 2(x-1)^2(x-3)(x+2)(2x^2 + x + 4)$

es pot comprovar com l'1 és una arrel doble en la gràfica adjunta.

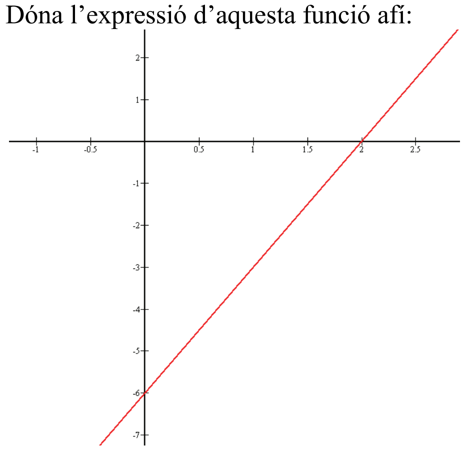
Exercicis

1. Sabem que una funció lineal compleix que $f(4) = 12$. Quina és aquesta funció?

2. Una funció afí compleix que $f(2) = 5$ i $f(0) = 1$, quina és l'expressió d'aquesta funció?

3. Hi ha cap funció lineal que compleixi que $f(2) = -4$ i $f(-5) = -10$?

4. Dóna l'expressió d'aquesta funció afí:

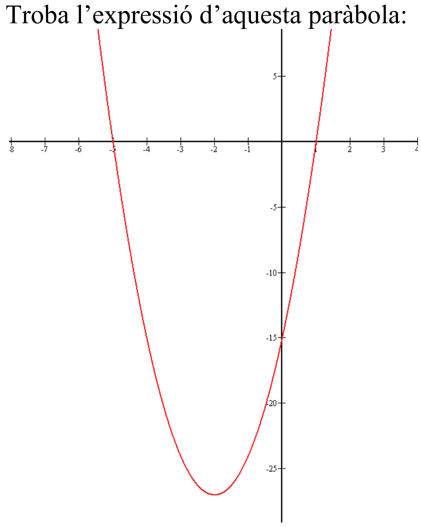


5. Troba el vèrtex de la paràbola: $f(x) = 3x^2 - x + 1$.

6. Troba l'expressió d'una paràbola que compleixi:
   $f(1) = 2$
   $f(-2) = 11$
   $f(0) = 1$

7. Troba l'expressió d'una paràbola, $f(x)$, que té una arrel a $x = 2$ i el seu vèrtex a $x = -1$. A més, el valor al vèrtex és $f(-1) = -27$.

8. Troba l'expressió d'aquesta paràbola:



9. Troba el domini i els punts de tall amb els eixos (si n'hi ha), de les següents funcions:
    a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
    b. $g(x) = 1/x$
    c. $h(x) = 3$
    d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
    e. $b(x) = \sqrt{x + 1}$
    f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
    g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

Solucions

1. $f(x) = ax$, per tant, si $f(4) = 12$, aleshores, $a = 3$.

2. La funció ha de ser $f(x) = ax + b$, per tant, si $f(2) = 5$ i $f(0) = 1$
   $2a + b = 5$
   $b = 1$
   per tant, $a = 2$. Així la funció és $f(x) = 2x + 1$.

3. La funció ha de ser $f(x) = ax + b$, per tant si $f(2) = -4$ i $f(-5) = -10$, aleshores:
   $2a + b = -4$
   $-5a + b = -10$
   si restem les equacions comprovem que $-7a = -6$. Per tant, $a = \frac{6}{7}$.
   Substituint a les dues equacions anteriors comprovem que $b = -\frac{40}{7}$. Per tant, la funció és $f(x) = \frac{6}{7}x - \frac{40}{7}$.

4. La funció passa pels punts (0,-6) i (2,0), per tant, $f(0) = -6$ i $f(2) = 0$. Fent un procediment semblant a l'anterior i resolent el sistema resultant, la funció resultant és: $f(x) = 3x - 6$.

5. Usant la fórmula del vèrtexs obtenim que és el punt $(\frac{1}{6}, \frac{11}{12})$.

6. Si la paràbola és $f(x) = ax^2 + bx + c$, usant que $f(0) = 1$ ja podem assegurar que $c = 1$. Si apliquem les altres dues condicions:
   $\begin{matrix} f(1) = 2 \\ f(-2) = 11 \end{matrix}$ obtenim que $\begin{matrix} a + b + 1 = 2 \\ 4a - 2b + 1 = 11 \end{matrix}$
   i resolent el sistema obtenim que l'expressió és $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

7. En aquest cas, la paràbola és $f(x) = a(x-2)(x-b)$. Sabem que les arrels són equidistants del vèrtex, per tant, si l'arrel 2 es troba a 3 unitats del vèrtex -1, l'altra arrel també es trobarà a la mateixa distància. Per tant, l'altra arrel és $x = -4$. D'aquesta manera, podem assegurar que la funció és $f(x) = a(x-2)(x+4)$. Si, a més, $f(-1) = -27$, aleshores, és fàcil deduir que $a = 3$ i, per tant, $f(x) = 3(x-2)(x+4)$.

8. Només cal adonar-se que passa per (-5,0), (1,0) i (0,-15). Resolent el sistema resultant, obtenim que $f(x) = 3(x-1)(x+5)$.

9.
   a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
      El domini és tota la recta real perquè és un polinomi.
      Els punts de tall són:
      Eix Y: Si $x = 0$, $f(x) = 1$, per tant, (0,1)
      Eix X: $f(x) = 0 \rightarrow x = 1$, per tant, (1,0)
   b. $g(x) = 1/x$
      El domini es tota la recta real excepte els números que anul·len el denominador, és a dir, menys 0. Així $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
      Els punts de tall són:

Eix Y: Ja que x no pot ser 0, no existeixen.
Eix X: Si $g(x) = 0$ --> no existeix cap x que ho compleixi. Per tant, no hi ha punts de tall.

c. $h(x) = 3$
El domini és tota la recta real, perquè qualsevol número té la imatge igual a 3..
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $h(x) = 3$, per tant (0,3)
Eix X: $h(x)$ no pot ser mai 0.

d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
El domini es tota la recta real, excepte aquells nombres que anul·len el denominador. per tant, el domini és R\{-2}
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $a(0) = -1/2$, per tant, (0,-1/2)
Eix X: si $a(x) = 0$ --> $x^2 - 1 = 0$ --> $x = 1$, o be, $x = -1$. Per tant, (1,0), (-1,0)

e. $b(x) = \sqrt{x+1}$
L'interior de l'arrel ha de ser positiu, per tant, $x + 1 \geq 0$, és a dir, $x \geq -1$. Així, el domini és $[-1,+\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: Si $x = 0$ --> $b(0) = 1$, per tant, (0,1)
Eix X: Si $b(x) = 0$ --> $x+1=0$ --> $x = -1$, per tant, (-1,0)

f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
Com en el cas anterior, $x^2-1 \geq 0$, per tant, el domini és $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $c(0)$ no existeix, per tant, no hi ha punts de tall,

Eix X: si $h(x) = 0$ --> $x = 1$ ó $x = -1$, per tant, (-1,0) (1,0).

g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$
En aquest cas s'ha d'acomplir: $x^2-4 \geq 0$, és a dir, x ha de pertànyer a $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
a més, $x+5$ no ha de ser 0, d'aquí que x no pugui ser -5.
En definitiva, el domini és: $(-\infty, -5) \cup (-5,-2] \cup [2, \infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> no es possible.
Eix X: $d(x) = 0$ --> $x = -2$ ó $x = 2$. Per tant, (2,0), (-2,0)