UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 7. Resolució de sistemes d'equacions

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 7. Resolució de sistemes d'equacions

7.1 Definicions

Definició 7.1.1:

Un **sistema d'equacions** *amb n equacions i n incògnites $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és una expressió de la forma*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{7.1.1}$$

on $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és una aplicació de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ per a tot $i = 1, \ldots, n$.

Resoldre el sistema (7.1.1) consisteix en trobar els valors de $x_1, \ldots, x_n$ que satisfan les n equacions de (7.1.1) simultàniament. Aquests valors de $x_1, \ldots, x_n$ s'anomenen **solució** del sistema.

Si les aplicacions $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ són lineals; és a dir,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

amb $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per $i, j = 1, \ldots, n$ llavors direm que tenim un **sistema d'equacions lineals**.

Definició 7.1.2:

Dos sistemes són **equivalents** *si i només si tenen les mateixes solucions.*

A continuació donem algunes transformacions que ens donen sistemes equivalents.

7.1.1 Transformacions elementals

S1 Si es substitueix una de les equacions del sistema per una equació equivalent, s'obté un sistema equivalent.

S2 Si a una equació se li'n suma una altra, s'obté un sistema equivalent.

En el següents exemples veurem algunes tècniques per a resoldre sistemes d'equacions lineals i no lineals.

7.2 Sistemes d'equacions lineals

Exemple 7.2.1 Resoldre el sistema $\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 2x - 9y = -5 \end{cases}$

a) **Mètode de substitució:** consisteix en aïllar una de les incògnites d'una de les equacions i substituir-la a l'altra. Així obtenim una equació amb una sola incògnita que sabem resoldre.

Aïllem x de la primera equació: $3x + 7y = 13 \dashrightarrow 3x = 13 - 7y \dashrightarrow x = \dfrac{13 - 7y}{3}$.

Substituïm la x que hem trobat a la segona equació i resolem l'equació que ens queda

$$2\left(\frac{13 - 7y}{3}\right) - 9y = -5 \dashrightarrow 2(13 - 7y) - 27y = -15 \dashrightarrow 26 - 14y - 27y = -15$$
$$\dashrightarrow -14y - 27y = -15 - 26 \dashrightarrow -41y = -41 \dashrightarrow y = 1.$$

Trobem el valor de x substituint el valor de y que hem trobat a l'expressió de x

$$x = \frac{13 - 7}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

La solució del sistema és $x = 2$ i $y = 1$.

b) **Mètode d'igualació:** consisteix en aïllar una de les incògnites de les dues equacions i igualar-les. Així també obtenim una equació amb una sola incògnita que sabem resoldre.

Aïllem x de les dues equacions: $\begin{cases} 3x + 7y = 13 \dashrightarrow x = \frac{13-7y}{3} \\ 2x - 9y = -5 \dashrightarrow x = \frac{-5+9y}{2} \end{cases}$.

Igualem les x i resolem l'equació que ens queda

$$\frac{13 - 7y}{3} = \frac{-5 + 9y}{2} \dashrightarrow 2(13 - 7y) = 3(-5 + 9y) \dashrightarrow 26 - 14y = -15 + 27y$$
$$\dashrightarrow 41y = 41 \dashrightarrow y = 1.$$

Trobem el valor de x substituint el valor de y que acabem de trobar a una de les expressions de x

$$x = \frac{13 - 7}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

La solució del sistema és $x = 2$ i $y = 1$.

c) **Mètode de reducció:** consisteix en fer transformacions elementals al sistema inicial fins a obtenir un sistema equivalent que resulti més fàcil de resoldre.

$$\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 2x - 9y = -5 \end{cases} \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \begin{cases} -6x - 14y = -26 \\ 6x - 27y = -15 \end{cases} \overset{(*2)}{\dashrightarrow} \begin{cases} -6x - 14y = -26 \\ -41y = -41 \end{cases}$$

(*1) Multipliquem la primera equació per -2 i la segona per 3.

(*2) A la segona equació li sumem la primera.

Resolem el nou sistema d'equacions.

De la segona equació trobem $y = 1$.

Trobem x substituint el valor de y a la primera equació

$$-6x - 14y = -26 \dashrightarrow -6x - 14 = -26 \dashrightarrow -6x = -12 \dashrightarrow x = 2.$$

La solució del sistema és $x = 2$ i $y = 1$.

Exemple 7.2.2 Resoldre el sistema $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - 5y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -20 \end{cases}$.

Podem resoldre'l per qualsevol dels mètodes exposats a l'exemple anterior. En aquest cas fem servir el mètode de substitució.

Aïllem la incògnita x de la primera equació: $x = 4 - 3y - 2z$.

Substituïm la x que hem trobat a les dues equacions que ens queden i obtenim un sistema amb dues equacions i dues incògnites que podem resoldre com a l'exemple anterior.

$$\begin{cases} 2(4 - 3y - 2z) - 5y - 3z = 3 \\ 3(4 - 3y - 2z) + 4y - 5z = -20 \end{cases} \dashrightarrow \begin{cases} 8 - 6y - 4z - 5y - 3z = 3 \\ 12 - 9y - 6z + 4y - 5z = -20 \end{cases}$$

$$\dashrightarrow \begin{cases} -11y - 7z = -5 \\ -5y - 11z = -32 \end{cases}$$

Aïllem la y de la primera equació: $y = \dfrac{5 - 7z}{11}$.

Substituïm la y a la segona equació i trobem la z

$$-5\left(\frac{5 - 7z}{11}\right) - 11z = -32 \dashrightarrow -5(5 - 7z) - 121z = -352$$

$$\dashrightarrow -25 + 35z - 121z = -352 \dashrightarrow -86z = -327 \dashrightarrow z = \frac{327}{86}.$$

Trobem el valor de y substituint el valor de z que hem trobat a l'expressió de y

$$y = \frac{5 - 7\left(\frac{327}{86}\right)}{11} = \frac{\frac{430-2289}{86}}{11} = \frac{-1859}{946} = -\frac{169}{86}.$$

Trobem el valor de x substituint els valors de y i z que hem trobat a l'expressió de x

$$x = 4 - 3\left(\frac{-169}{86}\right) - 2\left(\frac{327}{86}\right) = \frac{344 + 507 - 654}{86} = \frac{197}{86}.$$

La solució del sistema d'equacions és $x = \dfrac{197}{86}$, $y = -\dfrac{169}{86}$ i $z = \dfrac{327}{86}$.

7.3 Sistemes d'equacions no lineals

Exemple 7.3.1 a) Resolució del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = 14 \end{cases}$.

Observem que la segona equació del sistema és una equació lineal. Així doncs, serà fàcil aïllar una de les incògnites d'aquesta equació. En aquest cas aïllem la x: $x = 14 - y$.
Substituïm el valor de x que acabem de trobar a la primera equació i resolem l'equació de grau 2 en y que ens queda

$$(14-y)^2 + y^2 = 100 \dashrightarrow 196 - 28y + y^2 + y^2 = 100 \dashrightarrow 2y^2 - 28y + 96 = 0$$

$$\overset{(*1)}{\dashrightarrow} \quad y^2 - 14y + 48 = 0 \dashrightarrow y = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2} = \begin{cases} 8 \\ 6 \end{cases}$$

(*1) Per simplificar els càlculs, dividim tota l'equació per 2.

Hem obtingut dos valors de y. Per a cada valor de y trobem el valor de x corresponent substituint el valor de y a l'expressió de x que havíem trobat

$$\begin{array}{lcl} y = 8 & \dashrightarrow & x = 14 - 8 = 6 \\ y = 6 & \dashrightarrow & x = 14 - 6 = 8 \end{array}$$

Les solucions del sistema d'equacions són: $\begin{cases} x = 6, \ y = 8 \\ x = 8, \ y = 6 \end{cases}$

b) Resolució del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$

Aquest sistema es pot resoldre de varies maneres. Una opció seria la següent: fent el canvi de variables $X = x^2$ i $Y = y^2$ s'obté un sistema de dues equacions lineals en les incògnites X i Y que es pot resoldre com a l'Exemple 7.2.1. Després desfent el canvi obtenim x i y.

Aquí resoldrem sistema directament per reducció.

Si a la segona equació del sistema li sumem la primera, obtenim el sistema d'equacions $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x^2 = 18 \end{cases}$

que és equivalent a l'inicial i és més fàcil de resoldre.

Resolem la segona equació del nou sistema i trobem dos valors de x:

$2x^2 = 18 \dashrightarrow x^2 = 9 \dashrightarrow x = \pm 3.$

Per a cada valor de x trobem el valor de y corresponent substituint el valor de x a la primera equació

$$\begin{array}{l} x = 3 \dashrightarrow 3^2 + y^2 = 10 \dashrightarrow y^2 = 1 \dashrightarrow y = \pm 1 \\ x = -3 \dashrightarrow (-3)^2 + y^2 = 10 \dashrightarrow y^2 = 1 \dashrightarrow y = \pm 1 \end{array}$$

El sistema té 4 solucions que són: $\begin{cases} x = 3, \ y = 1 \\ x = 3, \ y = -1 \\ x = -3, \ y = 1 \\ x = -3, \ y = -1 \end{cases}$

Exercicis d'autoavaluació

1. Resoleu els següents sistemes d'equacions.

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=14 \\ 5x-4y=5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y=4 \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{13}{3} \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x+4y=3 \\ x-2y=0 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3=0 \\ 2x-5=0 \\ x+y=1 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=12 \\ 2x+y-z=3 \\ x+y+3z=-4 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=3 \\ 3x+y+z=6 \end{array}\right.$

h) $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{array}\right.$

i) $\left\{\begin{array}{l} 2x^2-3y^2=-1 \\ 2x-3y=-1 \end{array}\right.$

Solució

a) $x=3, \quad y=5/2$

b) $x=6, \quad y=4$

c) $x=1-y$

d) $x=3/4, \quad y=3/8$

e) No té solucions

f) $x=-5, \quad y=10, \quad z=-3$

g) $x=5/2, \quad y=-1/2, \quad z=-1$

h) $x=1,\ y=2,$
$x=-1,\ y=-2,$
$x=2,\ y=1,$
$x=-2,\ y=-1$

i) $x=1, \quad y=1$

Glossari de termes

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.