UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 2. Trigonometria

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 2. Trigonometria

2.1 Les raons trigonomètriques

Considereu un triangle rectangle ABC. Habitualment el vèrtex de l'angle recte de denota per C. Les lletres gregues α i β s'utilitzen per denotar els angles amb vèrtexs A i B, respectivament (vegeu la Figura 2.1.1).

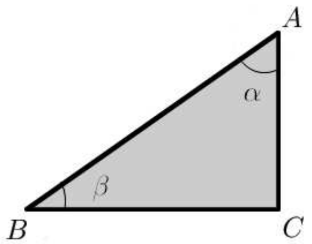


Figura 2.1.1: Triangle rectangle ABC.

Definició 2.1.1:

Els costats AB i AC del triangle rectangle ABC s'anomenen **catets** *i el costat AB s'anomena* **hipotenusa**.

Definició 2.1.2:

S'anomena **sinus** *de l'angle agut α del triangle rectangle ABC la raó entre el catet oposat a α i la hipotenusa:*

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}\,. \tag{2.1.1}$$

Definició 2.1.3:

S'anomena **cosinus** *de l'angle agut α del triangle rectangle ABC la raó entre el catet adjacent a α i la hipotenusa:*

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}\,. \tag{2.1.2}$$

Definició 2.1.4:

S'anomena **tangent** *de l'angle agut α del triangle rectangle ABC la raó entre el catet oposat a α i el catet adjacent a α:*

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC}\,. \tag{2.1.3}$$

Definició 2.1.5:

S'anomena **cotangent** *de l'angle agut α del triangle rectangle ABC la raó entre el catet adjacent a α i el catet oposat a α:*

$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{AC}{BC}\,. \tag{2.1.4}$$

Mesures angulars

Per mesurar angles, hi ha dues mesures principals que s'exposen en qualsevol assignatura de Matemàtiques: graus i radians. L'angle d'un **grau** $(1°)$ correspon a una tres-cents seixantena part de la circumferència completa.

En el nostre curs, utilitzarem com a unitat principal de mesura angular l'anomenat **radian**.

Definició 2.1.6:

En una circumferència, l'angle central d'un **radian** *és aquell que delimita un arc de longitud igual al radi de la circumferència.*

Com que la longitud de la circumferència completa és $2\pi r$, on r és el radi, aleshores la circumferència completa conté 2π radians. D'aquí resulta la següent taula de correspondències de les dues mesures angulars:

Graus	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Taula 2.1.1: Mesures angulars.

D'aquí a endavant, si no es diu el contrari, els angles es mesuraran en radians.

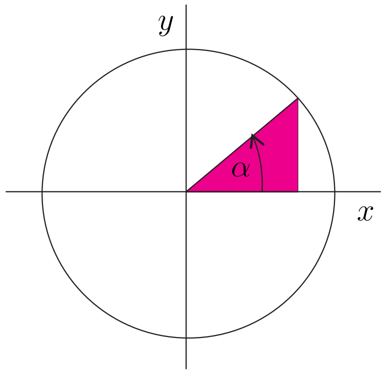


Figura 2.1.2: La circumferència trigonomètrica.

Definició 2.1.7:

Es defineix la **circumferència trigonomètrica** *com una circumferència de radi* 1 *centrada a l'origen del sistema de coordenades* (x, y). *En aquesta circumferència s'hi representen els angles mesurats a partir del semieix positiu* x *i orientats en sentit antihorari quan l'angle té signe positiu i en sentit horari quan l'angle té signe negatiu (vegeu la Figura 2.1.2).*

Segons el Teorema de Tales, les raons trigonomètriques d'un angle no depenen del triangle rectangle escollit. Com que la circumferència trigonomètrica té radi 1, el sinus de l'angle α de la Figura 2.1.2 coincideix amb l'alçada del triangle pintat de vermell i el cosinus d'α coincideix amb la base del mateix triangle.

Les raons trigonomètriques dels angles compresos en el segon, tercer i quart quadrants es poden definir a partir de les corresponents raons dels angles del primer quadrant mitjançant la circumferència trigonomètrica (vegeu la Figura 2.1.3). En particular, el sinus de l'angle α ve donat per l'alçada del triangle pintat de vermell amb el signe corresponent (positiu si es troba a la part positiva de l'eix OY i negatiu si es troba a la part negativa) i el cosinus d'α ve donat per la base del triangle pintat de vermell amb el signe corresponent (positiu si es troba a la part positiva de l'eix OX i negatiu si es troba a la part negativa).

El sinus, el cosinus, el tangent i el cotangent del mateix angle α satisfan les identitats següents:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{2.1.5}$$

$$\tan\alpha \cdot \operatorname{cotan}\alpha = 1, \qquad \alpha \neq \tfrac{\pi}{2}\cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{2.1.6}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad \alpha \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi\cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{2.1.7}$$

$$1 + \operatorname{cotan}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \qquad \alpha \neq \pi\cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.8}$$

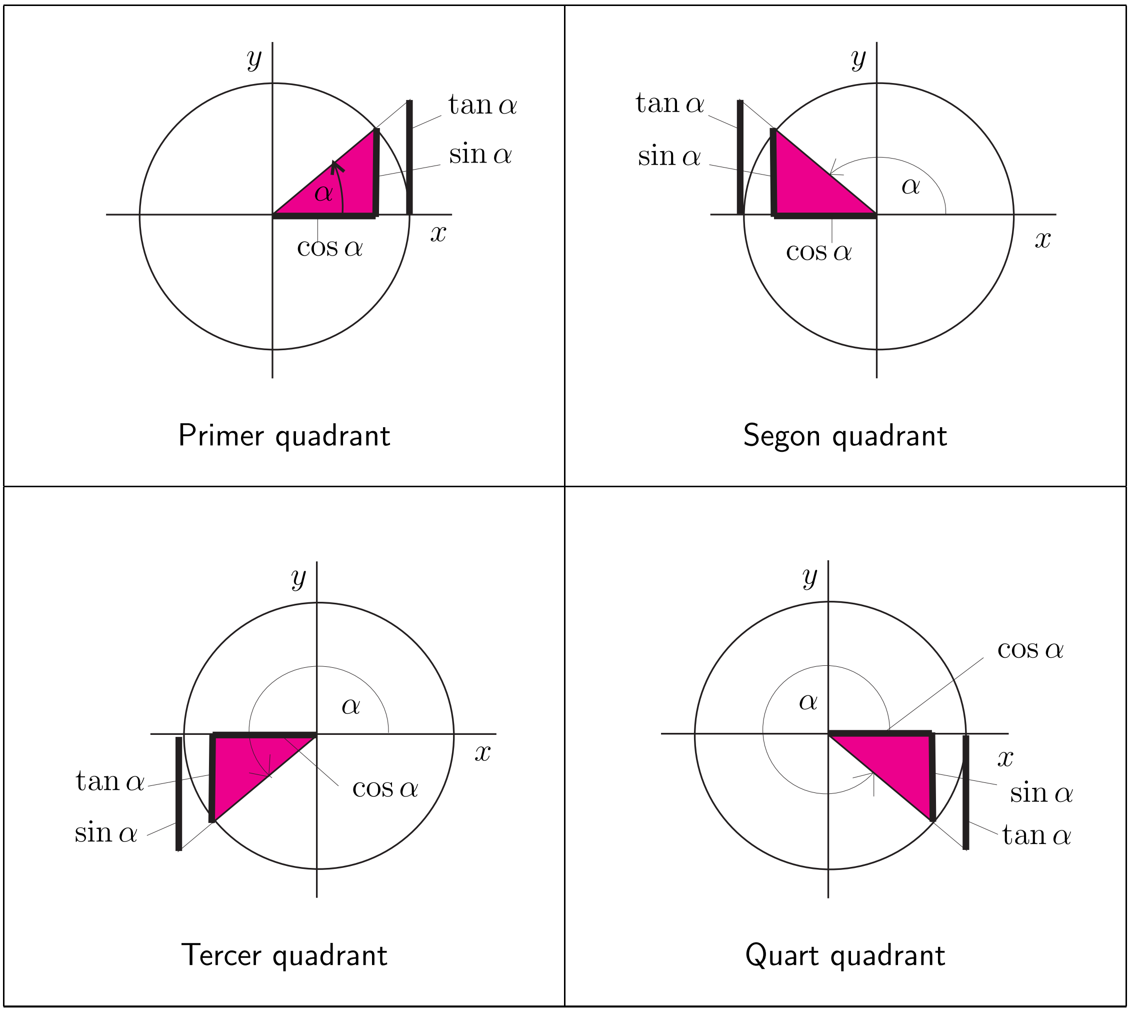


Figura 2.1.3: Raons trigonomètriques d'angles dels diferents quadrants.

Aquestes identitats permeten recuperar els valors de qualsevol de les quatre raons trigonomètriques sabent quant val només una d'aquestes.

Definició 2.1.8:

S'anomena **secant** *de α l'invers del cosinus:*

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.9}$$

Definició 2.1.9:

S'anomena **cosecant** *de α l'invers del sinus:*

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \qquad \alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.10}$$

Proposició 2.1.1:

Per a qualsevol angle α es compleixen les igualtats següents:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \quad \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{cotan}\alpha, \quad \operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha.$$

Els valors d'alguns angles compresos entre 0 i $\pi/2$ es representen a la taula 2.1.2.

Funció	Argument α				
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotan}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Taula 2.1.2: Valors de les raons trigonomètriques dels angles compresos entre 0 i $\pi/2$.

Proposició 2.1.2:

Si l'angle α *s'augmenta de 0 a* $\frac{\pi}{2}$ *, aleshores les funcions* $\sin\alpha$ *i* $\tan\alpha$ *creixen, mentre que les funcions* $\cos\alpha$ *i* $\operatorname{cotan}\alpha$ *decreixen.*

Proposició 2.1.3:

Per a qualsevol angle α *es compleixen les igualtats següents:*

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha; \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{cotan}(\pi-\alpha)=-\operatorname{cotan}\alpha, \quad \alpha\neq\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Exemple 2.1.1 Ordeneu en ordre ascendent els valors següents:

$$\sin\frac{\pi}{8}\,, \quad \sin\frac{\pi}{4}\,, \quad \sin\frac{\pi}{2}\,, \quad \sin\frac{\pi}{6}\,, \quad \sin\frac{\pi}{3}\,, \quad \sin\frac{5\pi}{12}\,.$$

D'acord amb la proposició 2.1.2, la funció $\sin\alpha$ creix si l'argument α creix de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Per tant, n'hi prou d'ordenar en ordre ascendent els arguments. Com que

$$\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}\,,$$

tenim

$$\sin\frac{\pi}{8}<\sin\frac{\pi}{6}<\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{\pi}{3}<\sin\frac{5\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{2}\,.$$

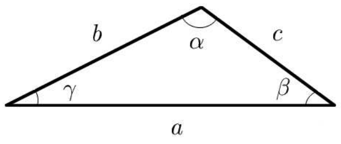
Exemple 2.1.2 Simplifiqueu l'expressió $2\sin^2\alpha+\cos^2(\pi-\alpha)-1$.

Com que $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ i $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, s'obté:

$$2\sin^2\alpha+\cos^2(\pi-\alpha)-1=\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2-1=$$

$$=\sin^2\alpha+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-1=\sin^2\alpha+1-1=\sin^2\alpha.$$

2.2 Teorema del cosinus. Teorema del sinus

Donat el triangle  es satisfan els següents resultats.

Teorema 2.2.1: Teorema del cosinus

El quadrat de qualsevol costat d'un triangle és igual a la suma dels quadrats dels altres dos costats menys dues vegades el producte d'aquests costats multiplicat pel cosinus de l'angle entre ells:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha. \tag{2.2.11}$$

Teorema 2.2.2: Teorema del sinus

Els costats d'un triangle són proporcionals als angles oposats:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,. \tag{2.2.12}$$

Exemple 2.2.1 a) Trobeu tots els costats i tots els angles del triangle amb $\alpha = 30°$, $\beta = 100°$ i $c = 5$.

Aplicant que la suma dels angles d'un triangle és de $180°$ tenim que $\gamma = 180° - 30° - 100° = 50°$. Per altra banda, com que coneixem un angle i el seu costat oposat, aplicant el teorema del sinus tenim que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \dashrightarrow \frac{a}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin 50°} \dashrightarrow a = \frac{5}{\sin 50°} \cdot \sin 30° = 3.2635$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \dashrightarrow \frac{b}{\sin 100°} = \frac{5}{\sin 50°} \dashrightarrow b = \frac{5}{\sin 50°} \cdot \sin 100° = 6.4279$$

b) Trobeu tots els costats i tots els angles del triangle amb $\beta = 35°$, $a = 4.5$ i $c = 10$.

En aquest cas només coneixem un angle i no coneixem el costat oposat a aquest, llavors ens anirà millor començar aplicant el teorema del cosinus

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \dashrightarrow b^2 = 4.5^2 + 10^2 - 2 \cdot 4.5 \cdot 10 \cdot \cos 35° = 46.5263$$

$$\dashrightarrow b = \sqrt{46.5263} = 6.8210$$

Aleshores aplicant el teorema del sinus tenim que

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \dashrightarrow \frac{4.5}{\sin\alpha}=\frac{6.8210}{\sin 35^\circ} \dashrightarrow \sin\alpha = 4.5\cdot\frac{\sin 35^\circ}{6.8210}=0.37840$$
$$\dashrightarrow \alpha = 22.2348^\circ$$

I per tant $\gamma = 180^\circ - 22.2348^\circ - 35^\circ = 122.7652^\circ$.

Noteu que com que el costat més gran del triangle és c, l'angle més gran ha de ser γ.

2.3 Raons trigonomètriques de la suma i diferència de dos arguments

Proposició 2.3.1:

Es compleixen les fórmules següents:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \tag{2.3.13}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \tag{2.3.14}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \tag{2.3.15}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \tag{2.3.16}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}; \tag{2.3.17}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}; \tag{2.3.18}$$

$$\operatorname{cotan}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotan}\alpha\operatorname{cotan}\beta-1}{\operatorname{cotan}\alpha+\operatorname{cotan}\beta}, \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi m,\ m\in\mathbb{Z}; \tag{2.3.19}$$

$$\operatorname{cotan}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotan}\alpha\operatorname{cotan}\beta+1}{\operatorname{cotan}\beta-\operatorname{cotan}\alpha}, \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \tag{2.3.20}$$

Exemple 2.3.1 Calculeu $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Es pot comprovar que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. Fent servir la fórmula (2.3.15), s'obté:

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}$$

Substituint els valors del sinus i cosinus dels angles $\pi/6$ i $\pi/4$ (vegeu la taula 2.1.2, pàgina 8), resulta:

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \,.$$

Exemple 2.3.2 Simplifiqueu l'expressió:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \,.$$

Utilitzem la fórmula (2.3.15) per al terme $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ i la fórmula (2.3.13) per al terme $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. També tindrem en compte el fet que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vegeu la taula 2.1.2, pàgina 8). Aleshores

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\alpha\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\alpha\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\alpha\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

Exemple 2.3.3 Calculeu $\cos 15°$.

Tenim $15° = 45° - 30°$. Fem servir la fórmula (2.3.14) amb $\alpha = 45°$ i $\beta = 30°$. Aleshores:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(\sqrt{3} + 1).$$

Exemple 2.3.4 Calculeu $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, si se sap que $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

Utilitzem la fórmula (2.3.17), tenint en compte que $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ (taula 2.1.2, pàgina 8):

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{1} = 7.$$

2.4 Fórmules de reducció

Definició 2.4.1:

S'anomenen **fórmules de reducció** *aquelles que expressen ("redueixen") el valor d'una funció trigonomètrica de l'argument* $x = \frac{\pi m}{2} \pm \alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, *a través d'una funció trigonomètrica de l'argument* α.

Les principals fórmules de reducció estan resumides a la taula 2.4.3.

Funció	Argument x						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan x$	$\operatorname{cotan}\alpha$	$-\operatorname{cotan}\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\operatorname{cotan}\alpha$	$-\operatorname{cotan}\alpha$	$-\tan\alpha$
$\operatorname{cotan} x$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\operatorname{cotan}\alpha$	$\operatorname{cotan}\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\operatorname{cotan}\alpha$

Taula 2.4.3: Fórmules de reducció.

2.5 Relació entre les raons trigonomètriques del mateix argument

Ara utilitzarem les fórmules anteriors per resoldre alguns exercicis.

Exemple 2.5.1 Sabent que $\sin x = -\frac{3}{5}$ i que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calculeu $\cos x$, $\tan x$ i $\operatorname{cotan} x$.

La identitat trigonomètrica principal (2.1.5), pàgina 6, implica que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, d'on:

$$\cos^2 x = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}\,.$$

Com que $\cos^2 x = \frac{16}{25}$, tindrem $\cos x = \frac{4}{5}$ o bé $\cos x = -\frac{4}{5}$. Sabent que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, resulta que hem d'escollir la segona opció, ja que x pertany al tercer quadrant, en el qual el cosinus pren valors negatius. Així doncs, definitivament $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Sabent quant valen $\sin x$ i $\cos x$, calculem $\tan x$ i $\operatorname{cotan} x$:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

2.6 Fórmules de l'angle doble

Suposant que $\beta = \alpha$ en les fórmules (2.3.15), (2.3.13), (2.3.17), (2.3.19), s'obtenen les anomenades **fórmules de l'angle doble**:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \tag{2.6.21}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \tag{2.6.22}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \tag{2.6.23}$$

$$\operatorname{cotan} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotan}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotan} \alpha}, \qquad \alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.6.24}$$

Sovint aquestes fórmules s'utilitzen "de dreta a esquerre", és a dir, l'expressió $2 \sin \alpha \cos \alpha$ se substitueix per $\sin 2\alpha$, etc.

Exemple 2.6.1 Simplifiqueu l'expressió $\tan \alpha - \operatorname{cotan} \alpha$.

Tenim

$$\tan \alpha - \operatorname{cotan} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha} = -2 \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2 \operatorname{cotan} 2\alpha.$$

2.7 Fórmules de reducció de potències

Es pot aïllar $\cos^2 \alpha$ i $\sin^2 \alpha$ de les fórmules $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ i $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$. Els resultats són els següents:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \tag{2.7.25}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \tag{2.7.26}$$

Exemple 2.7.1 Calculeu $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, sabent que $\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$.

Com que $\sin^4\alpha = (\sin^2\alpha)^2$ i $\cos^4\alpha = (\cos^2\alpha)^2$, substituïm les expressions de $\sin^2\alpha$ i $\cos^2\alpha$ donades per les fórmules (2.7.26) i (2.7.25):

$$\begin{aligned}\sin^4\alpha + \cos^4\alpha &= (\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{2+2\cos^2 2\alpha}{4} = \frac{1+\cos^2 2\alpha}{2} = \frac{1+\frac{25}{169}}{2} = \frac{169+25}{2\cdot 169} = \frac{2\cdot 97}{2\cdot 169} = \frac{97}{169}\,.\end{aligned}$$

2.8 Fórmules de transformació de suma o diferència de raons trigonomètriques en producte

El següent grup de fórmules resulta útil a l'hora de transformar una suma (o diferència) de raons trigonomètriques en producte:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \tag{2.8.27}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,; \tag{2.8.28}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,; \tag{2.8.29}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\,; \tag{2.8.30}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\,, \qquad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m\in\mathbb{Z}; \tag{2.8.31}$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\,, \qquad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m\in\mathbb{Z}; \tag{2.8.32}$$

$$\operatorname{cotan}\alpha + \operatorname{cotan}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\,, \qquad \alpha,\beta \neq \pi m, \quad m\in\mathbb{Z}; \tag{2.8.33}$$

$$\operatorname{cotan}\alpha - \operatorname{cotan}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\,, \qquad \alpha,\beta \neq \pi m, \quad m\in\mathbb{Z}. \tag{2.8.34}$$

Exemple 2.8.1 Transformeu en producte l'expressió $\cos 48° - \cos 12°$.

Apliquem la fórmula (2.8.30) amb $\alpha = 48^\circ$ i $\beta = 12^\circ$. Aleshores:

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -2\ \sin\frac{48^\circ + 12^\circ}{2}\ \sin\frac{48^\circ - 12^\circ}{2} = -2\ \sin 30^\circ \sin 18^\circ = -2\ \cdot\frac{1}{2}\cdot \sin 18^\circ = -\sin 18^\circ.$$

Aquí, hem utilitzat el fet que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (taula 2.1.2, pàgina 8).

2.9 Fórmules de l'angle meitat

Les fórmules següents permeten representar les raons trigonomètriques d'un argument α a través del tangent de l'angle $\alpha/2$ (angle meitat). Aquestes fórmules de vegades s'anomenen també **fórmules de la substitució trigonomètrica universal.**

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\,, \qquad \alpha \neq \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \tag{2.9.35}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\,, \qquad \alpha \neq \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \tag{2.9.36}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\,, \qquad \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \tag{2.9.37}$$

$$\mathrm{cotan}\,\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}\,, \qquad \alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.9.38}$$

Aquestes fórmules s'utilitzen molt sovint en la integració de funcions trigonomètriques.

Exercicis d'autoavaluació

1. En un triangle rectangle un catet mesura 6 cm i l'altre 2.4 cm. Esbrineu el valor del sinus, del cosinus i de la tangent de cada un dels seus angles aguts. Trobeu també el valor d'aquests angles expressant el resultat en graus i en radians.

Solució

$\alpha = 21.801409\ldots° = 0.3805064\ldots$rad

$\sin\alpha = 0.3713907\ldots$

$\cos\alpha = 0.9284767\ldots$

$\tan\alpha = 0.4$

$\alpha = 68.198591\ldots° = 1.19029$rad

$\sin\alpha = 0.9284767\ldots$

$\cos\alpha = 3713907\ldots$

$\tan\alpha = 2.5$

2. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 20 m i un catet 10 m. Quan mesura l'altre catet? Quant mesuren els angles d'aquest triangle? (expresseu el resultat en graus i en radians)

Solució

$\alpha = 30° = \pi/6$rad

$\sin\alpha = 1/2$

$\cos\alpha = \sqrt{3}/2$

$\tan\alpha = \sqrt{3}/3$

$\alpha = 60° = \pi/3$rad

$\sin\alpha = \sqrt{3}/2$

$\cos\alpha = 1/2$

$\tan\alpha = \sqrt{3}$

3. Doneu el valor dels costats i els angles que falten en els següents triangles

a) $a = 2.3$, $b = 2$, $c = 4$

b) $a = 4.5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 78°$

Solució

a) $\alpha = 23.165118°$, $\beta = 20.003134°$, $\gamma = 136.83175°$

b) $\alpha = 72°$, $b = 2.36579$, $c = 4.6281836$

4. Digueu quines de les següents igualtats són vertaderes.

a) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

b) $\tan(2\pi-\alpha) = \tan\alpha$

c) $\cos(\pi-\alpha) = \cos\alpha$

d) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$

Solució

a) certa b) falsa c) falsa d) certa

5. A partir de les raons trigonomètriques dels angles de $30°$, $45°$ i $60°$, calculeu

a) $\sin 120°$

b) $\cos\frac{5\pi}{6}$

c) $\tan 135°$

d) $\sin\frac{5\pi}{4}$

e) $\cos 240°$

f) $\tan 210°$

g) $\sin 330°$

h) $\cos\frac{7\pi}{4}$

i) $\tan 300°$

Solució

a) $\sin 120° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$

b) $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}/2$

c) $\tan 135° = -\tan 45° = -1$

d) $\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}/2$

e) $\cos 240° = -\cos 60° = -1/2$

f) $\tan 210° = \tan 30° = \sqrt{3}/3$

g) $\sin 330° = -\sin 30° = -1/2$

h) $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$

i) $\tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

6. Demostreu les següents igualtats:

a) $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

b) $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$

c) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{2}{\sin x}$

d) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

e) $\dfrac{\sec x}{1+\cos x} = \dfrac{\sec x - 1}{\sin^2 x}$

f) $r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = r^2$

7. Calculeu $\sin\alpha$ en els següents casos:

a) $\tan\alpha = 11/7$ i α és del 3er quadrant

b) $\cos\alpha = -2/9$ i α és del 2on quadrant

Solució

a) $-11/\sqrt{170}$ b) $\sqrt{77}/9$

Glossari de termes

$\mathbb{N}$ conjunt dels nombres naturals, Unitat 1
$\mathbb{Z}$ conjunt dels nombres enters, Unitat 1
$\mathbb{Q}$ conjunt dels nombres racionals, Unitat 1
$\mathbb{R}$ conjunt dels nombres reals, Unitat 1
$\mathbb{R}^+$ conjunt dels nombres reals positius
$\mathbb{R}^-$ conjunt dels nombres reals negatius
$\in$ pertany ($a \in A$ indica que l'element a pertany al conjunt A), Unitat 1
$\cap$ intersecció ($A \cap B$ és el conjunt format per tots els elements que pertanyen a A i B simultàniament)
$\cup$ intersecció ($A \cup B$ és el conjunt format per tots els elements que pertanyen a A o a B)

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.