UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 8. Funcions

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 8. Funcions

8.1 Definicions

Definició 8.1.1:

Una **funció real de variable real** *és una aplicació f d'un cert subconjunt D de $\mathbb{R}$ al conjunt dels nombres reals. Simbòlicament ho representarem per*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

En altres paraules, una **funció** *f és una regla que a cada punt $x \in D$ li assigna un únic element $y \in \mathbb{R}$. Aquest element es denota per $y = f(x)$ i s'anomena* **imatge** *de la funció f en el punt x.*
La variable x s'anomena **variable independent** *i la variable y s'anomena* **variable dependent**.
El conjunt D s'anomena **domini** *de la funció f.*

Nota: El càlcul del domini d'una funció es veurà amb més detall a l'assignatura de Matemàtiques específica del grau que esteu cursant.

Exemple 8.1.1 a) $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow & y = x^3 - 3x^2 + 2x \end{array}$ és una funció.

La variable independent és x i la variable dependent és y.

La imatge de f en el punt $x = 4$ és $f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 24$.

b) $\begin{array}{rcccc} g & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & z & \longrightarrow & w = \dfrac{3z-2}{z+4} \end{array}$ amb $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ és una funció.

La variable independent és z i la variable dependent és w.

La imatge de $g(z)$ en el punt $z = -2$ és $g(-2) = \dfrac{3(-2)-2}{(-2)+4} = -4$.

8.2 Transformacions de funcions

Definició 8.2.1:

Siguin $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dues funcions i sigui* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Es defineixen les funcions $f \pm g$, λf, $f \cdot g$ *i* f/g *de la següent manera:*

$$
\begin{array}{lll}
f \pm g : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{i} & (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \\
\lambda f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{i} & (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \\
f \cdot g : D_1 \cap D_2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{i} & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\
f/g : D_3 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{i} & (f/g)(x) = f(x)/g(x),
\end{array}
$$

on D_3 *és el conjunt format per tots els* $x \in D_1 \cap D_2$ *tals que* $g(x) \neq 0$.

Exemple 8.2.1 Siguin $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $f(x) = x - 3$ i $g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $g(x) = \sqrt{x-1}$ dues funcions. A continuació determinem les funcions $f + g$, $3f - g$ i f/g.

a) $f + g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $(f + g)(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$.
   Observeu que el domini de f és $D_1 = \mathbb{R}$ i el domini de g és $D_2 = [1, \infty)$. Per tant, el domini de $f + g$ és $D_1 \cap D_2 = [1, \infty)$.

b) $3f - g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $(3f - g)(x) = 3(x - 3) - \sqrt{x-1} = 3x - 9 - \sqrt{x-1}$.

c) $f/g : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $(f/g)(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}}$.
   Observeu que $\sqrt{x-1} = 0 \iff x = 1$, així el domini de f/g és el conjunt format per tots els $x \in D_1 \cap D_2$ tals que $x \neq 1$.

Definició 8.2.2:

Sigui $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dues funcions tals que* $g(x) \in D_1$ *per a tot* $x \in D_2$.
La **composició** *de les funcions* f *i* g *és una nova funció* $f \circ g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida de la següent manera*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x));$$

és a dir, $(f \circ g)(x)$ *és la imatge de la funció* f *en el punt* $g(x)$. *Aquí* D *és el conjunt format per tots els* $x \in D_2$ *tals que* $g(x) \in D_1$.

Exemple 8.2.2 Siguin $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $f(x) = x^2 + 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $g(x) = e^x$ i $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $h(x) = \sin x$. Determinar les composicions $f \circ g$, $g \circ f$ i $f \circ g \circ h$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (e^x)^2 + 1 = e^{2x} + 1$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{x^2+1}$.

c) $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f\left(e^{\sin x}\right) = \left(e^{\sin x}\right)^2 + 1 = e^{2\sin x} + 1$.

Exemple 8.2.3 a) Descomposició de la funció $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ com a transformació de funcions. Observeu que la funció $x^2 + 1$ està dins una arrel quadrada. Així $f(x) = (h \circ g)(x)$ on $g(x) = x^2 + 1$ i $h(x) = \sqrt{x}$. La funció $g(x)$ es pot expressar com la suma de les funcions $g_1(x) = x^2$ i $g_2(x) = 1$.

b) Descomposició de la funció $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ com a transformació de funcions.
Veiem que f es pot expressar com la suma de les funcions $g(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$ i $h(x) = \sin x^2$. Les funcions g i h es poden expressar com una composició de funcions. En efecte, prenem $l(x) = \sin x$ i $m(x) = x^2$, llavors $g(x) = (m \circ l)(x)$ i $h(x) = (l \circ m)(x)$. Així doncs, $f(x) = (m \circ l)(x) + (l \circ m)(x)$.

Definició 8.2.3:

Sigui $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció injectiva[a] *en una cert conjunt $A \subset D$ i sigui $B = f(A)$. Es defineix la* **funció inversa** *de f a A i la representem per f^{-1} com una funció $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que*

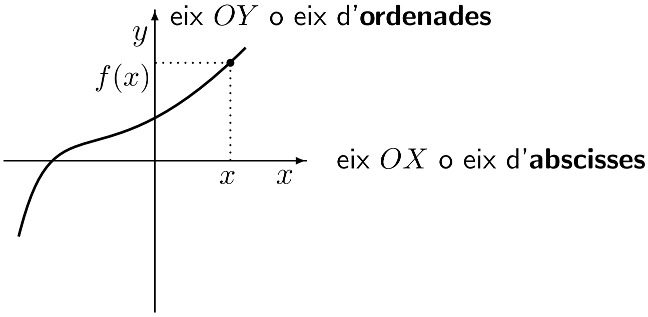
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x.$$

[a] Una funció $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ és **injectiva** si per a tot $x, y \in A$ amb $x \neq y$ es compleix que $f(x) \neq f(y)$.

Observeu que de la Definició 8.2.3 es dedueix que si $y = f(x)$, llavors $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ i per tant $x = f^{-1}(y)$.

8.3 Representació gràfica de funcions. Funcions elementals

Una funció f la podem pensar com una col·lecció de parells de nombres de la forma $(x, f(x))$. Per a representar gràficament una funció dibuixarem al pla cadascun dels parells que la constitueixen.

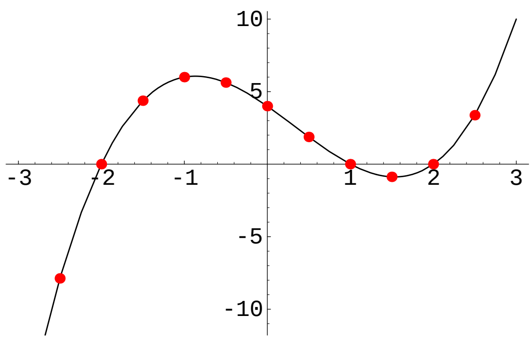


El dibuix obtingut d'aquesta manera s'anomena la **gràfica** de la funció.

Exemple 8.3.1 Representació gràfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

Com que és impossible calcular els infinits parells $(x, f(x))$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, en calculem un nombre suficient que sigui representatiu i ens permeti dibuixar una gràfica aproximada de f.

x	$y = f(x)$
$-5/2$	$-63/8 = -7.875$
-2	0
$-3/2$	$35/8 = 4.375$
-1	6
$-1/2$	$45/8 = 5.625$
0	4
$1/2$	$15/8 = 1.875$
1	0
$3/2$	$-7/8 = -0.875$
2	0
$5/2$	$27/8 = 3.375$



8.3.1 Funcions polinòmiques

Definició 8.3.1:

Una funció **polinòmica** *de grau n és una funció de la forma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

on $a_i \in \mathbb{R}$ per a tot $i = 0, 1, \ldots, n$.

Representació gràfica d'una funció polinòmica de grau 0

La funció més fàcil de representar és sens dubte la funció constant (funció polinòmica de grau 0): $f(x) = c$ amb c una constant. La gràfica de $f(x) = c$ és una recta paral·lela a l'eix OX situada a una distància c d'aquest eix.

Exemple 8.3.2 Les representacions gràfiques de $f(x) = 2$ i $g(x) = -4$ es donen a la Figura 8.3.1.

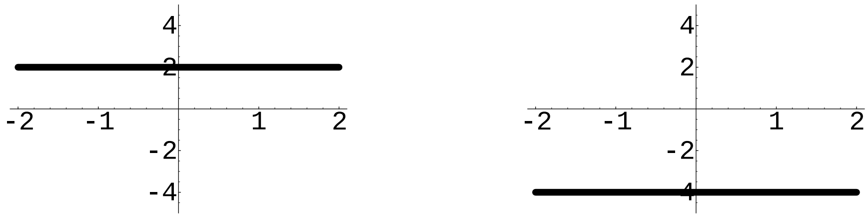
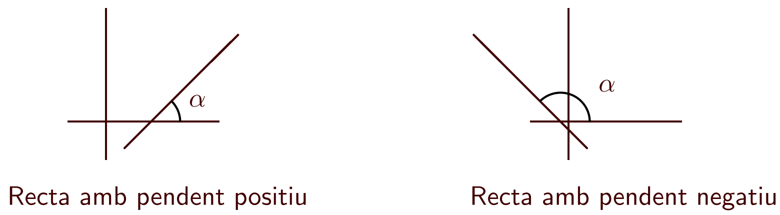


Figura 8.3.1: Gràfiques de $f(x) = 2$ i $g(x) = -4$.

Representació gràfica d'una funció polinòmica de grau 1

La gràfica d'una funció polinòmica de grau 1 de la forma $f(x) = mx + b$ és una **recta** que passa pel punt $(0, b)$ i té **pendent**$^{(*1)}$ m. Per a representar gràficament una recta és suficient conèixer dos punts pels quals passa la recta.

$(^*1)$ El **pendent** d'una recta és la tangent de l'angle α comprés entre la recta i el semieix positiu de les x's.



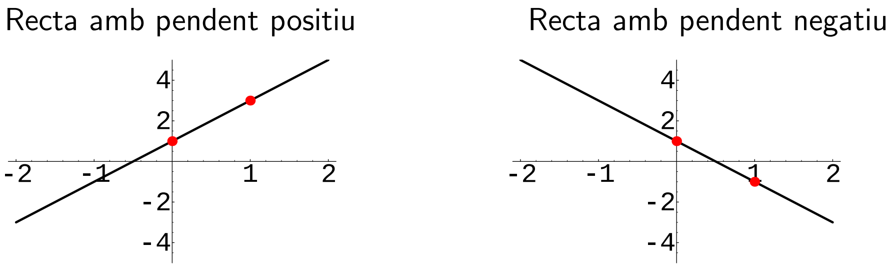
Exemple 8.3.3 Les representacions gràfiques de $f(x) = 2x+1$ i $g(x) = -2x+1$ es donen a la Figura 8.3.2.

Representació gràfica d'una funció polinòmica de grau 2

La gràfica d'una funció polinòmica de grau 2 de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ és una **paràbola**.

Per a representar gràficament una paràbola ens anirà molt bé conèixer-ne el vèrtex$^{(*1)}$, els punts de tall amb els eixos i alguns alguns parells de punts $(x, f(x))$ en un entorn del vèrtex (una paràbola sempre és simètrica respecte l'eix vertical que passa pel seu vèrtex).

x	$f(x)$
0	1
1	3



x	$g(x)$
0	1
1	-1

Figura 8.3.2: Gràfiques de $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = -2x + 1$.

(*1) El **vèrtex** d'una paràbola és el punt on la paràbola assoleix el seu valor màxim o mínim. La coordenada x del vèrtex de la paràbola ve donada per $x_v = -\frac{b}{2 \cdot a}$.

Exemple 8.3.4 Representació gràfica de $f(x) = x^2 - x - 2$ i $g(x) = -x^2 - x - 2$.

Calculem el vèrtex i els punts de tall amb els eixos.

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

Vèrtex: $x_v = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

Punt de tall amb l'eix OY $(x = 0)$

$$y = -2$$

Punts de tall amb l'eix OX $(y = 0)$:

$$x^2 - x - 2 = 0 \dashrightarrow x = -1,\ x = 2$$

$$g(x) = -x^2 - x - 2$$

Vèrtex: $x_v = -\frac{-1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2}$

Punt de tall amb l'eix OY $(x = 0)$

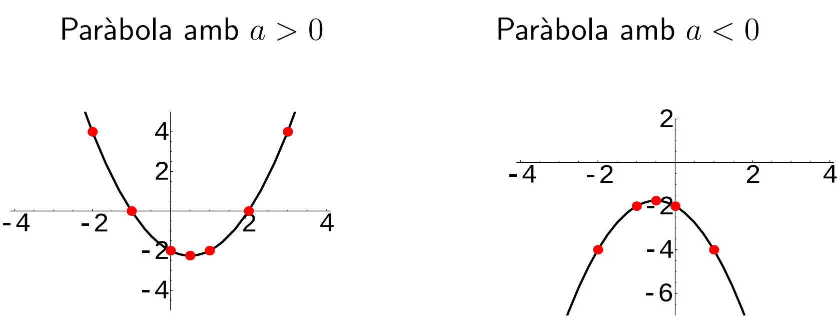
$$y = -2$$

Punts de tall amb l'eix OX $(y = 0)$

$$-x^2 - x - 2 = 0 \dashrightarrow \text{No té solució}$$

La representació gràfica de f i g es dóna a la Figura 8.3.3.

x	$f(x)$
-2	4
-1	0
0	-2
$1/2$	-2.25
1	-2
2	0
3	4



x	$g(x)$
-2	-4
-1	-2
$-1/2$	-1.75
0	-2
1	-4

Figura 8.3.3: Gràfiques de $f(x) = x^2 - x - 2$ i $g(x) = -x^2 + x + 2$.

8.3.2 Funcions racionals

Definició 8.3.2:

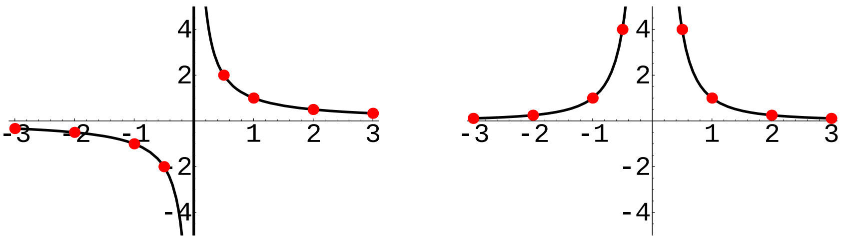
Una funció **racional** *és una funció de la forma*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis.

Exemple 8.3.5 Les representacions gràfiques de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es donen a la Figura 8.3.4.

x	$f(x)$
-3	$-1/3$
-2	$-1/2$
-1	-1
$-1/2$	-2
0	—
$1/2$	2
1	1
2	$1/2$
3	$1/3$



x	$g(x)$
-3	$-1/9$
-2	$-1/4$
-1	-1
$-1/2$	-4
0	—
$1/2$	4
1	1
2	$1/4$
3	$1/9$

Figura 8.3.4: Gràfiques de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

8.3.3 Funcions exponencials i logarítmiques

Definició 8.3.3:

Una funció **exponencial** *és una funció de la forma $f(x) = a^x$, on $a > 0$ s'anomena la* **base** *i x és l'***exponent**.

Exemple 8.3.6 En la Figura 8.3.5 es representen gràficament les funcions $f(x) = 2^x$ i $g(x) = (1/2)^x$.

x	$f(x)$
-3	$1/8$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4

$f(x) = a^x$ amb $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = a^x$ amb $0 < a < 1$

x	$g(x)$
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$

Figura 8.3.5: Gràfiques de $f(x) = 2^x$ i $g(x) = (1/2)^x$.

Definició 8.3.4:

Una funció **logarítmica** *és una funció de la forma* $f(x) = \log_a(x)$, *on* $a > 0$, $a \neq 1$ *s'anomena la* **base**.

La funció logarítmica és la funció inversa de la funció exponencial; és a dir, $\log_a(a^x) = x$.

Exemple 8.3.7 En la Figura 8.3.6 es representen gràficament els funcions $f(x) = \log_2(x)$ i $g(x) = \log_{1/2}(x)$.

Com que la funció logarítmica i la funció exponencial són funcions inverses tenim que si $y = a^x$, llavors $\log_a(y) = \log_a(a^x) = x$. Així doncs, la gràfica de la funció logarítmica s'obté de la gràfica de la funció exponencial, però pensant la x com a variable dependent i la y com a variable independent (recordeu que la variable independent sempre es posa a l'eix OX i la variable dependent a l'eix OY); és a dir, la gràfica de la funció logarítmica s'obté de la gràfica de la funció exponencial intercanviant els eixos horitzontal i vertical. Això sempre es donarà en les funcions inverses.

$f(x) = \log_a(x)$ amb $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = \log_a(x)$ amb $0 < a < 1$

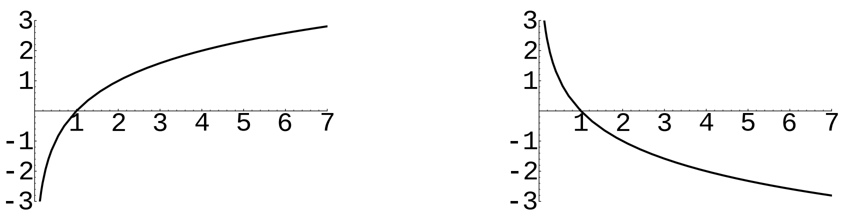


Figura 8.3.6: Gràfiques de $f(x) = \log_2(x)$ i $g(x) = \log_{1/2}(x)$.

Si representem en una mateixa gràfica les funcions $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \log_2(x)$ (vegeu la Figura 8.3.7) veiem que les gràfiques d'aquestes funcions són simètriques respecte la bisectriu del primer quadrant (és a dir, la recta $y = x$). Aquest fet sempre es donarà en funcions inverses.

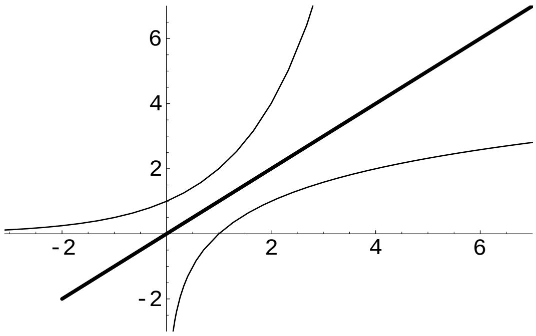


Figura 8.3.7: Gràfiques de $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \log_2(x)$.

8.3.4 Funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques que considerarem aquí són la funció **sinus** $f(x) = \sin x$, la funció **cosinus** $f(x) = \cos x$ i la funció **tangent** $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Nota: Sempre que treballem amb funcions trigonomètriques prendrem la unitat angular en radians.

Definició 8.3.5:

Una funció f és **periòdica** *de* **període** T *si*

$$f(x+T) = f(x)$$

per a tots els x tals que x i $x+T$ estan dins el domini de f.

Les funcions $\sin x$ i $\cos x$ són periòdiques de període 2π i la funció $\tan x$ és periòdica de període π.

Definició 8.3.6:

Una funció f direm que presenta una simetria **parell** *si*

$$f(x) = f(-x)$$

per a tots els x del domini de f. Aquesta simetria representa una simetria respecte l'eix OY.

Definició 8.3.7:

Una funció f direm que presenta una simetria **senar** *si*

$$f(x) = -f(-x)$$

per a tots els x del domini de f. Aquesta simetria representa una simetria respecte l'origen de coordenades.

Representació gràfica de les funcions $\sin x$ *i* $\cos x$

Per a representar gràficament les funcions $\sin x$ i $\cos x$, només cal conèixer els valors que prenen aquestes funcions a l'interval $[0, \pi/2]$, la resta de valors es poden aconseguir a partir de les propietats de les funcions trigonomètriques. En efecte,

- Aplicant la propietat $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ obtenim els valors de la funció $\sin x$ al interval $[\pi/2, \pi]$, a més es pot veure que aquesta propietat implica que $\sin x$ presenta una simetria respecte la recta vertical que passa per $x = \pi/2$.
- Aplicant la propietat $\sin(x) = -\sin(-x)$ obtenim els valors de la funció $\sin x$ al interval $[-\pi, 0]$, a més es pot veure que aquesta propietat implica que $\sin x$ presenta una simetria imparell.
- La resta de valors de la funció $\sin x$ s'obtenen aplicant la periodicitat de la funció.
- Aplicant la propietat $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$ obtenim els valors de la funció $\cos x$ al interval $[\pi/2, \pi]$. Aquesta propietat implica que $\cos x$ presenta una simetria respecte el punt $(\pi/2, 0)$.
- Aplicant la propietat $\cos(x) = \cos(-x)$ obtenim els valors de la funció $\cos x$ al interval $[-\pi, 0]$, a més es pot veure que aquesta propietat implica que $\cos x$ presenta una simetria parell.
- La resta de valors de la funció $\cos x$ s'obtenen aplicant la periodicitat de la funció.

La representació gràfica de les funcions $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ es dóna a la Figura 8.3.8.

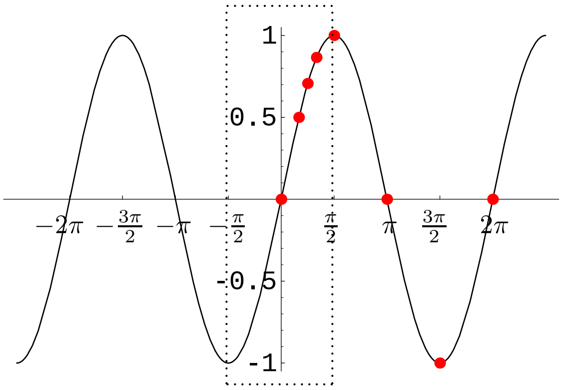
Observeu que la representació gràfica del $\cos x$ és exactament la mateixa que la del $\sin x$ però desplaçada $\pi/2$ unitats a la dreta. Això implica que $\sin(x + \pi/2) = \cos x$.

Representació gràfica de la funció $\tan x$

Per a representar gràficament la funció tangent només cal conèixer els valors d'aquesta funció a l'interval $[0, \pi/2)$. Tal i com passava amb les funcions sinus i cosinus, la resta de valors es poden

x	$f(x)$
0	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0

x	$g(x)$
0	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$
$\pi/2$	0
π	-1
$3\pi/2$	0
2π	1



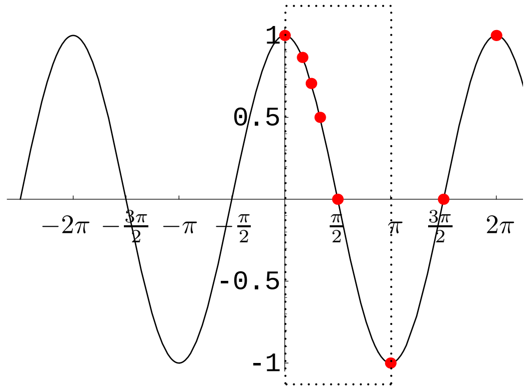


Figura 8.3.8: Gràfiques de $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$.

obtenir a partir de les propietats de funcions trigonomètriques. En particular, a partir de la propietat $\tan(x) = -\tan(-x)$ obtenim els valors de la tangent a l'interval $(-\pi/2, 0)$ i a més veiem que la funció tangent és una funció senar. La resta de valors s'obtenen per periodicitat.

La representació gràfica de la funció $f(x) = \tan x$ es dóna a la Figura 8.3.9.

x	$f(x)$
0	0
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	—

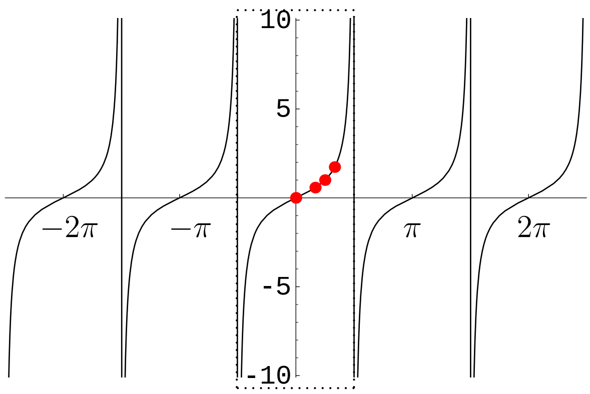


Figura 8.3.9: Gràfica de $f(x) = \tan x$.

8.3.5 Funcions trigonomètriques inverses

Les funcions trigonomètriques sinus, cosinus i tangent no són funcions injectives a tot $\mathbb{R}$. Així doncs, no podrem trobar la funció inversa d'aquestes a tot $\mathbb{R}$. No obstant podem prendre un interval on la funció sigui injectiva i trobar la inversa de la funció en aquest interval. Els intervals que prendrem són els que estan dins els requadres de les Figures 8.3.8 i 8.3.9.

Representació gràfica de les funcions arsinus i arcosinus

La funció $f(x) = \arcsin x$ és la funció inversa de la funció $\sin x$ a l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$. La funció $g(x) = \arccos x$ és la funció inversa de la funció $\cos x$ a l'interval $[0, \pi.]$. Les gràfiques d'aquestes funcions es donen a la Figura 8.3.10.

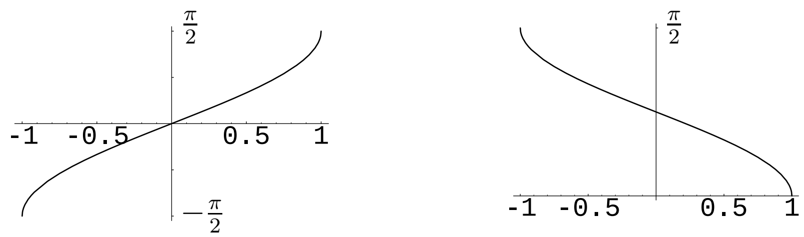


Figura 8.3.10: Gràfiques de $f(x) = \arcsin x$ i $g(x) = \arccos x$.

La funció $f(x) = \arctan x$ és la funció inversa de la funció $\tan x$ a l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$. La gràfica d'aquesta funció es donen a la Figura 8.3.11.

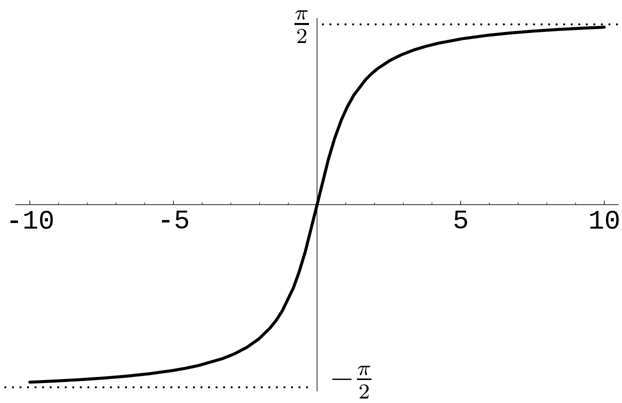


Figura 8.3.11: Gràfica de $f(x) = \arctan x$.

Exercicis d'autoavaluació

1. Si f, g, h són funcions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definides a partir de les expressions :

$f(x) = x^2 + 1$ $\qquad g(x) = 3x - 1$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Trobeu les expressions de : (fof), (fog), (gof), $ho(gof)$, $(hog)of$, f^2og.

Solució

$(fof)(x) = f^2(x) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

$(fog)(x) = (3x-1)^2 + 1 = 9x^2 - 6x + 2$

$(gof)(x) = 3(x^2+1) - 1 = 3x^2 + 2$

$$(ho(gof))(x) = \frac{1}{1 + (3(x^2+1)-1)^2} = \frac{1}{9x^4 + 12x^2 + 5}$$

$$((hog)of)(x) = \frac{1}{1 + (3(x^2+1)-1)^2} = \frac{1}{9x^4 + 12x^2 + 5}$$

$(f^2og)(x) = ((3x-1)^2+1)^2 + 1 = 81x^4 - 108x^3 + 72x^2 - 24x + 5$

2. Expressar les següents funcions com a suma, producte i/o composició de f, g, h amb $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ i $h(x) = \sin x$

a) $F(x) = 2^{\sin x}$

b) $F(x) = 2^{2^x}$

c) $F(x) = \sin(2^x)$

d) $F(x) = \sin(2^x + x^2)$

e) $F(x) = \sin(x^2)$

f) $F(x) = \sin(\sin(\sin 2^{2^{\sin x}}))$

g) $F(x) = \sin^2(x)$

h) $F(x) = 2^{(\sin^2(x))} + \sin x^2 + \sin 2^x$

Solució

a) $F(x) = (g \circ h)(x)$

b) $F(x) = (g \circ g)(x)$

c) $F(x) = (h \circ g)(x)$

d) $F(x) = (h \circ (g + f))(x)$

e) $F(x) = (h \circ f)(x)$

f) $F(x) = (h \circ h \circ h \circ g \circ g \circ h)(x)$

g) $F(x) = (f \circ h)(x)$

h) $F(x) = ((g \circ f \circ h) + (h \circ f) + (h \circ g))(x)$

3. Trobeu les composicions gof i fog

a) $f(x) = \dfrac{6+x-x^2}{x^2-x-2}$ i $g(x) = \ln x$

b) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$ i $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\cos x - \frac{1}{2}}$ i $g(x) = \ln x$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}}$ i $g(x) = \arcsin x$

Solució

a) $(g\circ f)(x) = \ln\left(\dfrac{6+x-x^2}{x^2-x-2}\right)$ $\quad (f\circ g)(x) = \dfrac{6+\ln x-\ln^2 x}{\ln^2 x-\ln x-2}$

b) $(g\circ f)(x) = \sqrt{\cos\dfrac{x}{3}}$ $\quad (f\circ g)(x) = \cos\dfrac{\sqrt{x}}{3}$

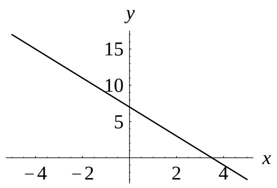
c) $(g\circ f)(x) = \ln\left(\dfrac{1-\cos x}{\cos x-\frac{1}{2}}\right)$ $\quad (f\circ g)(x) = \dfrac{1-\cos\ln x}{\cos\ln x-\frac{1}{2}}$

d) $(g\circ f)(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}}$ $\quad (f\circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{\arcsin^2 x-1}{2}}$

4. Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $(3,1)$ i té pendent -2. Dibuixeu la recta.

Solució

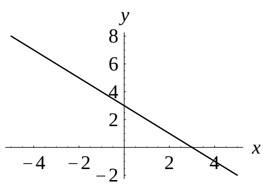
$y = -2x + 7$



5. Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts $(2,1)$ i $(-1,4)$. Dibuixeu la recta.

Solució

$y = -x + 3$



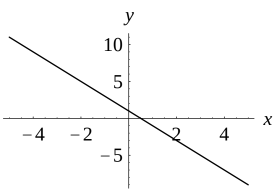
6.

Representeu gràficament les següents funcions:

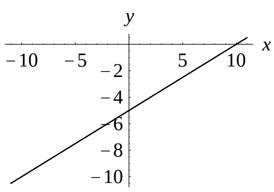
a) $f(x) = -2x + 1$	b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$	c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
d) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$	e) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$	f) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
g) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$	h) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$	i) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$
j) $f(x) = e^{-1/2x}$	k) $f(x) = \ln(x-1)$	l) $f(x) = 3\sin(2x)$
m) $f(x) = -2\cos(3x)$	n) $f(x) = \sin^2 x$	o) $f(x) = \arctan x^2$

Solució

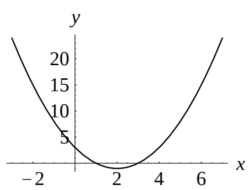
A més de la representació gràfica, es dóna la informació més rellevant de cada funció.



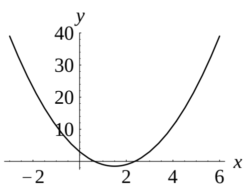
a) $y = -2x + 1$
zero: $x = 1/2$
pendent: -2
punt tall eix y: $(0, 1)$



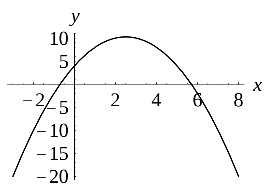
b) $y = \frac{1}{2}x - 5$
zero: $x = 10$
pendent: $1/2$
punt tall eix y: $(0, -5)$



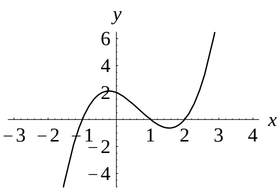
c) $y = x^2 - 4x + 3$
zeros: $x = 1$ i $x = 3$
vèrtex: $(2, -1)$
punt tall eix y: $(0, 3)$



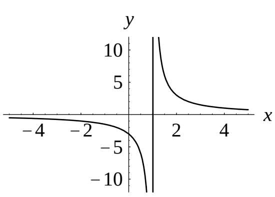
d) $y = 2x^2 - 6x + 3$
zeros: $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{3})$
vèrtex: $(3/2, -3/2)$
punt tall eix y: $(0, 3)$



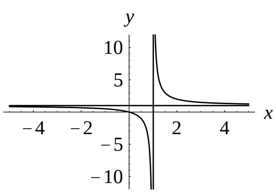
e) $y = -x^2 + 5x + 4$
zeros: $x = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{41})$
vèrtex: $(5/2, 41/4)$
punt tall eix y: $(0, 4)$



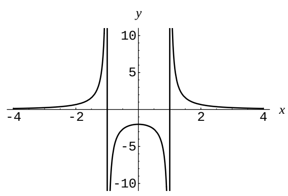
f) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$
zeros: $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$
màxim‡: $(\frac{1}{3}(2-\sqrt{7}), \frac{2}{27}(10+7\sqrt{7}))$
mínim‡: $(\frac{1}{3}(2+\sqrt{7}), \frac{2}{27}(10-7\sqrt{7}))$
punt tall eix y: $(0, 2)$



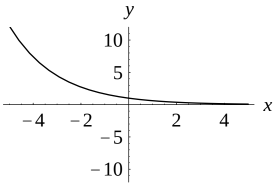
g) $y = \dfrac{3}{x-1}$
asímptota vertical§: $x = 1$
asímptota horitzontal♯: $y = 0$
punt tall eix y: $(0, -3)$



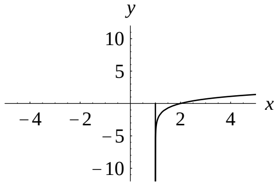
h) $y = \dfrac{x}{x-1}$
asímptota vertical: $x = 1$
asímptota horitzontal: $y = 1$
zeros: $x = 0$
punt tall eix y: $(0, -1)$



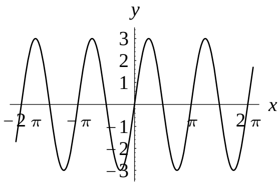
i) $y = \dfrac{2}{x^2-1}$
asímptotes verticals: $x = 1$ i $x = -1$
asímptota horitzontal: $y = 0$
punt tall eix y: $(0, -2)$



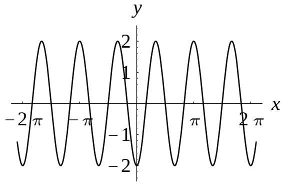
j) $y = e^{-1/2x}$



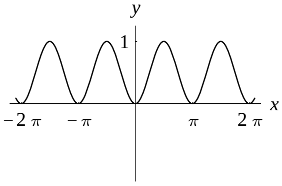
k) $y = \ln(x-1)$



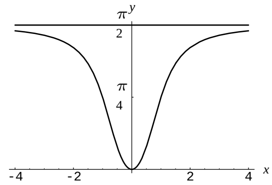
l) $y = 3\sin(2x)$



m) $y = -2\cos(3x)$



n) $y = \sin^2 x$



o) $y = \arctan x^2$

‡ Com que f és una funció polinòmica, els possibles màxims o mínims de f són els zeros de la funció derivada (el càlcul de derivades es veu a la Unitat 9). Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$, aleshores $x = a$ és un mínim relatiu. Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$, aleshores $x = a$ és un màxim relatiu. Podeu trobar més informació sobre el càlcul d'extrems relatius a qualsevol llibre de matemàtiques de batxillerat.

§ Direm que f té una asímptota vertical en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ i $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$. A batxillerat es veu com calcular aquests límits. També es veurà en l'assignatura de matemàtiques.

♯ Direm que f té una asímptota horitzontal en $y = b$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Glossari de termes

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.