# Expressions algebraiques

# Expressions algebraiques

| | |
|---|---|
| **Les expressions algebraiques** | |
| **Elements d'una expressió algebraica** | Nombres de qualsevol tipus |
| | Lletres |
| | Signes d'operació: sumes, restes, multiplicacions i divisions |
| **Exemples** | $a + 1$<br>$21a + 4b$<br>$2x - 6y + z$ |
| **Valor numèric d'una expressió algebraica** | Es troba substituint les seves lletres per nombres i obtenint-ne el resultat. El valor numèric d'una expressió algebraica depèn dels valors concrets que rebin les lletres.<br>Per exemple, el valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$, quan $x = 5$ i $y = 2$ , és $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$. |
| **Utilitat d'una expressió algebraica** | Simplificar una situació real en la qual s'han de fer operacions entre quantitats conegudes i quantitats desconegudes. |
| **Igualtat entre expressions algebraiques** | |
| **Elements d'una igualtat** | Dues expressions algebraiques, denominades *membres.* |
| | Un signe igual, = , interposat entre ambdues. |
| **Tipus d'igualtats** | Certa: si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra pot convertir-se en la de la dreta, aplicant les propietats de les operacions. Per exemple: $a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$ |
| | Falsa: si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra no es pot convertir en la de la dreta. Per exemple:<br>$4a - 5b + 2 = 4a - 5b + 7$. |
| **Equacions** | |
| **Definició** | Igualtats entre expressions algebraiques, especialment aquelles la falsedat o certesa de les quals no es pot establir a priori. |
| **Solució d'una equació** | Valors numèrics que transformen l'equació en una igualtat entre expressions numèriques vertaderes. Per exemple, si se substitueixen les incògnites de $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ per 2 en el cas de la $x$ , i per 1 en el cas de la $y$, obtindrem, $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, i ambdós membres resulten 3. |
| **Equacions equivalents** | Equacions que tenen exactament les mateixes solucions. |

| **Propietats de les expressions algebraiques** | |
|---|---|
| **Propietats de la suma** | |
| **Propietat commutativa** | El resultat de sumar dos nombres en qualsevol ordre és sempre el mateix: $a + b = b + a$. |
| **Propietat associativa** | Si se sumen tres nombres qualssevol, es poden agrupar com es vulgui: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ |
| **Element neutre de la suma** | L'element neutre de la suma de nombres és el 0, ja que si se suma aquest nombre a qualsevol altre nombre, el resultat és el mateix nombre: $a + 0 = a$. |
| **Element oposat** | L'element oposat de $c$ és $-c$, ja que $c + (-c) = 0$. |
| **Propietats de la multiplicació** | |
| **Propietat commutativa** | Dos nombres es poden multiplicar en qualsevol ordre, i el resultat sempre és el mateix: $a \cdot b = b \cdot a$. |
| **Propietat associativa** | Si es multipliquen tres nombres qualssevol, es poden agrupar com es vulgui, perquè el resultat sempre és el mateix: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. |
| **Element neutre de la multiplicació** | L'element neutre de la multiplicació és l'1, ja que si es multiplica qualsevol nombre per 1, el resultat sempre és el mateix nombre inicial: $a \cdot 1 = a$. |
| **Element invers** | L'element invers d'un nombre qualsevol (que no sigui 0) és aquell nombre que multiplicat amb aquest dóna 1 (l'element neutre de la multiplicació): l'element invers de $c$ és $(1/c)$, ja que $c \cdot (1/c) = 1$. |
| **Propietat distributiva de la suma respecte del producte** | |
| $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. | |
| **La resta i la divisió** | |
| **La resta** | Les propietats de la resta són semblants a les de la suma: només s'ha de recordar que la resta és la suma amb l'oposat: $a - b = a + (-b)$ |
| **La divisió** | Les propietats de la divisió són semblants a les de la multiplicació; només s'ha de recordar que la divisió és una multiplicació per l'invers (essent $b \neq 0$): $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ |
| **L'aplicació de les propietats** | |
| **Utilitat** | S'utilitzen per a simplificar expressions algebraiques. |
| **Exemple** | Aplicant les propietats de les operacions, es pot arribar a la conclusió que: $a - 4b - 2a + 5a - b$ és igual a $4a - 5b$ |

## Què és una expressió algebraica i quina és la seva utilitat?

> Una expressió algebraica conté nombres, lletres i signes d'operació. Les lletres d'una expressió algebraica s’han de tractar com si fossin nombres, i per això es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, seguint les mateixes regles que els nombres. Les expressions algebraiques permeten expressar operacions entre quantitats desconegudes, substituint el valor desconegut per una lletra.

Igual que una expressió numèrica, una expressió algebraica conté nombres i signes d'operació entre ells. Ara bé, una expressió algebraica també introdueix lletres, que operen entre si o amb altres nombres. Un exemple d'expressió algebraica és:

$$a - 23 \cdot c + 5 \cdot d - 7 \cdot a \cdot y$$

Les lletres d'una expressió algebraica s’han de tractar com si fossin nombres: es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, complint, com veurem, les mateixes propietats de les operacions entre nombres.

Les expressions algebraiques es poden usar en problemes reals, en els quals es desconeix el valor d'algun element. Així, per exemple, si una persona va a comprar i adquireix 3 kg de llimones a 1,09 € el kg, i 2 kg de patates a 0,78 € el kg, per a calcular el valor de la compra, és evident que s’ha de fer:

$$3 \cdot 1{,}09 + 2 \cdot 0{,}78$$

Ara bé, si no es coneix els kg de llimones, ni els kg de patates, es pot associar cada valor a una lletra (sempre que sigui possible, relacionada amb el nom; per exemple, $l$ per a les llimones, i $p$ per a les patates); el valor de la compra seria igual a:

$$3 \cdot l + 2 \cdot p$$

Aquesta expressió algebraica permet calcular el valor de la compra en el moment en què es coneguin els preus de les llimones i de les patates, substituint les dues lletres pels seus valors reals. Normalment, en multiplicar un nombre per una lletra no es posa el signe de multiplicació, sinó que se sobreentén que es tracta d'un producte, de manera que l'expressió algebraica anterior també es pot escriure com:

$$2l + 3p$$

Les lletres d'una expressió algebraica també es poden substituir per nombres. Per exemple, en l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ es pot substituir la lletra $x$ pel valor 3, i la lletra $y$, pel valor 4. En aquest cas, l'expressió algebraica es transforma en:

$$4\cdot\underset{\underset{x}{\uparrow}}{3} - 2\cdot\underset{\underset{y}{\uparrow}}{4} + 6$$

El valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ quan la $x$ és 3 i $y$ és 4, és igual a $4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6$, és a dir, és igual a 10. En definitiva, un valor numèric d'una expressió algebraica es troba substituint les seves lletres per nombres i trobant el seu resultat. És evident que el valor numèric d'una expressió algebraica depèn dels valors concrets que rebin les lletres. Així, per exemple, l'expressió algebraica anterior, $4x - 2y + 6$

quan $x = 5$ i $y = 2$ , el seu valor numèric és igual a $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$

quan $x = -3$ i $y = -1$ , el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) + 6 = -4$

quan $x = -2$ i $y = 5$ , el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 6 = -12$

## Quins són els elements bàsics i les propietats de les expressions algebraiques?

> Els sumands d'una expressió algebraica es denominen *termes* i cada lletra es denomina *variable.* Una expressió algebraica es pot convertir en una d'equivalent aplicant les propietats de les operacions entre lletres i nombres, que són les mateixes que les propietats de les operacions entre nombres reals.

Una expressió algebraica està formada per diverses sumes (és sabut que les restes són sumes amb l'oposat) de certs productes mixtos (o, fins i tot, divisions, encara que, de moment, no es faran servir divisions amb denominadors que continguin lletres) de nombres i lletres. Cadascun dels sumands es denomina *terme.* Per exemple:

$$a - 3c + 2d - 5ax$$

té 4 termes: $a$, $-3c$, $2d$ i, l'últim, $-5ax$, i les variables són $a$, $c$, $d$, $x$. Com es pot observar, els signes de multiplicació, · o ×, es poden eliminar entre variables o entre nombres i variables.

Les propietats de la suma i la multiplicació de nombres i lletres són les propietats conegudes de les operacions entre nombres reals:

- Element neutre de la suma: el 0 es l'element neutre de la suma perquè sumat a qualsevol altre símbol o nombre no el modifica:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

- Element neutre del producte: l'1 és l'element neutre del producte perquè, multiplicat a qualsevol altre símbol o nombre, no el modifica:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- $-a$ és l'oposat de $a$ perquè, sumats el resultat, és l'element neutre de la suma:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

- $1/a$ és l'invers de (essent $a \neq 0$) perquè el seu producte és l'element neutre del producte:

$$a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1.$$

La resta és l'operació que consisteix a sumar l'oposat:

$$a - \mathrm{b} = a + (-b)$$

- La divisió és l'operació que consisteix a multiplicar per l'invers (essent $b \neq 0$):

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

- Commutativa de la suma. La suma de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa:

$$a + b = b + a.$$

- Associativa de la suma. La suma de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin les diferents sumes:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

- Commutativa del producte. El producte de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

- Associativa del producte. El producte de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin els diferents productes:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Distributiva del producte respecte de la suma. Un producte d'un element per una suma es pot descompondre com la suma dels productes de l'element per cadascun dels sumands:

$$a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c.$$

## Com s'apliquen les propietats per a simplificar una expressió algebraica?

> La simplificació d'una expressió algebraica consisteix en la seva reducció al mínim nombre de termes possible, utilitzant les propietats de les operacions en expressions algebraiques. Encara que les propietats es poden aplicar en ordre diferent, el resultat final sol ser molt semblant.

Amb la finalitat de simplificar una expressió algebraica de certa longitud, s'han d'aplicar les propietats de la suma, resta, multiplicació i divisió. La simplificació consisteix en la conversió de l'expressió original en una altra que hi sigui equivalent, però amb el mínim nombre de termes possible. Vegem-ho amb un exemple; s'ha de simplificar:

$$a - 4b - 3a + 5a - b$$

Encara que la manera de simplificar no és única (les propietats es poden aplicar en un altre ordre), generalment, el resultat final és molt semblant:

1) Es resol la suma $-3a + 5a$ , utilitzant la propietat distributiva:

$-3a + 5a$ és igual a $((-3) + 5) \cdot a$ igual a $2a$.

Per tant,

$a - 4b - 3a + 5a - b$ és igual a $a - 4b + 2a - b$

2) Per la propietat commutativa, podem agrupar els termes amb $a$ i els termes amb $b$:

$a - 4b + 2a - b$ és igual a $a + 2a - 4b - b$

3) Element neutre de la suma, per la qual $a = 1 \cdot a$:

$a - 4b + 2a - b$ és igual a $1a + 2a - 4b - 1b$

4) Per la propietat distributiva aplicada dues vegades, una als termes amb $a$ i altra als termes amb $b$:

$1a + 2a - 4b - 1b$ és igual a $(1+2) \cdot a + (-4-1) \cdot b$

simplificant una mica més,

$1a + 2a - 4b - 1b$ és igual a $3a - 5b$

En definitiva, $a - 4b - 3a + 5a - b$ és equivalent a $3a - 5b$

Aquesta última expressió, com que és més breu que l'anterior, en facilita la manipulació. Per tant, és recomanable simplificar tota expressió algebraica, de la mateixa manera que se simplifica una fracció que no és irreductible o es troba el resultat d'una expressió numèrica.

## Què són les igualtats entre expressions numèriques i les igualtats entre expressions algebraiques, i com es pot saber si són certes o falses?

> Una igualtat entre expressions numèriques està formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, i poden ser certes o falses. Una igualtat entre expressions algebraiques està formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat

> entre ambdues, i poden ser certes o falses, però moltes d'elles no són ni certes ni falses.

Una igualtat entre expressions numèriques està formada per dues expressions numèriques, denominades *membres de la igualtat*, i un signe d'igualtat (=) interposat entre ambdues. Les igualtats poden ser certes o falses:

- Una igualtat numèrica és certa si el resultat del membre de l'esquerra és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple:

  $$3 \cdot 4 - 5 = 38 - 15 \cdot 2 - 1$$

  ja que tant el resultat de la dreta, com el de l'esquerra són 7. En aquest cas, es diu que ambdues expressions numèriques són iguals.

- Una igualtat numèrica és falsa si el resultat del membre de l'esquerra no és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple, és falsa aquesta igualtat:

  $$4 \cdot (-2) + 8 = 3 - 7 \cdot 11.$$

  ja que el resultat de l'esquerra és 0, mentre que el resultat de la dreta és –74.

De manera semblant a una igualtat numèrica, una igualtat entre expressions algebraiques està formada per dues expressions algebraiques, denominades *membres de la igualtat*, i un signe d'igualtat (=) interposat entre ambdues. Les igualtats algebraiques poden també ser certes o falses:

- Una igualtat algebraica és certa si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra es pot convertir en la de la dreta aplicant-hi les propietats de les operacions. Per exemple:

  $$a - 4b - 2a + 5a - \mathrm{b} = 4a - 5\,b$$

  és una igualtat certa perquè $a - 4b - 2a + 5a - \mathrm{b}$ es pot transformar en $4a - 5b$, usant les propietats de les operacions.

- Una igualtat algebraica és falsa si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra no es pot convertir en la de la dreta. Per exemple:

  $$3a - 5b + 2 = 3a - 5b + 7.$$

  és una igualtat falsa perquè $3a - 5b + 2$ no pot mai resultar $3a - 5b + 7$

  Ara bé, hi ha igualtats algebraiques que no són ni certes ni falses. Per exemple:

  $$2a - 5b - 4 = 3x + y$$

  en aquest cas, no es pot afirmar que l'expressió de la dreta es pugui transformar en la de l'esquerra, ni tampoc que això sigui impossible. Aquest tipus d'igualtats són les que pròpiament poden denominar-se *equacions.*

## Què és una equació i què és una solució d'una equació?

> Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar *equació*, encara que les igualtats entre expressions algebraiques més interessants són aquelles la falsedat o certesa de les quals no es pot establir a priori. La solució d'una equació es compon d'aquells nombres que, substituint les incògnites, permeten transformar l'equació en una igualtat numèrica certa.

Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar *equació.* En aquest cas, les lletres es denominen *incògnites*. Així, per exemple, són equacions:

$$4a - b + c = 3a - 6\,b + 7$$

$$2x + 2y + 8 = 2x + 7$$

En el primer cas, les incògnites són $a$ , $b$ i $c$; en el segon cas, $x$ i $y$. Cada un dels sumands de cadascun dels membres es denomina *terme*; el nombre que multiplica cada terme es denomina *coeficient*; un terme que no conté cap incògnita es denomina *terme numèric* o *terme independent.*

Les incògnites de cada membre d'una equació es poden substituir per valors numèrics. Per exemple, en l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ poden substituir-se la $x$ per 1, i la $y$ per 5:

$$2\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ x}}{1}+4\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ y}}{5}-5=4\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ x}}{1}-5\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ y}}{5}$$

D'aquesta manera, l'equació es transforma en una igualtat entre expressions numèriques. En aquest cas, la igualtat numèrica resultant és falsa perquè el membre de l'esquerra resulta 17, mentre que el de la dreta resulta –21.

Aquest procés també es denomina *substitució de les incògnites d'una equació per nombres* i, com s'ha vist, pot donar lloc a una igualtat numèrica certa o falsa.

Quan substituïm les incògnites d'una equació per certs valors, les igualtats numèriques resultants poden ser:

- Falses, com en l'últim exemple.
- Certes. Per exemple, si se substitueixen les incògnites de $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$, per 2 en el cas de la $x$, i per 1 en el cas de la $y$, obtindrem:

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1.$$

i ambdós membres resulten 3. Així, doncs, es tracta d'una igualtat numèrica certa. En aquest cas es diu que s'ha trobat una solució de l'equació. Així, aquesta solució de l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ es compon del canvi de la $x$ per 2, i de la $y$ per 1; dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de l'equació anterior. S'ha de tenir en compte que:

- Una solució d'una equació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.
- Una equació pot tenir més d'una solució. Per exemple, en el cas de l'equació anterior, $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$, una altra solució podria ser $x = 11$ i $y = 3$, ja que $2 \cdot 11 + 4 \cdot 3 - 5 = 4 \cdot 11 - 5 \cdot 3$.

## Què són les equacions equivalents, i com es poden trobar equacions equivalents d'una altra?

> Dues (o més) equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions. Tot i que no és sempre senzill determinar si dues equacions són equivalents, es pot trobar de manera senzilla l'equació equivalent d'una altra; només cal sumar, restar, multiplicar o dividir ambdós membres d'aquesta equació per un mateix nombre. Aquesta manipulació d'una equació permet trobar-ne les solucions.

Dues equacions que tenen les mateixes solucions es denominen *equivalents*. Per exemple, les equacions:

$$7x - 3 = 6x - 4 \qquad\qquad 14x - 6 = 12x - 8.$$

són equivalents, ja que l'única solució en ambdós casos és $x = -1$. Vegem-ho:

$7 \cdot (-1) -3 = 6 \cdot (-1) - 4$ el resultat en ambdós membres és –10.

$14 \cdot (-1) - 6 = 12 \cdot (-1) - 8$ el resultat en ambdós membres és –20.

Per tant, $x = -1$ resol ambdues equacions, cosa que confirma que són equacions equivalents.

No sempre resulta fàcil trobar un procediment per a determinar si dues equacions són equivalents. En tot cas, és interessant saber com es pot transformar una equació per a obtenir-ne una altra que sigui equivalent, perquè és una de les manipulacions que permeten trobar solucions d'una equació. Aquests són els procediments usuals:

- Sumant o restant a ambdós membres el mateix nombre.

Per exemple, si a l'equació $7x - 3 = 6x - 4$ se li resta 2 a banda i banda, l'equació resultant és:

$$7x - 3 \mathbf{- 2} = 6x - 4 \mathbf{- 2.}$$

s'obté:

$$7x - 5 = 6x - 6.$$

i es pot comprovar fàcilment que la solució en ambdós casos és $x = -1$, per la qual cosa es pot afirmar que $7x - 3 = 6x - 4$ i $7x - 5 = 6x - 6$ són equacions equivalents.

- Multiplicant o dividint ambdós membres pel mateix nombre.

Per exemple, si els membres de l'equació $7x - 3 = 6x - 4$ es multipliquen per 3 s'obté:

$$3 \cdot (7x - 3) = 3 \cdot (6x - 4)$$

és a dir:

$$21x - 9 = 18x - 12$$

i es pot comprovar de manera fàcil que ambdues equacions tenen per solució $x = -1$. És a dir, $7x - 3 = 6x - 4$ i $21x - 9 = 18x - 12$ són equacions equivalents.

És evident que restant (o dividint) ambdós membres d'una equació amb el mateix nombre, s'obtindrà una equació equivalent a la primera. Per exemple, si es resta 5 a ambdós membres de l'equació $7x - 3 = 6x - 4$, s'obté:

$$7x - 3 - 5 = 6x - 4 - 5$$

$$7x - 8 = 6x - 9$$

Així, doncs, $7x - 3 = 6x - 4$ i $7x - 8 = 6x - 9$ són equacions equivalents.

De la mateixa manera, si ambdós membres de l'equació $8x - 4 = 6x - 10$ es divideixen entre 2, l'equació resultant és equivalent:

$$\frac{8x-4}{2} = \frac{6x-10}{2}$$

$$4x - 2 = 3x - 5$$

És a dir, $4x - 2 = 3x - 5$ és equivalent de $8x - 4 = 6x - 10$.

## En què consisteix la resolució d'una equació?

> La resolució d'una equació consisteix en la recerca de totes les solucions d'una equació. La dificultat en la resolució depèn de molts factors, entre ells: el nombre d'incògnites i el grau de l'equació. De vegades, només és possible trobar una aproximació d'alguna de les solucions; en aquest cas es diu que s'ha trobat una *solució numèrica* de l'equació.

La recerca de les solucions d'una equació es denomina *resolució d'una equació*, i sol ser un problema matemàtic no sempre fàcil d'abordar. En tot cas, un cert tipus d'equacions, amb unes característiques molt concretes, tenen una resolució relativament senzilla i metòdica. Les característiques que determinen la dificultat en la resolució d'una equació són:

- El nombre d'incògnites de l'equació; com més petit és el nombre d'incògnites, més senzilla en resulta la resolució. Així, les més usuals tenen 1, 2 o, com a molt, 3 incògnites, encara que si no es diu explícitament el contrari, el terme *equació* designa les equacions amb un sola incògnita.

- El grau de l'equació: cada terme d'una equació té diverses incògnites multiplicant-se; aquest nombre és el *grau* del terme. Per exemple, el terme $2xy^2$ té 3 incògnites multiplicant-se (una "$x$" i dues "$y$"); per tant, el seu grau és 3. El grau d'una equació és el màxim grau dels termes que formen l'equació. Així, per exemple, el grau de

$$3xy - 2a + 5x^2y^2 = x + 11a^2x$$

és igual a 4, ja que el terme amb més incògnites és $5x^2y^2$, i en té 4 (dues $x$, i dues $y$). Es pot dir, en general, que com més petit és el grau d'una equació, més senzill és resoldre-la.

La complexitat d'una equació pot impedir-ne la resolució exacta. En aquests casos es pot intentar la resolució numèrica, és a dir, la resolució amb valors aproximats. Per exemple, l'equació $x^3 - 3x + 2 = x - 5$ no és una equació senzilla de resoldre de manera exacta. Una solució numèrica d'aquesta equació pot ser $x = -2{,}5891$, ja que substituint en l'equació s'obté:

$$(-2{,}5891)^3 - 3(-2{,}5891) + 2 = (-2{,}5891) - 5$$

$$-7{,}5886 \approx -7{,}5891$$

és a dir, els resultats són molt pròxims. Per això, es tracta d'una solució numèrica.

La recerca de solucions numèriques d'una equació és un dels problemes matemàtics que ha experimentat un gran avanç, a causa de la utilització cada vegada més generalitzada de potents ordinadors que permeten fer una gran quantitat de càlculs en poc temps.