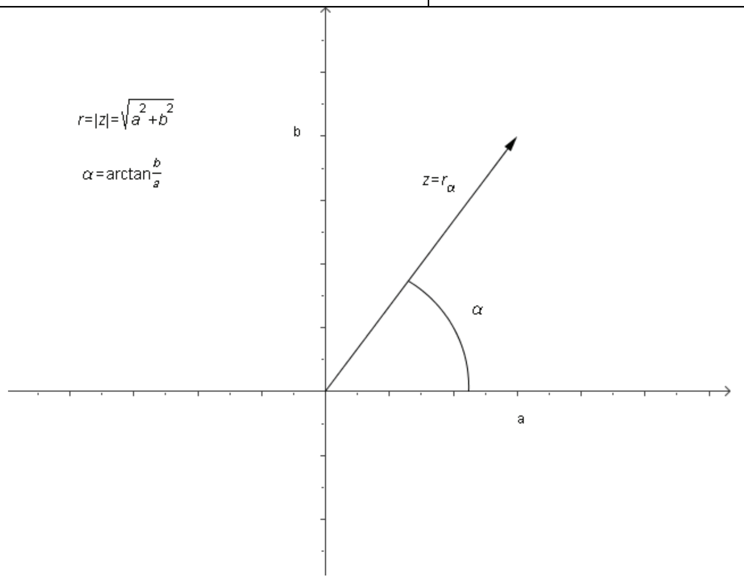
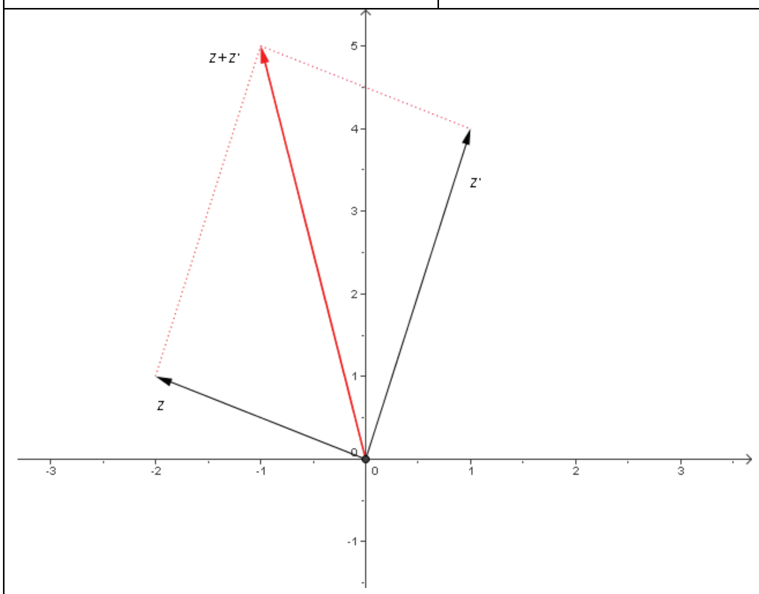
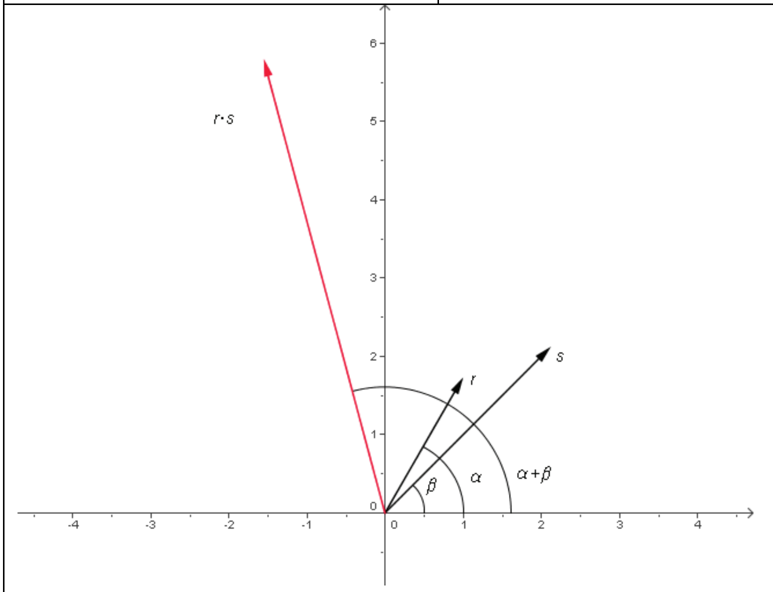
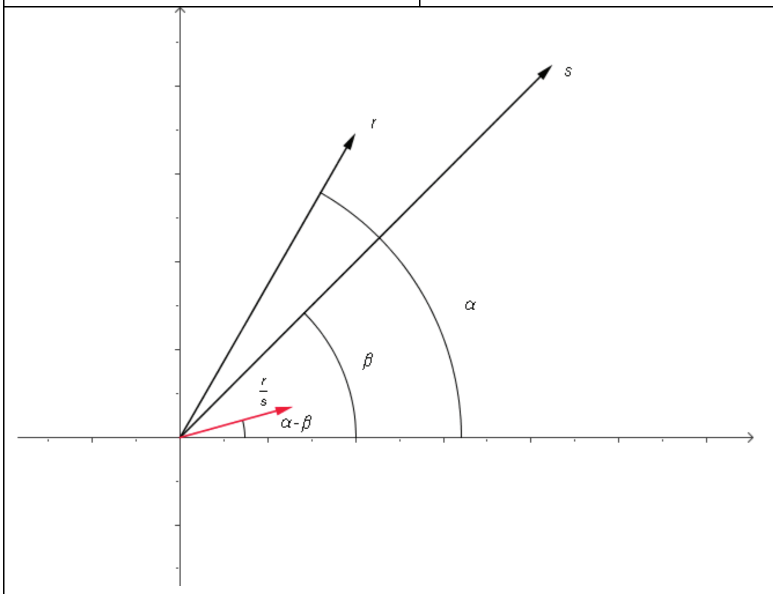
Els nombres complexos

Els nombres complexos

	Forma bionòmica	**Forma polar**
Definició	$z = a + bi$, o bé $z = (a, b)$ essent a la part real i b, la part imaginària. $a = r \cdot \cos \alpha$ $b = r \cdot \sin \alpha$	$z = r_\alpha$ essent r el mòdul i α, l'argument. $r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
Oposat	$-z = -a - bi$	
Conjugat	$\bar{z} = a - bi$	
Representació		
Operacions	si $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$	si $z = r_\alpha$ i $z' = s_\beta$
Suma	$z + z' = (a + a') + (b + b')i$ $z - z' = (a - a') + (b - b')i$	
		
Resta	$z - z' = (a - a') + (b - b')i$	

<table>
<tr><td rowspan="2">Multiplicació</td><td>$z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$</td><td>$r_\alpha \cdot s_\beta = \left(r \cdot s\right)_{\alpha+\beta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Divisió</td><td>$\frac{z'}{z} = \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i$</td><td>$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(r / s\right)_{\alpha-\beta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Potència</td><td colspan="2">$z^n = \left(r_\alpha\right)^n = \left(r^n\right)_{n\alpha}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(r_\alpha\right)^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}}$ k va des de 0 fins $n-1$</td></tr>
</table>

Què és un nombre complex?

> Un nombre complex, z, està format d'una part real, $a = \text{Re}(z)$, i una part imaginària, $b = \text{Im}(z)$, i s'escriu $a + bi$, o bé (a, b).

Un nombre complex és una expressió amb dos sumands: un és un nombre real i l'altre és un nombre real per una lletra *i*. Per exemple, z és un exemple de nombre complex:

$$z = 3 + 4i$$

El sumand sense la *i* es denomina *part real*, mentre que el nombre que acompanya la i es denomina *part imaginària* del nombre complex. En l'exemple anterior, 3 és la part real i s'indica $3 = \text{Re}(z)$; mentre que 4 és la part imaginària i s'indica $4 = \text{Im}(z)$.

Un nombre complex també es pot escriure en forma de parell ordenat; en l'exemple, el nombre complex $z = 3 + 4i$ també es pot escriure (3, 4), essent la primera coordenada la part real, i la segona coordenada, la part imaginària.

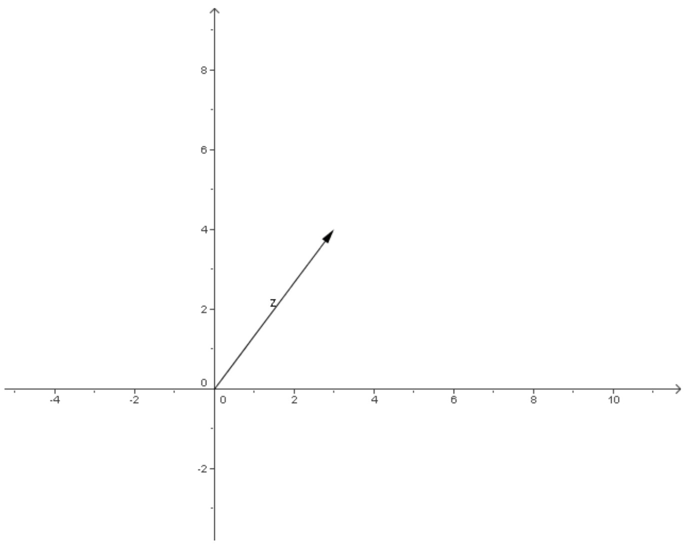
Així, doncs, un nombre complex és un nombre format d'una part real, a, i una part imaginària, b, que s'escriu

$$a + bi \qquad \text{o bé,} \qquad (a, b)$$

Com es representa un nombre complex?

> Per a representar un nombre complex es poden fer servir els eixos de coordenades cartesianes, l'eix X per a la part real i l'eix Y per a la part imaginària.

Per a representar un nombre complex es poden fer servir els eixos cartesians, l'eix X per a la part real (eix real) i l'eix Y per a la part imaginària (eix imaginari). Així, per exemple, el nombre $z = 3 + 4i$, o també (3, 4), es representa pel vector següent:



Són necessaris els nombres complexos?

> Els nombres complexos són imprescindibles, ja que permeten que qualsevol equació polinòmica tingui solució. Per aconseguir-ho, es requereix que els nombres reals siguin completats amb el denominat *nombre i*, el valor del qual és $i = \sqrt{-1}$.

És fàcil observar que existeixen equacions que no tenen solució real. Per exemple, l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

no té solució, ja que si aïllem la x^2:

$$x^2 = -1$$

i no hi ha cap nombre real que elevat al quadrat sigui –1, perquè hauria de succeir que:

$$x = \sqrt{-1}$$

i ja sabem que no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

Per a permetre que equacions del tipus anterior també tinguin solució, es completen els nombres reals afegint l'arrel quadrada de –1, amb la qual cosa obtenim els nombres complexos. A l'arrel quadrada de –1 se la denomina i:

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{és a dir} \qquad i^2 = -1$$

i, qualsevol nombre complex es pot expressar de la forma:

$$z = a + bi$$

Vegem que l'equació anterior té una solució complexa:

$$x^2 = -1$$

per tant,

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

És a dir, les solucions de l'equació són $+i$ i $-i$. Vegem-ho:

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

D'aquesta manera, qualsevol equació polinòmica té una solució complexa.

Com es representen les potències de *i*?

> Les potències de i són fàcils de trobar i de representar. N'hi ha prou de calcular les quatre primeres perquè la resta, a partir de la cinquena potència de i, i^5, es repeteixen cíclicament.

Les potències de i són fàcils de trobar:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

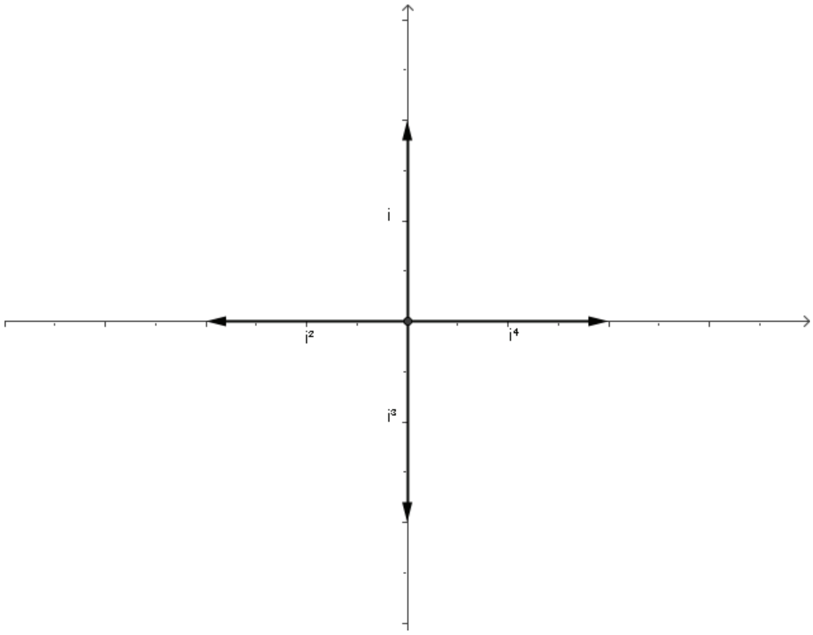
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

vegem que a partir de i^5 es tornen a repetir els valors, és a dir,

$i^5 = i$ $\qquad$ $i^6 = i^2$ $\qquad$ $i^7 = i^3$ $\qquad$ $i^8 = i^4$



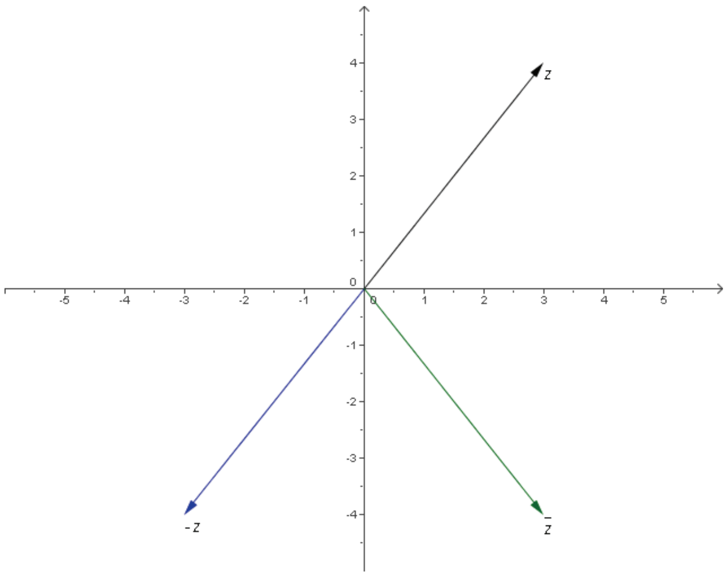
Com es calculen l’oposat i el conjugat d’un nombre complex?

> L’oposat d’un nombre complex $z = a + bi$, s’indica $-z$ i és igual a $-z = -a - bi$. El conjugat d’aquest complex z, s’indica $\overline{z}$, i és $\overline{z} = a - bi$

Donat un nombre complex $z = a + bi$, la seva oposat, que s’indica $-z$, és el nombre complex amb els signes oposats, és a dir, $-z = -a - bi$. El conjugat d’aquest complex z, que s’indica $\overline{z}$, es construeix canviant de signe la part imaginària de z. Així, doncs, $\overline{z} = a - bi$.

Per exemple, l’oposat de $z = 3 + 4i$ és $-z = -3 - 4i$. Mentre que el seu conjugat és $z = 3 - 4i$.

En aquest gràfic es poden observar l’oposat i el conjugat de $z = 3 + 4i$:



Com es fan la suma i la resta entre complexos?

> Per a sumar dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, se sumen les parts reals i imaginàries, $z + z' = (a + a') + (b + b')i$. La resta es realitza de manera similar: $z - z' = (a - a') + (b - b')i$.

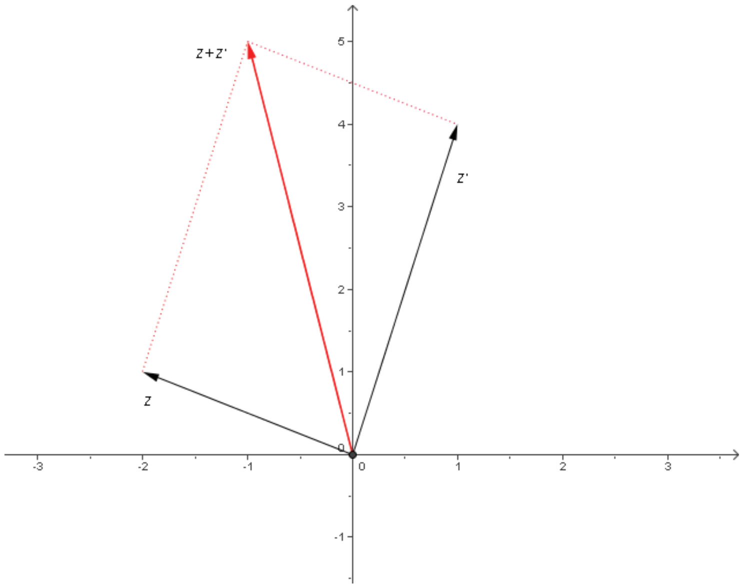
Per a sumar dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, se sumen les parts reals i imaginàries de la manera següent:

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

Per exemple, si $z = -2 + i$ i $z' = 1 + 4i$

$$z + z' = (-2 + 1) + (1 + 4)i = -1 + 5i$$

com es pot veure gràficament:



La resta es fa de manera similar, restant les parts reals i imaginàries:

$$z - z' = (a - a') + (b - b')i$$

Per exemple, si $z = -2 + i$ i $z' = 1 + 4i$

$$z + z' = (-2 - 1) + (1 - 4)i = -3 - 3i$$

Com es fa el producte de nombres complexos?

> El producte de dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$ és igual a $z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

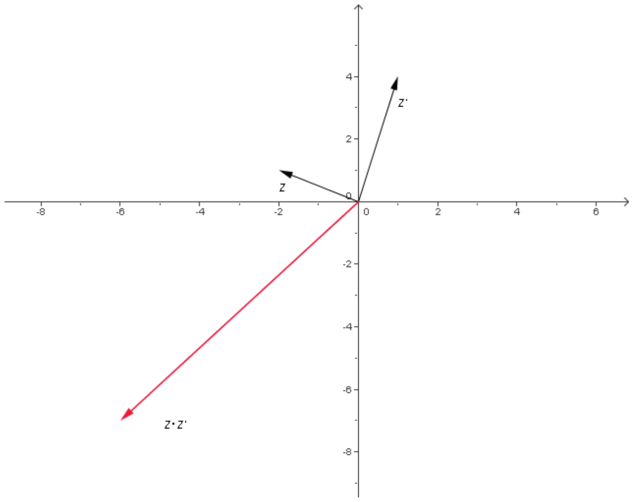
La multiplicació de dos nombres complexos es fa de manera semblant a la multiplicació de polinomis: si els nombres són $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, per a obtenir el resultat se situen un sobre l'altre, i es multipliquen factor a factor, tenint en compte que $i \cdot i = i^2 = -1$:

$$\begin{array}{r} a + bi \\ \underline{a' + b'i} \\ aa' + ab'i \\ \underline{bb'i^2 + a'bi} \\ (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \end{array}$$

és a dir, $z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Així, per exemple, si $z = -2 + i$ i $z' = 1 + 4i$

$$z \cdot z' = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 4) + (-2 \cdot 4 + 1 \cdot 1)i = -6 - 7i$$



Com es fa el quocient de nombres complexos?

> El quocient de dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$ és igual a $\frac{z'}{z} = \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i$.

Per a fer el quocient de dos nombres complexos s'han de multiplicar numerador i denominador pel conjugat del denominador. Si els nombres són $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, i tenint en compte que $i \cdot i = i^2 = -1$:

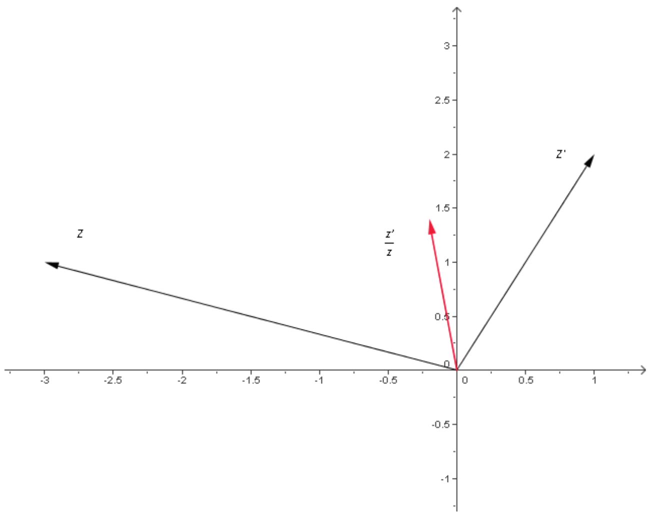
$$\frac{z'}{z} = \frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(a'a + b'b) + (ab' - a'b)i}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i$$

és a dir, la part real del quocient és $\frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2}$ i la part imaginària és $\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$.

Així, per exemple, si $z' = -3 + i$ i $z = 1 + 2i$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{1^2 + 2^2} + \frac{1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2}{1^2 + 2^2} i = -0,2 + 1,4i$$



Com es representa un nombre complex en forma polar?

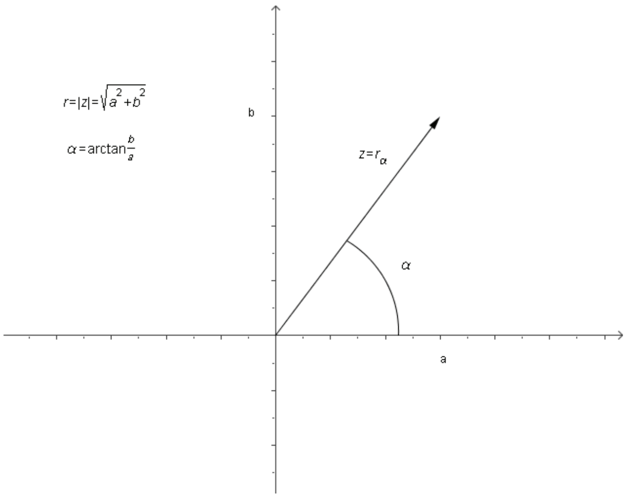
> Un nombre complex $z = a + bi$ es pot representar per $z = r_\alpha$, essent r el mòdul de z, i α l'argument o angle que forma amb l'eix real.

Observant la representació d'un nombre complex, és fàcil comprovar que el nombre z també es pot caracteritzar per la longitud del vector, denominada *mòdul,* $|z|$, i l'angle que forma amb l'eix real, denominat *argument.* Si el nombre és $z = 3 + 4i$, la longitud del segment és $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, mentre que l'angle es pot establir buscant l'arctangent del quocient entre la part imaginària i la part real:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}93 \text{ rad}$$

En general, doncs, un nombre complex $z = a + bi$, o (a, b), es pot representar per $z = r_\alpha$, essent r el mòdul de z, i α l'angle que forma aquest segment amb l'eix real:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad\qquad \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Cal destacar que l'argument ha de ser un angle entre 0 i 2π (molt sovint també es pot usar un argument entre $-\pi$ i π); si fos major o menor, s'ha de buscar l'angle entre 0 i 2π que es correspongui; per exemple:

l'angle $-\pi$	es correspon amb l'angle π
l'angle $9\pi/2$	es correspon amb l'angle $\pi/2$

Com es transforma un complex de forma polar a forma bionòmica?

> La forma binòmica d'un nombre complex en forma polar, $z = r_\alpha$, és $z = r \cdot \cos\alpha + i \cdot r \cdot \sin\alpha$.

Si z és un nombre complex en forma polar, $z = r_\alpha$, per a trobar la seva forma binòmica, n'hi ha prou de calcular les coordenades de l'eix real i imaginari, (a, b):

$$a = r \cdot \cos\alpha$$
$$b = r \cdot \sin\alpha$$

és a dir, la forma binòmica és $z = r \cdot \cos\alpha + i \cdot r \cdot \sin\alpha$.

Com es fan la multiplicació i la divisió en forma polar?

> Per a fer el producte de dos nombres complexos en forma polar, r_α i s_β, s'han de multiplicar ambdós mòduls i posar per argument la suma d'arguments, $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$. Per a realitzar la divisió, s'han de dividir ambdós mòduls i posar per argument la diferència d'arguments, $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = (r/s)_{\alpha-\beta}$.

La suma i la resta no se solen fer en forma polar perquè és molt més fàcil fer-les en forma binòmica. En canvi, la multiplicació i la divisió són més senzilles en forma polar que en forma binòmica.

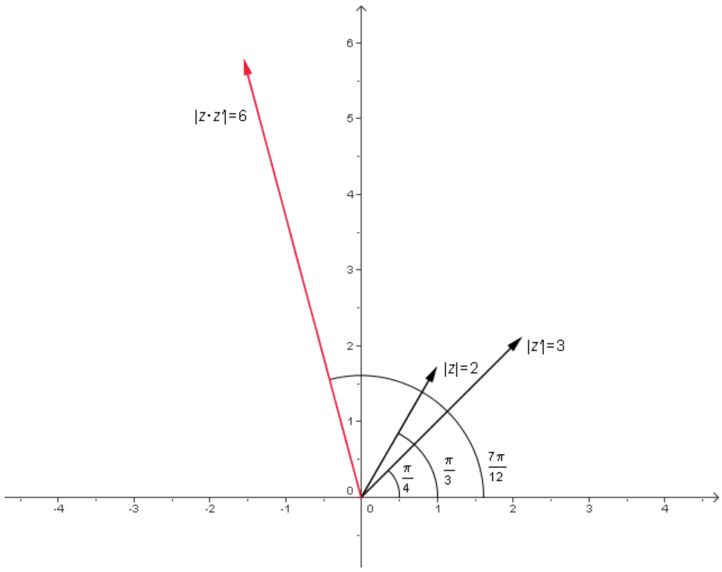
Per a fer el producte de dos nombres complexos en forma polar, r_α i s_β, s'han de multiplicar ambdós mòduls i posar per argument la suma d'arguments:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Per exemple, el producte de i $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$ $z' = 3_{\frac{\pi}{4}}$ és igual a

$$z \cdot z' = 2_{\frac{\pi}{3}} \cdot 3_{\frac{\pi}{4}} = (2 \cdot 3)_{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}} = 6_{\frac{7\pi}{12}}$$

com es pot observar en aquest gràfic:



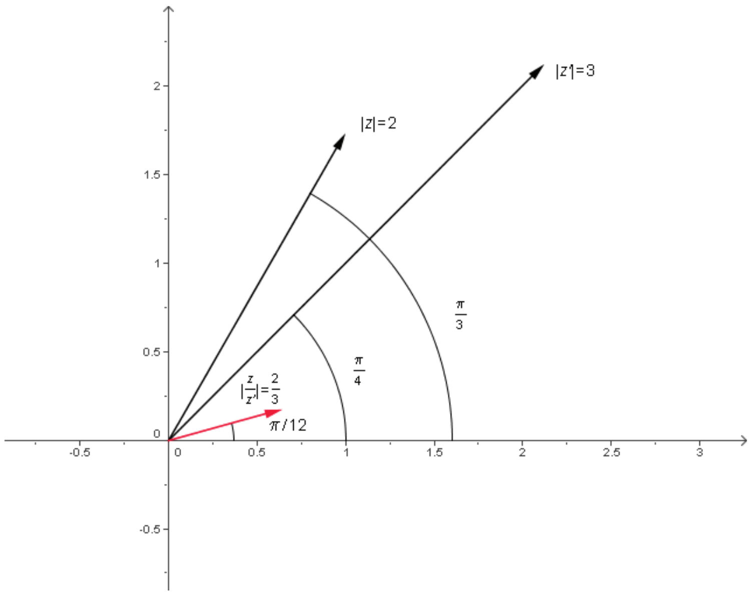
Per a dividir dos nombres complexos en forma polar, r_α i s_β, s'han de dividir ambdós mòduls i posar per argument la diferència d'arguments:

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = (r/s)_{\alpha-\beta}$$

Per exemple, el quocient d'i $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$ $z' = 3_{\frac{\pi}{4}}$ és igual

$$\frac{z}{z'} = \frac{2_{\frac{\pi}{3}}}{3_{\frac{\pi}{4}}} = (2/3)_{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}} = (2/3)_{\frac{\pi}{12}}$$

Aquest gràfic ho mostra:



Com es fa la potència d'un nombre complex en forma polar?

> La potència d'exponent *n* d'un nombre complex r_α és $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$.

Per a fer la potència d'un nombre complex, r_α , s'ha d'observar el següent:

$$(r_\alpha)^2 = r_\alpha \cdot r_\alpha = (r^2)_{2\alpha}$$
$$(r_\alpha)^3 = r_\alpha \cdot (r_\alpha)^2 = r_\alpha \cdot (r^2)_{2\alpha} = (r^3)_{3\alpha}$$

és a dir, en general,

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

Aquesta expressió és vàlida tant per a exponents positius com negatius. Per exemple:

$$(3_2)^4 = (3^4)_{4\cdot 2} = 81_8 = 81_{8-2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tots els angles} \\ \text{han de trobar-se} \\ \text{entre 0 i } 2\pi}}{=} 81_{1,72}$$

$$(3_2)^{-3} = (3^{-3})_{-3\cdot 2} = \frac{1}{27_{-6}} = \frac{1}{27_{-6+2\pi}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tots els angles} \\ \text{han de trobar-se} \\ \text{entre 0 i } 2\pi}}{=} \frac{1}{27_{0,28}}$$

Com es calculen les arrels d'un nombre complex en forma polar?

> La potència d'exponent *n* d'un nombre complex r_α és $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$.

Una arrel no és més que una potència d'exponent trencat. El procés és, doncs, similar a l'obtenció d'una potència, tot i que el nombre d'arrels d'un nombre complex és igual a l'índex de l'arrel.

Per exemple:

$$\sqrt{4_\pi} = \left(4_\pi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{1}{2}\cdot\pi} = 2_{\frac{\pi}{2}}$$

Això és així perquè:

$$\left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 4_\pi$$

Ara bé, és fàcil observar que també:

$$\left(2_{\frac{3\pi}{2}}\right)^2 = 4_{3\pi} = 4_\pi$$

Així, doncs, per a trobar les arrels d'un nombre complex en forma polar es fa el següent:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(r_\alpha\right)^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} \qquad k \text{ va des de 0 fins a} - n\ 1$$

Per exemple, per a trobar les arrels d'índex 4 de la unitat, és a dir, del nombre real 1, que en forma polar s'escriu 1_0, s'ha de fer el següent:

$$\sqrt[4]{1_0} = \left(1_0\right)^{\frac{1}{4}} = \left(1^{\frac{1}{4}}\right)_{\frac{0+2\pi k}{4}} = \left(\sqrt[4]{1}\right)_{\frac{2\pi k}{4}} = 1_{\frac{2\pi k}{4}} \quad k \text{ va des de 0 fins a } 4 - 1 = 3$$

Per a $k = 0$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 0}{4}} = 1_0$

Per a $k = 1$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 1}{4}} = 1_{\frac{\pi}{2}}$

Per a $k = 2$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 2}{4}} = 1_\pi$

Per a $k = 3$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 3}{4}} = 1_{\frac{3\pi}{2}}$

Per tant, les arrels d'índex 4 de la unitat són: 1_0 , $1_{\frac{\pi}{2}}$, 1_π i $1_{\frac{3\pi}{2}}$.