Els nombres racionals

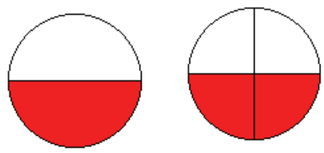
Els nombres racionals

Els nombres fraccionaris o fraccions permeten representar les situacions en les quals s'obté o es deu una part d'un objecte.

Totes les fraccions **equivalents** entre si representen el mateix **nombre racional**, i la millor representació d'aquest nombre és **la fracció irreductible**.

Una fracció *irreductible* és aquella el numerador i denominador de la qual són primers entre si.
La manera de trobar-la, denominada *simplificació,* consisteix a dividir numerador i denominador de la fracció original, pel mcd d'ambdós.

Dues o més fraccions són *equivalents* si representen la mateixa part. Per exemple, la fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4.



Forma decimal d'un nombre racional

La forma decimal està formada per una secció entera, a l'esquerra de la coma, i una secció decimal, o senzillament, decimals, a la dreta de la coma. Exemple:

Nom	desena	unitat	desena	centèsima	mil·lèsima	deumil·lèsima	centmil·lèsima	milionèsima
Xifres	1.	5.	3.	2.	5.	7.	0.	2.

- La forma decimal estricta: si la divisió del numerador entre el denominador acaba tenint un residu igual a 0. Exemple: 12/5 = 2,4.
- La forma decimal es denomina *periòdica* en cas contrari. La xifra, o xifres, que es repeteixen duen el símbol periòdic a la part superior. Per exemple:

$$\frac{5627}{9900} = 0,568383838383... = 0,56\widehat{83}$$

De la forma fraccionària a la forma decimal

S'obté dividint el numerador entre el denominador d'una fracció. Per exemple, la forma decimal de 12/5 és 2,4, és a dir, 12/5 = 2,4.

De la forma decimal a la forma fraccionària

- Si la forma decimal és estricta. Exemple, la forma fraccionària de 3,465 és 3465/1000.
- Si la forma decimal és periòdica. Exemple:

$$23,4\widehat{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

Les operacions amb nombres fraccionaris			
La suma			
Denominadors iguals	Se sumen els numeradors en el numerador i es manté el denominador: $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$		
Denominadors diferents	Es busquen fraccions equivalents amb el mateix denominador i se sumen seguint el procediment anterior: $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{15}{18}+\frac{4}{18}=\frac{19}{18}$		
	Mètodes per a trobar el mateix denominador		
	Multiplicant els denominadors	$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{5\times 9}{6\times 9}+\frac{2\times 6}{9\times 6}=\frac{45}{54}+\frac{12}{54}=\frac{57}{54}$	
	Calculant el mcm dels denominadors	$\frac{5}{6}+\frac{2}{9} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mcm}(6,9)=18 \\ 18/6=3 \\ 18/9=2}}{=} \frac{5\times 3+2\times 2}{18}=\frac{15+4}{18}=\frac{19}{18}$	
La resta			
Suma amb l'oposat: $\frac{4}{7}-\frac{2}{3}=\frac{4}{7}+\frac{-2}{3}$			
La multiplicació			
Producte de numeradors en el numerador i producte de denominadors en el denominador: $\frac{2}{3}\times\frac{-2}{7}=\frac{2\times(-2)}{3\times 7}=\frac{-4}{21}$			
La fracció d'un nombre	dos terços de 125 és $\frac{2}{3}\times 125=\frac{2}{3}\times\frac{125}{1}=\frac{250}{3}$		
L'invers d'un nombre	3/7 és l'invers de 7/3.		
La divisió			
És el producte del numerador per l'invers del denominador: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{5}=\frac{3\cdot 9}{4\cdot 5}=\frac{27}{20}$			

Què és un nombre fraccionari?

> Els nombres enters no poden expressar totes les situacions possibles en les quals intervenen càlculs numèrics: els nombres fraccionaris es troben, per exemple, en aquelles situacions en les quals es produeix un repartiment d'objectes.

Sempre que se sumen, resten o multipliquen dos nombres enters, el resultat és un nombre enter. Això no succeeix així quan els nombres es divideixen. Per exemple:

en dividir 12 entre 4, 12 / 4, el resultat és un nombre enter, el 3;

en dividir 1 entre 2, 1 / 2,el resultat no és un nombre enter.

En aquest últim cas sorgeix la qüestió del significat d'aquesta última expressió, 1/2, i d'altres de similars. Aquest tipus d'expressions conformen els nombres fraccionaris i es poden associar, per exemple, al repartiment d'objectes entre diverses persones. Així, per exemple, si es volen repartir 8 pastissos iguals entre 2 persones, cadascuna d'elles obtindrà 4 pastissos, ja que 8 : 2 = 4. Ara bé, si es vol repartir 1 pastís entre 2 persones, no hi ha cap nombre enter que pugui representar el resultat d'aquesta operació. En aquest cas, a cada persona no li correspon més que una part o fracció del pastís, en concret, la meitat del pastís. El nombre que expressa aquest repartiment és, simplement, la forma de la divisió amb la barra, és a dir, 1/2. Aquest nombre és un nombre fraccionari.

Un nombre fraccionari, o fracció, o simplement trencat, s'expressa en forma de quocient de nombres enter, amb una barra entre ambdós nombres, que pot ser horitzontal o inclinada. Un exemple de fracció pot ser:

$$\frac{12}{5}\text{, o també, } 12/5$$

En aquest cas, el 12 es denomina *numerador* i el 5, *denominador*. Com es pot observar, doncs, els elements d'un nombre fraccionari es denominen de manera específica, diferenciada de la denominació dels elements d'una divisió entera.

Per a llegir aquestes expressions s'utilitza, en general, el nom del nombre del numerador, seguit del plural del partitiu corresponent al denominador (si el numerador és 1, s'utilitza el singular). Així, per exemple, 12/5 es llegeix "dotze cinquens"; 1/7 és "un setè"; 3/11 és "tres onzens", etc. Ara bé, de vegades, sobretot si el denominador és molt gran, simplement s'utilitza l'expressió "partit per", o bé, "entre", entre el numerador i el denominador. Així, 12/25 és "dotze partit per vint-i-cinc", o bé, "dotze entre vint-i-cinc".

Una fracció que tingui el numerador menor que el denominador, i ambdós positius, es denomina *fracció pròpia*. Per exemple, 1/4 és una fracció pròpia.

Qualsevol nombre enter es pot convertir en un nombre fraccionari. Amb aquesta finalitat, la fracció ha de tenir el numerador igual al nombre enter en qüestió i el denominador ha de ser 1. Així, doncs, per exemple, 8 = 8/1. També, –3 = –3/1.

Aquest fet ens mostra com els nombres enters són un subconjunt dels nombres fraccionaris o, dit d'una altra manera, qualsevol nombre enter és, també, un nombre fraccionari.

Quin és el signe d’una fracció?

> Les regles per a establir el signe d’una divisió entera també s’utilitzen per a establir el signe d’una fracció.

Tant el numerador com el denominador d’una fracció poden ser positius o negatius. Utilitzant la regla dels signes per a la divisió de nombres enters, es pot deduir el signe d’ona fracció. Per exemple:

$$\frac{+4}{+7}=\frac{4}{7} \qquad \frac{-6}{-11}=\frac{6}{11} \text{ són fraccions positives}$$

$$\frac{-4}{+7}=\frac{-4}{7} \qquad \frac{+6}{-11}=\frac{-6}{11} \text{ són fraccions negatives}$$

És a dir, una fracció és positiva si numerador i denominador tenen el mateix signe; una fracció és negativa si numerador i denominador tenen signe diferent. Normalment, el signe de la fracció s’anteposa al numerador, mentre que el denominador no va precedit de cap signe, tal com s’il·lustra en els exemples. El signe de la fracció també es pot situar avantposat a la línia fraccionària, a la seva mateixa altura, com per exemple:

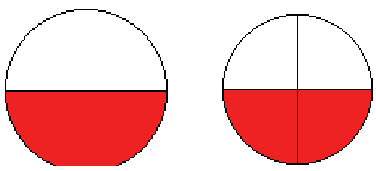
$$\frac{4}{7}=+\frac{4}{7} \qquad \frac{-6}{11}=-\frac{6}{11}$$

En quins casos dues o més fraccions són equivalents?

> Dues (o més) fraccions són equivalents quan representen un mateix nombre; hi ha una prova senzilla per a esbrinar-ho.

Resulta fàcil observar que hi ha fraccions diferents que representen el mateix nombre. Per exemple, la fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4. La comprovació d’aquest fet és senzilla: si es reparteix un pastís equitativament entre dues persones, a cadascuna li correspondrà la meitat del pastís, és a dir, 1/2. Si es reparteixen equitativament 2 pastissos entre 4 persones, a cadascuna li correspondrà, evidentment, la mateixa quantitat de pastís que en el cas anterior; ara bé, en aquest cas, la seva porció és igual a 2/4. Queda clar, doncs, que 1/2 = 2/4.

La fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4.



Quan dues fraccions expressen el mateix nombre, es diu que són fraccions equivalents. En l’exemple, 1/2 i 2/4 són fraccions equivalents. De fet, una fracció pot ser equivalent a moltes altres. Així:

1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10

són totes fraccions equivalents, és a dir, expressen el mateix nombre.

La manera més senzilla de trobar una fracció equivalent a una altra consisteix a multiplicar tant el numerador com el denominador d’aquesta per un mateix nombre. Per exemple, per a construir una fracció equivalent a 5/11, es pot multiplicar numerador i denominador per 3, amb la qual cosa s’obté 15/33; d’aquesta manera, es pot assegurar que ambdues fraccions són equivalents, és a dir, 5/11 = 15/33. Evidentment, si es divideixen el numerador i el denominador d’una fracció, també s’obté una fracció equivalent. Per exemple, la fracció 6/12 és equivalent a la fracció 2/4, ja que 6 : 3 = 2 i 12 : 3 = 4.

Hi ha una prova senzilla que permet saber quan dues fraccions són equivalents. Es tracta de multiplicar el numerador d’una pel denominador de l’altra, i viceversa. Si els resultats són iguals, es pot assegurar que ambdues fraccionis són equivalents. Per exemple:

4/10 és equivalent a 6/15 perquè $4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$.

2/6 no és equivalent a 7/11 perquè $2 \cdot 11 \neq 6 \cdot 7$.

El símbol $\neq$ és el signe de desigualtat, i se situa entre dues expressions amb resultats diferents.

De vegades, aquest procés es denomina, per abreujar, *multiplicar en creu*:

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{15} \quad \begin{matrix} = 10 \cdot 6 = 60 \\ = 4 \cdot 15 = 60 \end{matrix}$$

Què és una fracció irreductible?

> Una fracció irreductible es caracteritza pel fet que numerador i denominador són primers entre si. El procés per a trobar la fracció irreductible equivalent a una fracció es denomina *simplificació.*

El fet que moltes fraccions puguin representar el mateix nombre en complica molt la manipulació. Per a evitar aquesta complicació, se sol destacar una fracció del conjunt de totes les fraccions que són equivalents entre si, la denominada *fracció irreductible.* Una fracció irreductible es caracteritza pel fet que numerador i denominador són primers entre si, això és, són nombres el mcd dels quals és 1. Per exemple, 8/16 no és una fracció irreductible, ja que el mcd(8,16) = 8. En canvi, 4/9 és una fracció irreductible perquè el mcd(4,9) = 1. El procés de recerca de la fracció irreductible equivalent a una altra es denomina *simplificació de la fracció.*

Donada una fracció qualsevol, sempre es pot trobar una fracció irreductible que hi sigui equivalent. El mètode més senzill per a fer-ho consisteix a dividir el numerador i el denominador entre el seu mcd. Per exemple, per a convertir la fracció 18/12 en una fracció irreductible, cal dividir numerador i denominador entre el mcd(18,12) = 6. La fracció resultant és $\frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}$.

És evident que per a trobar una fracció equivalent a una fracció irreductible, s'ha de multiplicar el numerador i el denominador de la fracció irreductible per un nombre enter. Així, doncs, qualsevol fracció equivalent a una fracció irreductible (diferent d'ella mateixa) no pot ser mai irreductible. En definitiva, no és possible que dues fraccions irreductibles diferents siguin equivalents. Aquest fet permet seleccionar, d'entre totes les fraccions equivalents entre si, la fracció irreductible com a representant de totes elles.

Què és un nombre racional?

> Totes les fraccions equivalents a una altra representen un mateix nombre, que es denomina *nombre racional*. La millor representació d'aquest nombre és la fracció irreductible.

Un nombre racional és aquell que es pot expressar com una fracció, o com qualsevol fracció de les equivalents a aquesta. Així, per exemple, el nombre racional que s'expressa com la fracció irreductible 1/3 es pot també expressar amb la fracció 2/6 o, també, amb la fracció 7/21. En aquests casos, les fraccions són diferents, però el nombre racional representat és el mateix. Aquest fet es podria comparar amb els diferents noms amb els quals es pot conèixer una mateixa persona; per exemple, una noia que es digui Montserrat pot ser coneguda per Montse, Montsina, o qualsevol altre nom o renom, però no per això deixarà de ser la mateixa persona. De la mateixa manera, un mateix nombre racional es pot expressar de diferents formes (fraccions) i no deixarà, per això, de ser un únic nombre. Ara bé, la millor manera d'expressar un nombre racional és mitjançant una fracció irreductible perquè aquesta sempre serà la més senzilla. En l'exemple, la millor manera de representar el nombre racional anterior és 1/3, perquè és una fracció irreductible.

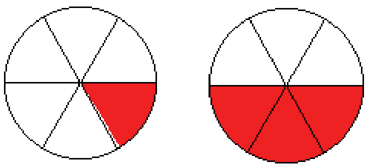
De vegades, els termes *nombre racional*, *nombre fraccionari*, *fracció* o *trencat* se solen usar indistintament, encara que siguin conceptes lleugerament diferents, per a indicar el concepte de nombre racional tal com s'acaba de definir. Se solen usar aquests últims, *fracció* i *trencat*, amb preferència, ja que són els més breus.

Com es fa la suma de fraccions amb el mateix denominador?

> La suma de dues fraccions amb el mateix denominador és igual a una fracció el numerador de la qual és la suma de numeradors, i el denominador de la qual és el mateix denominador comú.

La suma de nombres fraccionaris és una operació que expressa la reunió dels "fragments" expressats pels nombres sumats, i estableix un nombre fraccionari que expressa aquesta reunió. Se'n poden distingir dos casos, segons si el denominador és comú o no.

La suma d'1/6 amb 3/6 es pot representar amb la reunió d'aquests dos "fragments" acolorits:



Resulta fàcil determinar que el resultat de la suma és 4/6. Aquest fet es pot generalitzar de la manera següent: la suma de dos nombres amb el mateix denominador és igual a una fracció el numerador de la qual és la suma de numeradors, i el denominador de la qual és el mateix denominador comú. En l'exemple:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1+3}{6}=\frac{4}{6}$$

Com es fa la suma de fraccions amb denominador diferent?

> Per a sumar dues fraccions amb denominador diferent, s'ha de substituir cadascuna d'elles per una altra fracció equivalent amb el mateix denominador i, posteriorment, sumar les fraccions resultants.

Per a sumar dues fraccions amb diferent denominador s'ha de substituir cadascuna d'elles per una altra fracció equivalent amb el mateix denominador; a continuació, se sumen les dues fraccions resultats tal com s'ha explicat a l'apartat anterior. Per exemple, si es vol fer la suma 3/18 + 5/12, s'ha de buscar una fracció equivalent a cadascuna d'elles que tingui el mateix denominador:

$$\frac{3}{18}=\frac{6}{36}=\frac{9}{54}=\frac{12}{72}=\dots$$

$$\frac{5}{12}=\frac{10}{24}=\frac{15}{36}=\frac{20}{48}=\frac{25}{60}=\dots$$

en aquest cas trobem que les fraccions 6/36 i 15/36 comparteixen el denominador. D'aquesta manera, la suma es pot fer fàcilment així:

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

Ara bé, aquest mètode pot arribar a ser realment costós perquè es podria trigar molt de temps a trobar dues fraccions amb el mateix denominador.

Com es redueixen dues o més fraccions d'una suma al mateix denominador?

> Hi ha dos mètodes que permeten reduir dues o més fraccions a un mateix denominador: la multiplicació de denominadors i el càlcul del mcm dels denominadors.

Hi ha dos mètodes que permeten fer el mateix de manera més ràpida:

1r. La multiplicació de denominadors

Consisteix a multiplicar el numerador i el denominador de les dues fraccions que se sumen pel denominador de l'altra. Així s'aconsegueix que les fraccions resultants tinguin el mateix denominador i, és clar, siguin equivalents a les originals. En l'exemple anterior:

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{3\cdot 12}{18\cdot 12}+\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}=\frac{36}{216}+\frac{90}{216}=\frac{126}{216}$$

Es pot observar que, en general, aquest mètode té el desavantatge d'oferir resultats amb nombres elevats, encara que, evidentment, es poden simplificar, sempre recomanable quan es manipulen fraccions.

2n. El càlcul del mcm dels denominadors

Aquest mètode es basa en el càlcul del mcm dels denominadors per a trobar el nou denominador comú. Els passos que s'han de seguir són:

1. Calcular el mcm dels denominadors involucrats en la suma. Aquest resultat serà el denominador comú. En el cas de l'exemple, mcm(12,18) = 36.
2. Multiplicar el numerador de cada fracció pel resultat de dividir el mcm entre el denominador de la fracció respectiva. Així, en l'exemple, el numerador de la fracció 3/18, que és 3, s'ha de multiplicar pel resultat de 36 : 18 = 2; de la mateixa manera, el numerador de la fracció 5/12, que és 5, s'ha de multiplicar pel resultat de 36 : 12 = 3.
   Les fraccions resultants són equivalents a les anteriors i tenen el denominador comú:
   $$\frac{6}{36}=\frac{3}{18} \qquad \frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$
3. Finalment, cal sumar les fraccions amb el mateix denominador trobades en l'apartat anterior:
   $$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

El primer mètode és, sovint, més ràpid, però el segon ofereix l'avantatge que el resultat es presenta de forma més simplificada. Això és més fàcil d'observar si la suma involucra diverses fraccions, com en aquest exemple:

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3}{18} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mcm}(6,8,18)=36}}{=} \frac{2\cdot 6}{36}+\frac{1\cdot 9}{36}+\frac{3\cdot 2}{36}=\frac{12+9+6}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

Per tant, si no hi ha massa sumes, és possible utilitzar el primer mètode, però si n'hi ha tres o més, és recomanable seguir el mètode del càlcul del mcm.

Quines són les propietats de la suma de fraccions?

> Les propietats de la suma de fraccions són la commutativa, l'associativa, l'element neutre i l'element oposat.

Les propietats de la suma de fraccions són:

- La propietat commutativa

L'ordre dels sumands en una suma de dos o més nombres racionals no n'altera el resultat. Així, per exemple: $\frac{-3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{2}{6}+\frac{-3}{6}=\frac{-1}{6}$.

- La propietat associativa

El resultat d'una expressió amb dues o més sumes de nombres enters no depèn de l'ordre com s'agrupen las diferents sumes. Per exemple:

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{-2}{3}=\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)+\frac{-2}{3}=\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{3}+\frac{-2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

A més d'aquestes propietats, existeix una sèrie d'elements amb propietats interessants respecte de la suma de nombres racionals:

- L'element neutre de la suma

El element neutre de la suma és aquell que sumat a qualsevol altre no el modifica. L'element neutre de la suma de fraccions (i d'enters) és el 0. Per exemple: $\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$.

- L'element oposat

Tot nombre racional té un oposat, que compleix que la suma d'ambdós és igual a l'element neutre de la suma, és a dir, és igual a 0. Així, per exemple, l'oposat d'1/3 és –1/3, ja que $\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}=0$. Per a trobar l'oposat d'un nombre, només cal canviar el signe al numerador, com s'acaba de comprovar.

Evidentment, aquestes propietats també ho són de la suma de nombres enters.

Com es fa la resta de fraccions?

La resta de dues fraccions es redueix a la suma amb la fracció oposada.

La resta és l'operació oposada a la suma, igual que passa entre els nombres enters. La resta de fraccions es redueix a la suma amb la fracció oposada. Així, doncs, per exemple, $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5}{8}+\frac{-2}{8}=\frac{3}{8}$. És evident que si se suma aquest resultat amb el nombre restat, $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$, s'obté el nombre inicial.

Com es fa la multiplicació de fraccions i quines són les seves propietats?

Per a multiplicar dues fraccions, s'han de multiplicar ambdós numeradors i posar el resultat en el numerador; també s'han multiplicar ambdós denominadors i posar el resultat en el denominador.

En molts casos, las fraccions que tenen per denominador 100 s'expressen en forma de percentatge amb el símbol %, denominat "tant per cent". Així, la fracció 23/100 es pot indicar, també, com 23%, i es llegeix "23 per cent".
El càlcul de tants per cent es redueix al càlcul amb fraccions.

El resultat de multiplicar dues fraccions és una fracció el numerador de la qual és el producte dels numeradors, i el denominador de la qual és el producte dels denominadors. Per exemple: $\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times 3}{7\times 5}=\frac{6}{35}$.

La multiplicació permet calcular la fracció d'un nombre: per a trobar el triple de 39 es fa la multiplicació següent: 3 · 39 = 117. De la mateixa manera, per a calcular una fracció d'un nombre s'ha de multiplicar la fracció pel nombre. Així, tres quarts de 120 és igual a ¾ · 120 = 90.

Quines són les propietats del producte de fraccions?

Les propietats del producte de fraccions són la commutativa, l'associativa, la distributiva respecte a la suma, l'element neutre i l'element invers.

Les propietats de la multiplicació de fraccions són les mateixes que les propietats de la multiplicació de nombres enters i naturals:

- Propietat commutativa

L'ordre dels factors d'un producte de dos o més nombres racionals no n'altera el resultat. Així, per exemple: $\frac{-2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{-2}{3}=\frac{-8}{15}$.

- Propietat associativa

El resultat d'una expressió amb dos o més productes de nombres enters no depèn de l'ordre com s'agrupen els productes. Per exemple:

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{60}$$

- Propietat distributiva del producte respecte de la suma

El producte d'una fracció per una suma de fraccions és igual a la suma dels productes de la primera fracció amb les fraccions que formen la suma. Per exemple:

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$$

- Element neutre del producte

El element neutre del producte és aquell que, multiplicat a qualsevol altre, no el modifica. L'element neutre de la multiplicació de fraccions és l'1. Per exemple:

$$\frac{3}{5}\times 1=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

- Tot nombre racional, excepte el 0, té un invers

L'invers d'un nombre compleix que el producte d'ambdós és igual a l'element neutre del producte, és a dir, és igual a 1. Així, per exemple, l'oposat de 2/5 és 5/2, ja que

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{2\times 5}{5\times 2}=\frac{10}{10}=1$$

Com es pot comprovar en l'exemple, l'invers d'una fracció es troba intercanviant de posició numerador i denominador.

Com es fa la divisió de fraccions?

> La divisió de fraccions és el producte d'una fracció per la inversa de l'altra.

La divisió de dues fraccions es pot indicar de dues maneres. Per exemple:

$$\frac{2}{3}:\frac{7}{11} \qquad\qquad \frac{\;\frac{2}{3}\;}{\frac{7}{11}}$$

En el segon cas, s'ha d'allargar la barra de divisió respecte de les barres de fracció per a no deixar lloc a dubtes sobre quin és el numerador i quin, el denominador.

El resultat de la divisió de dues fraccions és igual al producte de la fracció que es troba en el numerador, multiplicada per la inversa de la fracció del denominador. Així, doncs: $\frac{2}{3}:\frac{7}{11}=\frac{2}{3}\times\frac{11}{7}=\frac{22}{21}$.

Una altra regla fàcil de recordar per a fer una divisió és aquesta: es multipliquen en creu numeradors amb denominadors, i els resultats també se situen en creu. En el cas anterior: $\frac{2}{3}:\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 11}{3\cdot 7}=\frac{22}{21}$.

A partir de la divisió de nombres es pot expressar l'invers d'un nombre d'una altra manera: com a 1 dividit entre el nombre. Així, per exemple, l'invers de 4/7 és $\frac{1}{\frac{4}{7}}$.

Quin és l’ordre en què s’han de fer les operacions elementals entre fraccions?

> En una expressió en la qual s’encadenen diferents operacions entre fraccions, primer s’han de resoldre els parèntesis, tot seguit la divisió i la multiplicació i, finalment, la resta i la suma.

Com que s’encadenen diverses operacions elementals (suma, resta, multiplicació i divisió) en una expressió amb nombres racionals, s’ha de respectar el mateix ordre que l’enunciat per als nombres naturals i enters:

- En primer lloc, s’han de fer les operacions entre parèntesis.
- En segon lloc, les multiplicacions i divisions, començant per aquestes últimes.
- En tercer lloc, les sumes i restes, començant per aquestes últimes.

Així, per exemple:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{operacions}\\ \text{dins dels parèntesis}}}{=}\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{prioritat de la}\\ \text{multiplicació}\\ \text{sobre la resta}}}{=}\frac{24}{12}-\frac{5}{12}=\frac{19}{12}$$

Ara bé, en el primer pas, en lloc d’operar dintre dels parèntesis, també es podria haver aplicat la propietat distributiva, sense que això en modifiqués el resultat:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{propietat}\\ \text{distributiva}}}{=}\frac{1}{4}\times\frac{8}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{prioritat de la}\\ \text{multiplicació sobre}\\ \text{suma y resta}}}{=}\frac{8}{12}+\frac{16}{12}-\frac{5}{12}=\frac{19}{12}$$

Què és la forma decimal d’un nombre racional?

> Un nombre racional es pot expressar de maneres diferents, a part de la forma fraccionària. Una de les més comunes és la forma decimal, que s’obté dividint el numerador entre el denominador.

En el món anglosaxó, en lloc de la coma s’usa un punt, com es pot observar en qualsevol calculadora. Nosaltres utilitzarem indistintament l’una i l’altre.

Per a obtenir la forma decimal d’una fracció, s’ha de dividir el numerador entre el denominador, com en la divisió entera, però sense detenir-se fins que la resta sigui zero, afegint-hi els decimals corresponents. Per exemple, la forma decimal de 12/5 és 2,4, és a dir, 12/5 = 2,4.

La forma decimal està formada per una secció entera, a l’esquerra de la coma, i una secció decimal, o senzillament, decimals, a la dreta de la coma. En aquesta taula es pot observar la denominació de les sis primeres xifres a la dreta de la coma del nombre 15,325702.

Nom	desena	unitat	dècima	centèsima	mil·lèsima	deumil·lèsima	centmil·lèsima	milionèsima
Xifres	1	5	3	2	5	7	0	2.

- La forma decimal es denomina *estricta* si la divisió del numerador entre el denominador acaba tenint un residu igual a 0. Un exemple: 12/5 = 2,4.
- La forma decimal es denomina periòdica en cas contrari. Per exemple,

1/3 = 0,333333333... = $0,\overset{\frown}{3}$. Es pot observar que la xifra, o xifres, que es repeteixen, duen el símbol periòdic en la part superior. És evident que el grup de nombres repetits pot ser superior a un. Per exemple,

$$\frac{5627}{9900} = 0,568383838383... = 0,56\widehat{83}$$

Unes senzilles normes permeten transformar la forma decimal d'un nombre en la forma fraccionària:

- Si la forma decimal és exacta, solament s'ha d'eliminar la coma del nombre decimal; el nombre resultant serà el numerador de la fracció. El denominador ha de ser un nombre la primera xifra del qual sigui un 1, i amb tants zeros com decimals té el nombre decimal. Per exemple, la forma fraccionària de 3,465 és 3465/1000.

- Si la forma decimal és periòdica, s'han de seguir aquests passos:

    - El numerador és igual a la diferència del nombre en qüestió, sense coma ni símbol periòdic (amb la qual cosa es transforma en un nombre enter) i el mateix nombre, sense coma ni xifres a sota del símbol periòdic.

    - El denominador ha de ser un enter amb tants 9 com xifres a sota del símbol periòdic, i tants 0 com xifres de la secció decimal que no es troben dintre del símbol periòdic.

Per tant, la fracció que correspon al nombre periòdic és:

$$23,4\widehat{52} = \frac{23452 \text{ - } 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

Com s'aproxima un nombre racional per un nombre decimal?

> Per a evitar nombres excessivament llargs, es recorre a aproximacions d'aquests per uns altres amb menys xifres. Ara bé, aquestes aproximacions han de ser prou properes al nombre en qüestió. La millor via d'aproximar un nombre és l'arrodoniment.

L'arrodoniment d'un nombre fins a una xifra determinada, la *xifra d'arrodoniment*, consisteix a escriure el nombre decimal més proper al nombre donat, de manera que només tingui xifres decimals fins a la d'arrodoniment. Per exemple, l'arrodoniment d'1/3 per les centèsimes consisteix a trobar el nombre decimal més proper a 1/3 que només tingui decimals fins a les centèsimes. En aquest cas, és fàcil adonar-se que l'arrodoniment d'1/3 per les centèsimes és 0,33. Per a expressar que 1/3 és aproximadament igual a 0,33 s'utilitza el símbol $\simeq$, que es llegeix "aproximadament igual". Així, doncs $\frac{1}{3} \simeq 0,33$. En tot cas, no cal abusar de l'ús d'aquest símbol.

Aquestes són les regles per a l'arrodoniment d'un nombre fins a una xifra determinada:

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és inferior a 5, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a aquesta xifra. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32,543613 per les centèsimes, podem dir que $32,543613 \simeq 32,54$.

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és superior a 4, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a la xifra d'arrodoniment, i a la xifra d'arrodoniment s'hi suma una unitat. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32,5436134 per les mil·lèsimes, $32,5436134 \simeq 32,544$. Si la xifra d'arrodoniment és 9, s'actua de la mateixa manera que en una suma de nombres decimals, quan a una xifra 9 s'hi suma 1. Per exemple, si es vol arrodonir el nombre 2,749623 per les mil·lèsimes, com que la xifra de les deumil·lèsimes és 6, més gran que 4, s'ha de sumar una unitat a la xifra de les mil·lèsimes, 9; per tant, el nombre arrodonit serà igual a 2,750 o, el que és el mateix, 2,75.

Com s'ordenen els nombres racionals en una recta?

> Com en el cas dels nombres enters, donats dos nombres racionals qualssevol, diferents, un d'ells sempre serà més gran que l'altre i, doncs, es poden ordenar tots al llarg d'una recta.

Les operacions bàsiques influeixen en l'ordenació dels racionals de la mateixa manera que ho fan en l'ordenació dels enters.

La manera més senzilla de comprovar-ho, potser, es redueix a escriure'n l'expressió decimal, que mostra de manera immediata quin dels dos és més gran. També es poden restar tots dos nombres per a esbrinar quin és més gran. Per exemple:

$$\frac{4}{7}-\frac{13}{15}=\frac{4\cdot 15-7\cdot 13}{7\cdot 15}=\frac{-31}{105}$$

per tant, 13/15 > 4/7.

Com que estan ordenats, els nombres racionals es poden representar en una recta, de manera similar als enters. Ara bé, la seva representació presenta una diferència important amb els enters: entre dos nombres racionals diferents sempre en podem trobar un altre (de fet, se'n poden trobar moltíssims). Per a trobar un nombre que estigui entre dos altres nombres qualssevol, només cal sumar-los i dividir el resultat entre 2. Per exemple, el nombre 3/4 és menor que el nombre 9/5; és fàcil comprovar que $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{9}{5}}{2}=\dfrac{51}{40}$ es troba entre tots dos nombres, és a dir, $\dfrac{3}{4}<\dfrac{51}{40}<\dfrac{9}{5}$. Aquesta circumstància permet preveure que els nombres racionals poden cobrir molts més punts de la recta en la qual es representen, i sempre podrem ampliar una secció qualsevol d'aquesta recta, perquè sempre trobarem més nombres racionals, com mostra aquest exemple: