UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 5. Resolució d'equacions

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 5. Resolució d'equacions **4**

5.1 Definicions 4

5.1.1 Transformacions elementals d'equacions 4

5.2 Equacions polinòmiques de grau 1 5

5.3 Equacions polinòmiques de grau 2 6

5.3.1 Equacions polinòmiques de grau 2 completes 6

5.3.2 Equacions polinòmiques de grau 2 incompletes 7

5.4 Equacions polinòmiques de grau superior 8

5.4.1 Resolució d'equacions polinòmiques de grau superior amb solucions enteres i racionals 8

5.4.2 Resolució d'equacions biquadrades 10

5.5 Resolució d'equacions irracionals 11

5.6 Resolució d'equacions racionals 13

5.7 Resolució d'equacions exponencials i logarítmiques 15

5.8 Resolució d'equacions trigonomètriques 17

Exercicis d'autoavaluació **20**

Glossari de termes **25**

Bibliografia **26**

Unitat 5. Resolució d'equacions

5.1 Definicions

Definició 5.1.1:

Una **equació** *és una expressió de la forma*

$$f(x) = g(x), \tag{5.1.1}$$

on f i g són funcions[a] *reals de variable real i l'element desconegut x és la* **incògnita** *de l'equació.*
Les funcions f i g s'anomenen **membres** *de l'equació.*
Si f i g són polinomis llavors direm que l'equació és una **equació polinòmica**.

[a] La definició de funció real de variable real es dóna a la Unitat 8

Resoldre l'equació (5.1.1) consisteix en trobar tots els valors de x que satisfan la igualtat. Aquests valors de x s'anomenen **solució** de l'equació.

Definició 5.1.2:

Dues equacions són **equivalents** *si tenen les mateixes solucions.*

5.1.1 Transformacions elementals d'equacions

S'anomenen **transformacions elementals** aquelles transformacions que passen d'una equació a una altra d'equivalent:

- E1 Si sumem o restem als dos membres d'una equació el mateix nombre, obtenim una equació equivalent.
- E2 Si multipliquem o dividim els dos membres d'una equació per un nombre diferent de zero, obtenim una equació equivalent.
- E3 Si s'eleven els dos membres d'una equació al quadrat, s'obté una nova equació que té almenys les solucions de l'equació inicial. En general, la nova equació no és equivalent a la inicial ja que

pot tenir solucions que no són solucions de l'equació inicial. Per tant formalment E3 no es pot considerar una transformació elemental.

Usant les transformacions elementals, tota equació polinòmica es pot transformar en una equació equivalent de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R} \text{ per a tot } i = 0, 1, \ldots, n.$$

5.2 Equacions polinòmiques de grau 1

La forma general d'una equació polinòmica de grau 1 és

$$ax = b, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \tag{5.2.2}$$

llavors la solució de l'equació és: $x = b/a$ (per obtenir-la hem dividit els dos membres de l'equació per a).

Si l'equació que volem resoldre no ve donada en la forma general llavors haurem d'aplicar les transformacions elementals necessàries per tal d'obtenir una equació en la forma general que sigui equivalent a la inicial.

Exemple 5.2.1 a) $3x + 5 = 0 \overset{(*1)}{\dashrightarrow} 3x = -5 \overset{(*2)}{\dashrightarrow}$ Solució: $x = -5/3$

(*1) Restem 5 als dos membres de l'equació.

(*2) Dividim els dos membres de l'equació per 3.

b) $3(x-1) = 5x + 2 \overset{(*1)}{\dashrightarrow} 3x - 3 = 5x + 2 \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 3x - 3 + 3 - 5x = 5x + 2 + 3 - 5x$

$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} -2x = 5 \overset{(*4)}{\dashrightarrow}$ Solució: $x = -5/2$

(*1) Efectuem el producte $3(x-1)$.

(*2) Sumem 3 i restem $5x$ als dos membres de l'equació.

(*3) Simplifiquem els dos membres de l'equació.

(*4) Dividim els dos membres de l'equació per -2

c) $\dfrac{x+1}{4} + \dfrac{x-3}{2} = 5 - \dfrac{x+3}{2} \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \dfrac{(x+1) + 2(x-3)}{4} = \dfrac{20 - 2(x+3)}{4}$

$\overset{(*2)}{\dashrightarrow} (x+1) + 2(x-3) = 20 - 2(x+3) \overset{(*3)}{\dashrightarrow} x + 1 + 2x - 6 = 20 - 2x - 6$

$\dashrightarrow x + 2x + 2x = 20 - 6 - 1 + 6 \dashrightarrow 5x = 19 \dashrightarrow$ Solució: $x = 19/5$

(*1) Trobem el mínim comú múltiple dels denominadors de tota l'equació, $\mathrm{mcm}\,(4,2,1) = 4$, i sumem les fraccions que apareixen als dos membres de l'equació prenent com a denominador comú el mínim comú múltiple dels denominadors.

(*2) Multipliquem tota l'equació per 4.

(*3) Apliquem transformacions elementals fins a obtenir una equació equivalent en la forma general (5.2.2).

5.3 Equacions polinòmiques de grau 2

5.3.1 Equacions polinòmiques de grau 2 completes

La forma general d'una equació polinòmica de grau 2 és

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \tag{5.3.3}$$

llavors les solucions de l'equació vindran donades per la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Si l'equació que volem resoldre no ve donada en la forma general llavors haurem d'aplicar les transformacions elementals necessàries per tal d'obtenir una equació en la forma general que sigui equivalent a la inicial.

El nombre i tipus de solucions de (5.3.3) dependrà del valor del **discriminant** $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ (veugeu la Taula 5.3.1). Com que en aquest curs d'anivellament no s'estudien els nombres complexos, quan el discriminant és negatiu direm que l'equació no té solució (real).

Discriminant	Nombre i tipus de solucions
$\Delta > 0$	Dues solucions reals diferents
$\Delta = 0$	Una solució real de multiplicitat† 2
$\Delta < 0$	Dues solucions complexes conjugades

Taula 5.3.1: Nombre i tipus de solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ depenent dels valors del discriminant $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
† Direm que $x = \alpha$ és una solució real de multiplicitat 2 de l'equació $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ si la factorització del polinomi $a\,x^2 + b\,x + c$ és $(x - \alpha)^2$ (vegeu la Unitat 3).

Exemple 5.3.1 a) $3x^2 + 5x - 6 = 0$

Solució: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 72}}{6} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{97}}{6} = \begin{cases} \frac{-5+\sqrt{97}}{6} \\ \frac{-5-\sqrt{97}}{6} \end{cases}$

L'equació té dues solucions reals diferents.

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

Solució: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$

L'equació té una solució real, $x = -2$, amb multiplicitat 2.

c) $x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 5 = 0$

Solució: $x = \dfrac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 20}}{2} = \dfrac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}$

L'equació no té solucions reals.

d) $3(x+2)(x+3) = (6x+3)(x+5) - 40x \xrightarrow{(*1)} 3(x^2 + 3x + 2x + 6) = 6x^2 + 30x + 3x + 15 - 40x$

$\xrightarrow{(*2)} 3x^2 + 9x + 6x + 18 - (6x^2 + 30x + 3x + 15 - 40x) = 0 \dashrightarrow -3x^2 + 22x + 3 = 0$

(*1) Efectuem les operacions dels dos membres de l'equació.

(*2) Apliquem transformacions elementals fins a obtenir una equació equivalent en la forma general (5.3.3).

$$\begin{aligned} \text{Solució:} \quad x &= \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 36}}{-6} = \frac{-22 \pm \sqrt{520}}{-6} \\ &= \frac{-22 \pm 2\sqrt{130}}{-6} = \frac{11 \mp \sqrt{130}}{3} = \begin{cases} \frac{11 - \sqrt{130}}{3} \\ \frac{11 + \sqrt{130}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

L'equació té dues solucions reals diferents.

5.3.2 Equacions polinòmiques de grau 2 incompletes

$\boxed{\text{Cas } b = 0}$: La resolució d'una equació de la forma $ax^2 + c = 0$ es pot fer de la següent manera:

$$ax^2 + c = 0 \xrightarrow{(*1)} ax^2 = -c \xrightarrow{(*2)} x^2 = -\frac{c}{a} \xrightarrow{(*3)} x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

(*1) Restem c als dos membres de l'equació.

(*2) Dividim els dos membres de l'equació per a.

(*3) Els valors de x tals que $x^2 = \alpha$ amb $\alpha > 0$ són $x = \sqrt{\alpha}$ i $x = -\sqrt{\alpha}$.

Exemple 5.3.2

a) $2x^2 - 4 = 0 \dashrightarrow 2x^2 = 4 \dashrightarrow x^2 = 2 \dashrightarrow$ Solució: $x = \pm\sqrt{2}$.

b) $2x^2 + 4 = 0 \dashrightarrow 2x^2 = -4 \dashrightarrow x^2 = -2 \dashrightarrow$ Solució: $x = \pm\sqrt{-2}$.

L'equació no té arrels reals.

$\boxed{\text{Cas } c=0}$: La resolució d'una equació de la forma $ax^2+bx=0$ es pot fer de la següent manera:

$$ax^2+bx=0 \quad \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \quad x(ax+b)=0 \quad \overset{(*2)}{\dashrightarrow} \quad \left| \begin{array}{l} x=0, \\ ax+b=0 \quad \overset{(*3)}{\dashrightarrow} \quad x=-b/a. \end{array} \right.$$

(*1) Traiem una x factor comú.

(*2) Tenim el producte de dos nombres igual a zero, llavors o un és zero o l'altre és zero.

(*3) Resolem l'equació $ax+b=0$.

Les solucions de l'equació són $x=0$ i $x=b/a$.

Exemple 5.3.3 $7x^2-5x=0 \quad \dashrightarrow \quad x(7x-5)=0 \quad \dashrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x=0, \\ 7x-5=0 \quad \dashrightarrow \quad x=5/7. \end{array} \right.$

Les solucions de l'equació són $x=0$ i $x=5/7$.

5.4 Equacions polinòmiques de grau superior

La forma general d'una equació polinòmica de grau n és

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R} \text{ per a tot } i=0,1,\ldots,n, \tag{5.4.4}$$

amb $a_n \neq 0$.

Es coneixen fórmules per a resoldre les equacions polinòmiques de grau 3 i de grau 4 però com que són bastant complexes no les veurem. No hi ha cap fórmula general per a resoldre analíticament una equació qualsevol de grau més gran que 4. No obstant, en alguns casos particulars en sabrem trobar les solucions.

5.4.1 Resolució d'equacions polinòmiques de grau superior amb solucions enteres i racionals

Observeu que les solucions de (5.4.4) són les arrels del polinomi $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Així, podem trobar les solucions enteres i racionals d'una equació polinòmica a partir de la factorització del polinomi (vegeu la Unitat 3). Primer amb l'ajuda de la Regla de Ruffini factoritzarem el polinomi i trobem les solucions enteres i/o racionals amb la multiplicitat corresponent. Després trobem la resta de les solucions.

Exemple 5.4.1 a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{(*1)} (x-1)(x+3)(x+2) = 0$

$$\xrightarrow{(*2)} \left| \begin{array}{lll} x - 1 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 1 \\ x + 3 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = -3 \\ x + 2 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = -2 \end{array} \right.$$

(*1) Factoritzem el polinomi $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+3)(x+2).$$

(*2) El producte dels tres factors serà igual a zero sempre i quan un d'ells sigui zero.

Les solucions de l'equació són: $x = 1$, $x = -3$ i $x = -2$.

b) $x^3 - 1 = 0 \xrightarrow{(*1)} (x-1)(x^2+x+1) = 0 \xrightarrow{(*2)} \left| \begin{array}{lll} x - 1 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 1 \\ x^2 + x + 1 = 0 & \xrightarrow{(*3)} & \text{No té solució real} \end{array} \right.$

(*1) Factoritzem el polinomi: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

(*2) Igualem a zero cadascun dels factors.

(*3) Resolem l'equació $x^2 + x + 1 = 0$ a partir de la fórmula de resolució d'equacions de segon grau

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \qquad \text{No té solució real}$$

La solució real de l'equació és: $x = 1$.

c) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \xrightarrow{(*1)} (x-1)(x^2-2) = 0 \xrightarrow{(*2)} \left| \begin{array}{lll} x - 1 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 1 \\ x^2 - 2 = 0 & \xrightarrow{(*3)} & \text{Solució: } x = \pm\sqrt{2} \end{array} \right.$

(*1) Factoritzem el polinomi: $x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x^2-2)$

(*2) Igualem cadascun dels factors a zero

(*3) Resolem l'equació $x^2 - 2 = 0$ com a l'Exemple 5.3.2

$$x^2 = 2 \quad \dashrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Les solucions de l'equació són: $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$.

d) $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 = 0 \xrightarrow{(*1)} x^2(x-1)^2(x^2+1) = 0$

$$\xrightarrow{(*2)} \left| \begin{array}{lll} x^2 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 0 \text{ (multiplicitat 2)} \\ (x-1)^2 = 0 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 1 \text{ (multiplicitat 2)} \\ x^2 + 1 = 0 & \xrightarrow{(*3)} & \text{No té solució real} \end{array} \right.$$

(*1) Factoritzem el polinomi $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2$. Com que aquest polinomi no té terme independent primer podem treure x^2 factor comú i després factoritzar el polinomi que en resulta.

$$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2(x^2+1).$$

(*2) Igualem cadascun dels factors a zero.

(*3) Resolem l'equació $x^2 + 1 = 0$ com a l'Exemple 5.3.2.

$$x^2 + 1 = 0 \quad \dashrightarrow \quad x^2 = -1 \quad \dashrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \qquad \text{No té solució real}$$

Les solucions reals de l'equació són $x = 0$ amb multiplicitat 2 i $x = 1$ amb multiplicitat 2.

e) $x^3+3x^2+3x+1=0 \xrightarrow{(*1)} (x+1)^3=0 \xrightarrow{(*2)} x+1=0 \dashrightarrow$ Solució: $x=-1$ (multiplicitat 3)

(*1) Factoritzem el polinomi: $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$.

(*2) Igualem el factor a zero.

La solució de l'equació és $x=-1$ amb multiplicitat 3.

5.4.2 Resolució d'equacions biquadrades

Una equació **biquadrada** és una equació polinòmica de grau 4 de la forma

$$ax^4+bx^2+c=0, \qquad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0. \tag{5.4.5}$$

Observem que l'equació (5.4.5) es pot expressar de la forma $a\left(x^2\right)^2+b\left(x^2\right)+c=0$, llavors fent el canvi de variable $t=x^2$ obtenim una equació de grau 2 en la variable t que podem resoldre. Desfent el canvi obtindrem la solució en la variable x.

Exemple 5.4.2 a) $x^4-7x^2+12=0 \xrightarrow{(*1)} t^2-7t+12=0$

$$\xrightarrow{(*2)} \quad t=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm 1}{2}=\begin{cases}4\\3\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*3)} \quad \left|\begin{array}{lll} x^2=4 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x=\pm\sqrt{4}=\pm 2\\ x^2=3 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Les solucions de l'equació són: $x=2$, $x=-2$, $x=\sqrt{3}$ i $x=-\sqrt{3}$.

b) $x^4+4x^2-45=0 \xrightarrow{(*1)} t^2+4t-45=0$

$$\xrightarrow{(*2)} \quad t=\frac{-4\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{-4\pm 14}{2}=\begin{cases}5\\-9\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*3)} \quad \left|\begin{array}{lll} x^2=5 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x=\pm\sqrt{5}\\ x^2=-9 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x=\pm\sqrt{-9}\ \text{(No té solucions reals)}\end{array}\right.$$

Les solucions reals de l'equació són $x=\sqrt{5}$ i $x=-\sqrt{5}$.

c) $x^4-4x^2+13=0 \xrightarrow{(*1)} t^2-4t+13=0$

$$\xrightarrow{(*2)} \quad t=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2} \quad \text{No té solucions reals}$$

L'equació no té solucions reals.

(*1) Fem el canvi $t=x^2$.

(*2) Resolem l'equació polinòmica de grau 2 en la variable t.

(*3) Desfem el canvi.

Hi ha altres equacions que no són exactament biquadrades però admeten un tractament semblant.

Exemple 5.4.3 $x^6 + 6x^3 - 16 = 0$

Aquesta equació no és biquadrada però es pot escriure com una equació de la forma

$$\left(x^3\right)^2 + 6\left(x^3\right) - 16 = 0.$$

Així doncs podem fer el canvi $t = x^3$ i procedir de manera semblant a les equacions biquadrades.

$$x^6 + 6x^3 - 16 = 0 \quad \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \quad t^2 + 6t - 16 = 0 \quad \overset{(*2)}{\dashrightarrow} \quad t = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} 2 \\ -8 \end{cases}$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} \quad \left| \begin{array}{lll} x^3 = 2 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = \sqrt[3]{2} \\ x^3 = -8 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = \sqrt[3]{-8} = -2 \end{array} \right.$$

Les solucions reals de l'equació són: $x = \sqrt[3]{2}$ i $x = -2$.

(*1) Fem el canvi $t = x^3$.
(*2) Resolem l'equació polinòmica de grau 2 en la variable t.
(*3) Desfem el canvi.

5.5 Resolució d'equacions irracionals

Una **equació irracional** és una equació en la qual la incògnita apareix dins d'una arrel.

Aquí només veurem com resoldre equacions irracionals on l'arrel és una arrel quadrada. Aquestes equacions es poden transformar en equacions polinòmiques mitjançant transformacions del tipus E3 (vegeu la pàgina 4).

Exemple 5.5.1 a) $\sqrt{5-x} = \sqrt{x+3}$

- Elevem els dos membres de l'equació al quadrat per tal de treure les arrels

$$\left(\sqrt{5-x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \quad \dashrightarrow \quad 5 - x = x + 3$$

- Resolem l'equació que obtenim. En general aquesta nova equació no és equivalent a l'equació inicial, però si que té les solucions de la inicial.

$$5 - x = x + 3 \quad \dashrightarrow \quad \text{Solució: } x = 1$$

– Comprovem que la solució obtinguda és solució de l'equació inicial.

$$\sqrt{5-1} = \sqrt{1+3} \quad \dashrightarrow \quad \sqrt{4} = \sqrt{4}$$

Per tant $x = 1$ és solució de l'equació inicial.

La solució de l'equació $\sqrt{5-x} = \sqrt{x+3}$ és: $x = 1$.

b) $\sqrt{x+3} + x - 2 = 1$

– Passem l'arrel a una banda de la igualtat i tot el que no té arrel a l'altra

$$\sqrt{x+3} = 1 - x + 2 \quad \dashrightarrow \quad \sqrt{x+3} = 3 - x.$$

– Elevem els dos membres de l'equació al quadrat per treure l'arrel i resolem l'equació obtinguda

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (3-x)^2 \quad \dashrightarrow \quad x + 3 = 9 - 6x + x^2 \quad \dashrightarrow \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\dashrightarrow \quad \text{Solució: } x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}.$$

– Comprovem que les solucions que hem obtingut són solució de l'equació inicial (per simplificar els càlculs podem prendre l'equació $\sqrt{x+3} = 3 - x$ que és equivalent a l'equació inicial)

$$\sqrt{6+3} = 3 - 6 \quad \dashrightarrow \quad 3 \neq -3 \quad \dashrightarrow \quad x = 6 \text{ no és solució de l'equació inicial}$$

$$\sqrt{1+3} = 3 - 1 \quad \dashrightarrow \quad 2 = 2 \quad \dashrightarrow \quad x = 1 \text{ és solució de l'equació inicial}$$

La solució de l'equació $\sqrt{x+3} + x - 2 = 1$ és $x = 1$.

c) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} - 1 = 0$

– Deixem les arrels a una banda de la igualtat i tot el que no té arrel a l'altre

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \quad \dashrightarrow \quad \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1.$$

– Elevem els dos membres de l'equació al quadrat

$$\left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1}\right)^2 = (1)^2 \quad \dashrightarrow \quad \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 - 2\sqrt{3x+1}\sqrt{2x-1} + \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = 1$$

$$\dashrightarrow \quad 3x + 1 - 2\sqrt{(3x+1)(2x-1)} + 2x - 1 = 1.$$

Hem obtingut una equació semblant a la del cas b).

– Resolem l'equació com a l'apartat b)

$$3x+1-2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}+2x-1=1$$

$$\xrightarrow{(*1)} \quad 3x+1+2x-1-1=2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}$$

$$\longrightarrow \quad 5x-1=2\sqrt{6x^2-x-1}$$

$$\xrightarrow{(*2)} \quad (5x-1)^2=\left(2\sqrt{6x^2-x-1}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad 25x^2-10x+1=4(6x^2-x-1)$$

$$\xrightarrow{(*3)} \quad x^2-6x+5=0 \quad \longrightarrow \quad \text{Solució: } x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}5\\1\end{cases}$$

(*1) Deixem l'arrel a una banda i passem tot el que no té arrel a l'altre.

(*2) Elevem els dos membres de l'equació al quadrat.

(*3) Resolem l'equació de grau 2 que hem obtingut.

– Comprovem que les solucions que hem obtingut són solucions de l'equació inicial

$$\sqrt{3\cdot 5+1}-\sqrt{2\cdot 5-1}=1 \quad \longrightarrow \quad 4-3=1 \quad \longrightarrow \quad x=5 \text{ és solució}$$

$$\sqrt{3\cdot 1+1}-\sqrt{2\cdot 1-1}=1 \quad \longrightarrow \quad 2-1=1 \quad \longrightarrow \quad x=1 \text{ és solució}$$

Les solucions de l'equació $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}-1=0$ són $x=1$ i $x=5$.

5.6 Resolució d'equacions racionals

Les equacions **racionals** són equacions que contenen fraccions algèbriques. Aquest tipus d'equacions es poden transformar en equacions polinòmiques a partir de transformacions del tipus E1 i E2 (vegeu la pàgina 4) i operant amb fraccions algèbriques.

Exemple 5.6.1 a) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x}=-2$

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x}=-2 \quad \xrightarrow{(*1)} \quad \frac{3x+2(x-1)}{x(x-1)}=-2 \quad \xrightarrow{(*2)} \quad 3x+2(x-1)=-2x(x-1)$$

$$\xrightarrow{(*3)} \quad 3x+2x-2=-2x^2+2x \quad \longrightarrow \quad 2x^2+3x-2=0$$

$$\longrightarrow \quad \text{Solució: } x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-2\end{cases}$$

(*1) Sumem les fraccions algèbriques del membre de la part esquerra de l'equació.

(*2) Multipliquem els dos membres de l'equació per $x(x-1)$. Això només té sentit si $x \neq 0$ i $x-1 \neq 0$ (és a dir, $x \neq 1$).

(*3) Resolem l'equació polinòmica que hem obtingut.

Falta comprovar que les solucions que hem obtingut són realment solució de l'equació inicial; és a dir, són solucions que satisfan les condicions de l'anotació (*2) o dit d'una altra manera, que no anulen els denominadors. En aquest cas és així.

Les solucions de l'equació inicial són $x = 1/2$ i $x = -2$.

b) $\dfrac{4x-8}{x-2} + \dfrac{5}{x} = 1$

$$\frac{4x-8}{x-2} + \frac{5}{x} = 1 \quad \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \quad \frac{(4x-8)x + 5(x-2)}{x(x-2)} = 1$$

$$\overset{(*2)}{\dashrightarrow} \quad (4x-8)x + 5(x-2) = x(x-2) \quad \overset{(*3)}{\dashrightarrow} \quad 4x^2 - 8x + 5x - 10 = x^2 - 2x$$

$$\dashrightarrow \quad 3x^2 - x - 10 = 0 \quad \dashrightarrow \quad \text{Solució: } x = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

(*1) Sumem les fraccions algèbriques del membre de la part esquerra de l'equació.

(*2) Multipliquem els dos membres de l'equació per $x(x-2)$. Això només té sentit si $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

(*3) Resolem l'equació polinòmica que obtenim.

La solució $x = 2$ anula el denominador, així doncs la solució de l'equació inicial és $x = -5/3$.

c) $\dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{24}{x^2-16} - \dfrac{1}{x-4}$

$$\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{24}{x^2-16} - \frac{1}{x-4} \quad \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \quad \frac{(x+4)^2 - (x-4)^2}{(x+4)(x-4)} = \frac{24 - (x+4)}{(x+4)(x-4)}$$

$$\overset{(*2)}{\dashrightarrow} \quad (x+4)^2 - (x-4)^2 = 24 - (x+4)$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} \quad x^2 + 8x + 16 - x^2 + 8x - 16 = 24 - x - 4$$

$$\dashrightarrow \quad 17x = 20 \quad \dashrightarrow \quad \text{Solució: } x = 20/17$$

(*1) Sumem les fraccions algèbriques del membre de la part esquerra i les del membre de la part dreta de l'equació prenent com a denominador comú el mínim comú múltiple dels denominadors de tota l'equació.

$$\text{mcm}\,(x-4, x+4, x^2-16) = (x-4)(x+4).$$

(*2) Multipliquem els dos membres de l'equació per $(x+4)(x-4)$. Això només té sentit si $x \neq 4$ i $x \neq -4$.

(*3) Resolem l'equació polinòmica que obtenim.

Com que la solució $x = 20/17$ no anul·la cap denominador és solució de l'equació inicial.

5.7 Resolució d'equacions exponencials i logarítmiques

Una **equació exponencial** (**equació logarítmica**) és una equació en la qual la incògnita apareix afectada d'una exponencial (logaritme). En el següent exemple veurem com resoldre un cert tipus d'equacions exponencials i logarítmiques. En la resolució usarem el fet que l'exponencial i el logaritme són funcions inverses; és a dir,

$$\log_a(a^x) = x, \qquad a^{\log_a(x)} = x. \tag{5.7.6}$$

Exemple 5.7.1 a) $2^{3x+5} = 2^{x-1}$

$$2^{3x+5} = 2^{x-1} \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \log_2\left(2^{3x+5}\right) = \log_2\left(2^{x-1}\right) \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 3x+5 = x-1$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} 2x = -6 \dashrightarrow \text{Solució: } x = -3$$

(*1) Apliquem el logaritme en base 2 als dos membres de l'equació. Com que la funció logaritme es injectiva (la funció logaritme s'estudia a la Unitat 8), es pot veure fàcilment que l'equació que obtenim és una equació equivalent.

(*2) Apliquem la propietat (5.7.6). Observeu que aplicar el logaritme als dos membres de l'equació és equivalent a igualar els exponents.

(*3) Resolem l'equació polinòmica obtinguda.

b) $4^{3x-2} = 64$

$$4^{3x-2} = 64 \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \log_4\left(4^{3x-2}\right) = \log_4(64) \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 3x-2 = \log_4(64) = \log_4\left(4^3\right) = 3$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} 3x = 5 \dashrightarrow \text{Solució: } x = 5/3$$

(*1) Apliquem el logaritme en base 4 als dos membres de l'equació.

(*2) Apliquem la propietat (5.7.6).

(*3) Resolem l'equació polinòmica obtinguda.

c) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117 \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \frac{3^x}{3} + 3^x + 3^x \cdot 3 = 117 \overset{(*2)}{\dashrightarrow} \frac{t}{3} + t + 3t = 117$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} \frac{13}{3}t = 117 \dashrightarrow t = \frac{351}{13} = 27 \overset{(*4)}{\dashrightarrow} 3^x = 27 = 3^3 \overset{(*5)}{\dashrightarrow} \text{Solució: } x = 3$$

(*1) Apliquem les propietats de potències (vegeu la Unitat 1) i escrivim l'equació en funció de les potències de 3^x.

(*2) Fem el canvi de variables $t = 3^x$.

(*3) Resolem l'equació polinòmica que obtenim.

(*4) Desfem el canvi.

(*5) Resolem l'equació exponencial obtinguda.

d) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \overset{(*1)}{\dashrightarrow} (2^x)^2 - 3\,(2^x \cdot 2) + 8 = 0 \overset{(*2)}{\dashrightarrow} t^2 - 3\,(t \cdot 2) + 8 = 0$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} t^2 - 6t + 8 = 0 \dashrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases} \overset{(*4)}{\dashrightarrow}$$

$$\left| \begin{array}{lll} 2^x = 4 = 2^2 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 2 \\ 2^x = 2 = 2^1 & \dashrightarrow & \text{Solució: } x = 1 \end{array} \right.$$

(*1) Apliquem les propietats de potències i escrivim l'equació en funció de les potències 2^x.

(*2) Fem el canvi de variables $t = 2^x$.

(*3) Resolem l'equació polinòmica obtinguda.

(*4) Desfem el canvi.

Exemple 5.7.2 a) $\log_3(5x+2) = \log_3(3x+6)$

$$\log_3(5x+2) = \log_3(3x+6) \overset{(*1)}{\dashrightarrow} 3^{\log_3(5x+2)} = 3^{\log_3(3x+6)} \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 5x + 2 = 3x + 6$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} 2x = 4 \dashrightarrow \text{Solució: } x = 2$$

(*1) Apliquem l'exponencial en base 3 als dos membres de l'equació. Com que la funció exponencial es injectiva l'equació que obtenim és una equació equivalent.

(*2) Apliquem la propietat (5.7.6). Observeu que fer l'exponencial als dos membres de l'equació és equivalent a igualar els arguments del logaritme.

(*3) Resolem l'equació polinòmica obtinguda.

El logaritme només està definit per a nombres positius. Així doncs ens falta comprovar que per $x = 2$ l'equació inicial està definida (és a dir, no tenim cap logaritme d'un nombre negatiu)

$$\log_3(5 \cdot 2 + 2) = \log_3(3 \cdot 2 + 6) \dashrightarrow \log_3(12) = \log_3(12).$$

La solució de l'equació $\log_3(5x+2) = \log_3(3x+6)$ és $x = 2$.

b) $\log_2(5x-4) = 4$

$$\log_2(5x-4) = 4 \overset{(*1)}{\dashrightarrow} 2^{\log_2(5x-4)} = 2^4 \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 5x - 4 = 2^4 = 16$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} 5x = 20 \dashrightarrow \text{Solució: } x = 4$$

(*1) Apliquem l'exponencial en base 2 als dos membres de l'equació.

(*2) Apliquem la propietat (5.7.6).

(*3) Resolem l'equació polinòmica obtinguda.

Comprovem que per $x = 4$ l'equació inicial està definida

$$\log_2(5 \cdot 4 - 4) = 4 \dashrightarrow \log_2(16) = 4.$$

La solució de l'equació $\log_2(5x-4) = 4$ és $x = 4$.

c) $\log x = \log 2 + 2 \cdot \log(x-3)$

$$\log x = \log 2 + 2 \cdot \log(x-3) \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \log x = \log 2 + \log(x-3)^2 = \log\left((x-3)^2 \cdot 2\right)$$

$$\overset{(*2)}{\dashrightarrow} 10^{\log x} = 10^{(x-3)^2 \cdot 2} \overset{(*3)}{\dashrightarrow} x = (x-3)^2 \cdot 2 \overset{(*4)}{\dashrightarrow} x = 2x^2 - 12x + 18$$

$$\dashrightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0 \dashrightarrow \text{Solució: } x = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{4} = \frac{13 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \\ 2 \end{cases}$$

(*1) Apliquem les propietats dels logaritmes (vegeu la Unitat 1) per tal d'expressar l'equació com una equació del tipus estudiat al cas a).

(*2) Apliquem l'exponencial en base 10 als dos membres de l'equació.

(*3) Apliquem la propietat (5.7.6).

(*4) Resolem l'equació polinòmica obtinguda.

Comprovem si per $x = 9/2$ i per $x = 2$ l'equació inicial està definida

$$\log\frac{9}{2} = \log 2 + 2 \cdot \log\left(\frac{9}{2} - 3\right) \dashrightarrow \log\frac{9}{2} = \log 2 + 2 \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right).$$

$$\log 2 = \log 2 + 2 \cdot \log(2-3) \dashrightarrow \log\frac{9}{2} = \log 2 + 2 \cdot \log(-1) \dashrightarrow x = 2 \text{ no és solució}$$

La solució de l'equació $\log x = \log 2 + 2 \cdot \log(x-3)$ és $x = 9/2$.

5.8 Resolució d'equacions trigonomètriques

Una **equació trigonomètrica** és una equació en la qual la incògnita apareix afectada d'una funció trigonomètrica.

No hi ha cap mètode general per a resoldre equacions trigonomètriques. Tot i així anirà bé tenir en compte el següent:

- Si en una mateixa equació hi figuren raons trigonomètriques diferents mirarem de reduir-les a una de sola. Les fórmules que ens serveixen per passar d'una raó trigonomètrica a l'altre són les següents.

a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \dashrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$

b) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}.$

- Si hi figuren angles diferents primer mirarem d'expressar totes les raons trigonomètriques en funció d'un mateix angle. Les propietats de les raons trigonomètriques que necessitarem es troben a la Unitat 2.

Exemple 5.8.1 En tot l'exemple es donarà el resultat en radians.

a) $3\cos^2 x = 2 - \sin x$

$$3\cos^2 x = 2 - \sin x \overset{(*1)}{\dashrightarrow} 3\left(1 - \sin^2 x\right) = 2 - \sin x \dashrightarrow 3 - 3\sin^2 x = 2 - \sin x$$

$$\dashrightarrow 3\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 3t^2 - t - 1 = 0$$

$$\dashrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ \frac{1-\sqrt{1+12}}{6} \end{cases}$$

$$\overset{(*3)}{\dashrightarrow} \left| \begin{array}{lll} t = \sin x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6} & \overset{(*4)}{\dashrightarrow} & x = \begin{cases} 0.875075\cdots + 2k\pi \\ 2.266517\cdots + 2k\pi \end{cases} \\ t = \sin x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6} & \overset{(*5)}{\dashrightarrow} & x = \begin{cases} -0.449214\cdots + 2k\pi \\ 3.590808\cdots + 2k\pi \end{cases} \end{array} \right.$$

(*1) A l'equació hi figuren $\sin x$ i $\cos^2 x$, així el primer que haurem de fer és expressar l'equació en funció d'una sola raó trigonomètrica que pot ser $\sin x$ o $\cos x$. Sabem que $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ i $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Per estalviar-nos de treballar amb arrels deixarem l'equació en funció de $\sin x$.

(*2) Fent el canvi $t = \sin x$, obtenim una equació de grau 2 en la variable t i la resolem.

(*3) Desfem el canvi.

(*4) Hem de trobar tots els valors de x per als quals $\sin x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$.
L'arcsinus i el sinus són funcions inverses. Llavors $x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) = 0.875075\ldots$, però aquest no serà l'únic valor de x que satisfà la igualtat.
A partir de les propietats del sinus tenim que $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ i $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, així doncs, $x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) + 2k\pi$ i $x = \left(\pi - \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\right) + 2k\pi$ també satisfan la igualtat.

(*5) Usant els arguments de l'anotació (*4) tenim que els valors de x per als quals $\sin x = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ són $x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) + 2k\pi$ i $x = \left(\pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\right) + 2k\pi$.

b) $4\cos(2x) + 4\sin^2 x = 1 + 4\sin x$

$$4\cos(2x) + 4\sin^2 x = 1 + 4\sin x \overset{(*1)}{\dashrightarrow} 4\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 4\sin^2 x = 1 + 4\sin x$$

$$\dashrightarrow 4\cos^2 x = 1 + 4\sin x \overset{(*2)}{\dashrightarrow} 4\left(1 - \sin^2 x\right) = 1 + 4\sin x$$

$$\dashrightarrow \quad 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \quad \overset{(*3)}{\dashrightarrow} \quad 4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\dashrightarrow \quad t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \begin{cases} 1/2 \\ -3/2 \end{cases}$$

$$\overset{(*4)}{\dashrightarrow} \quad \left| \begin{array}{l} t = \sin x = \frac{1}{2} \quad \overset{(*5)}{\dashrightarrow} \quad x = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ t = \sin x = -\frac{3}{2} \quad \overset{(*6)}{\dashrightarrow} \quad \text{No té solució real} \end{array} \right.$$

(*1) A l'equació hi figuren raons trigonomètriques de l'angle x i l'angle $2x$. Primer expressem totes les raons trigonomètriques en funció de l'angle x. Això és possible gràcies a la propietat $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

(*2) Tenim una equació semblant a l'equació del cas a). La resolem de manera semblant. Expressem l'equació en funció només de $\sin x$ (usem que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

(*3) Fem el canvi $t = \sin x$ i resolem l'equació de grau 2 que ens queda.

(*4) Desfem el canvi.

(*5) Procedim de manera semblant a l'anotació (*4) del cas a).

(*6) Per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix que $\sin x \in [-1, 1]$. Així doncs, no hi ha cap $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sin x = -3/2$.

c) $4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$$4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad \overset{(*1)}{\dashrightarrow} \quad 4\sin t\cos t = \sqrt{3} \quad \overset{(*2)}{\dashrightarrow} \quad 2\sin(2t) = \sqrt{3}$$

$$\dashrightarrow \quad \sin(2t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \overset{(*3)}{\dashrightarrow} \quad 2t = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\dashrightarrow \quad t = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad \overset{(*4)}{\dashrightarrow} \quad x = t + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

(*1) Fem el canvi de variables $t = x - \frac{\pi}{6}$ i obtenim una equació trigonomètrica que sabem resoldre.

(*2) Hauríem de deixar l'equació en funció d'una sola raó trigonomètrica. En aquest cas per fer-ho tenim dues opcions:

- Sabem que $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ (o també $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$), per tant substituint a l'equació obtenim una equació irracional en funció de $\cos t$ (o també $\sin t$) que vindrà donada per

$$4\sqrt{1 - \cos^2 t}\cos t = \sqrt{3} \qquad \text{(o també } 4\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{3}\text{).}$$

- A partir de les propietats de les raons trigonomètriques sabem que $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, per tant $\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)/2$. Llavors podem escriure l'equació en funció $\sin(2t)$.

La segona opció és la més fàcil.

(*3) Procedim de manera semblant a l'anotació (*4) del cas a).

(*4) Desfem el canvi.

Exercicis d'autoavaluació

1. Resoleu les següents equacions polinòmiques. En cas de tenir solucions amb multiplicitat més gran que 1, indiqueu també la seva multiplicitat.

a) $\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}x = \frac{9x+13}{6}$

b) $\frac{3x-2}{5} + \frac{x-1}{9} = \frac{14x-3}{15} - \frac{2x+1}{9}$

c) $\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{6}\left(x + \frac{8}{9}\right)$

d) $\frac{x-2}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3x-1}{2} + \frac{1}{4}$

e) $2(x-1)(x+3) = 3(x-2)(x+1) - 4(x-6)$

f) $3(x+6) + 5(2-x) = 10 - 4(6+2x)$

g) $y^2 + \sqrt{2}y - 3 = 0$

h) $2x^2 + 7x - 11 = 7(x+1)$

i) $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{3} = 1 - x$

j) $x^2 - 6\sqrt{2}\,x = -1$

k) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

l) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

m) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

n) $y^6 - 3y^3 + 2 = 0$

o) $y^6 + 3y^3 + 2 = 0$

p) $x^3 - 7x + 6 = 0$

q) $x^3 - 3x + 2 = 0$

r) $(2x-3)^3 + 8 = 0$

s) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$

t) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = 0$

v) $x^6 - x^4 - 9x^2 + 9 = 0$

Solució

a) $x = 26/15$

b) No té solució

c) $x = -\frac{281}{333}$

d) $x = 1$

e) $x = 8,\ x = 3$

f) $x = -7$

g) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$

h) $x = \pm 3$

i) $x = -1,\ x = 5$

j) $x = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{17}$

k) $x = \pm 1(\text{mult.}2)$

l) $x = \pm\sqrt{3}$

m) $x = \pm 2$

n) $y = 1, \quad y = \sqrt[3]{2}$

o) $y = -1,\ y = -\sqrt[3]{2}$

p) $x = 1, \quad x = 2, \quad x = -3$

q) $x = 1(\text{mult.}2),\ x = -2$

r) $x = \frac{1}{2}$

s) $x = -1(\text{mult.}2), \quad x = 2(\text{mult.}2)$

t) $x = -1, \quad x = 3, \quad x = \pm\sqrt{2}$

v) $x = \pm 1, \quad x = \pm\sqrt{3}$

2. Resoleu les següents equacions racionals.

a) $\dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{24}{x^2-16}$

b) $\dfrac{5x-1}{x+2} - \dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{8}{3}$

c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+3}{x-2}$

d) $\left(1 - \dfrac{2}{3-x}\right)\left(\dfrac{1}{2x} + 1\right) = 2$

e) $15 - \dfrac{8}{5-x} = \dfrac{12}{9-x} + 9$

f) $x \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{x - \dfrac{1}{x+1}} = \dfrac{1}{x}$

g) $\dfrac{x+3}{x^2-2x+1} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = 0$

h) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{7x+2}{x^2-4}$

Solució

a) $x = 3/2$

b) $x = 7/2, \; x = 4$

c) No té solucions reals

d) $x = \dfrac{11}{4} \pm \dfrac{\sqrt{113}}{4}$

e) $x = 3, \;\; x = 23/3$

f) $x = 3$

g) $x = 3, \; x = -1/3$

h) $x = 0, \; x = 3$

3. Resoleu les següents equacions irracionals.

a) $\sqrt{x-1} = x - 1$

b) $\sqrt{x+1} = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt{x+1} = x^2 - 1$

d) $\sqrt{3x-5} + 1 = x - 2$

e) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$

Solució

a) $x = 1, \quad x = 2$

b) $x = \dfrac{\sqrt{101}}{2} - \dfrac{1}{2}$

c) $x = -1, \quad x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

d) $x = 7$

e) $x = -2$

4. Resoleu les següents equacions exponencials.

a) $3^{4x+1} = 9$

b) $4^{x+3} = 4^{2x-1}$

c) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

d) $\dfrac{e^{y^2}}{e^y} = (e^y)^2$

Solució

a) $x = 1/4$

b) $x = 4$

c) $x = 3$

d) $y = 0, \; y = 3$

5. Resoleu les següents equacions logarítmiques.

a) $2\ln x - \ln 16 = 0$

b) $\ln x + \ln 3 = \ln x - \ln(x-2)$

c) $\ln\sqrt{2x+4} + \dfrac{1}{2}\ln(x+1) = 1 + \ln 3$

d) $\ln(28 - x^3) - 3\ln(4-x) = 0$

Solució

a) $x = 4$

b) $x = 7/3$

c) $x = \dfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{18e^2+1})$

d) $x = 1, \; x = 3$

6. Trobeu totes les solucions de les següents equacions trigonomètriques.

a) $\sin x = 1/2$

b) $\cos x = 1/2$

c) $\tan x = 1$

d) $2\sin^2 x - 4 = 5\cos x$

e) $\operatorname{cotan}^2 x - \operatorname{cosec} x = 1$

f) $\cos x = 2 - \sec x$

g) $3\tan x = 2\cos x$

Solució

a) $x = \pi/6 + 2k\pi, \; x = 5\pi/6 + 2k\pi$

b) $x = \pi/3 + 2k\pi, \; x = 5\pi/3 + 2k\pi$

c) $x = \pi/4 + 2k\pi, \; x = 5\pi/4 + 2k\pi$

d) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

e) $x = 30^\circ + k360^\circ, \quad x = 150^\circ + k360^\circ, \quad x = 270^\circ + k360^\circ$ amb $k \in \mathbb{Z}$

f) $x = 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

g) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

7. Expresseu y com a funció de x ens els següents casos.

a) $\dfrac{1}{xy-1} = \dfrac{1}{2}\ln x$ b) $e^{-y} - 1 = x$ c) $\dfrac{yx}{x+y^2} = x$

d) $x = \left(1 - \dfrac{2y^2}{x^2}\right)^{-1/2}$ e) $\ln y = x + 4$ f) $\arctan y = \arctan x + 1$

g) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - \ln y = 0$

Solució

Tractem les expressions com una equació on y és la incògnita i x és una constant. Resolem l'equació respecte y i trobem $y(x)$.

a) $y(x) = \dfrac{2}{x\ln x} + \dfrac{1}{x}$

b) $y(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

c) $y(x) = \dfrac{\pm\sqrt{1-4x}+1}{2}$

d) $y(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2-2}}{2} & x \geqslant 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2x^2-2}}{2} & x < 0 \end{cases}$

e) $y(x) = e^{x+4}$

f) $y(x) = \tan(\arctan x + 1)$

g) $y(x) = \sqrt{x}$

8. Aïlleu de les següents expressions la variable o les variables que s'indiquen entre parèntesis.

a) $\dfrac{1 + \dfrac{x+y}{x-y}}{1 - \dfrac{x+y}{x-y}} = 1$ (y)

b) $v = \sqrt{\dfrac{k}{m}(A^2 - x^2)}$ (m), (A)

c) $i = \dfrac{E}{R+r}$ (R)

d) $S = \dfrac{a - rL}{1 - r}$ (r)

e) $A = 2\pi r(r+h)$ (h), (r)

f) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ (R), (R_1)

g) $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$ (m_1)

h) $f = RC\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ (C), (n)

i) $\sqrt{12x-1} - y = y^3$ (x)

j) $\dfrac{7}{2\sqrt[3]{y}} + 1 = \dfrac{1}{x}$ (y)

k) $S = \dfrac{q}{q + p(1-q)}$ (q)

l) $y = e^x - e^{-x}$ (x)

m) $\ln y = -\ln x + 3$ (y)

n) $\ln(x-y) = 2\ln x - 4$ (y)

Solució

a) $y = -x$

b) $m = \dfrac{k(A^2 - x^2)}{v^2}$, $A = \pm\sqrt{\dfrac{mv^2 + kx^2}{k}}$

c) $R = \dfrac{E - i\,r}{i}$

d) $r = \dfrac{S - a}{S - L}$

e) $h = \dfrac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}$, $r = \dfrac{-h\pi \pm \sqrt{2\pi A + h^2\pi^2}}{2\pi}$

f) $R = \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$, $R_1 = -\dfrac{R\,R_2}{R - R_2}$

g) $m_1 = \dfrac{m_2\,R_2^2}{R_1^2}$

h) $C = \dfrac{4\,f\,n^2}{(n^2-4)R}$, $n = \pm 2\sqrt{\dfrac{C\,R}{C\,R - 4\,f}}$

i) $x = \dfrac{1}{12}(y^6 + 2y^4 + y^2 + 1)$

j) $y = -\dfrac{343x^3}{8(x-1)^3}$

k) $q = \dfrac{p\,S}{p\,S - S + 1}$

l) $x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2+4}\right)\right)$

m) $y = \dfrac{e^3}{x}$

n) $y = -x^2 e^{-4} + x$

Glossari de termes

Equacions, 4
  biquadrades, 10
  equivalents, 4
  exponencials, 15
  irracionals, 11
  logarítmiques, 16
  polinòmiques, 4
    de grau 1, 5
    de grau 2, 6
    de grau superior, 8
  racionals, 13
  solució, 4
  transformacions elementals, 4
  trigonomètriques, 17

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.