

# DERIVADES

## 1.1 Càlcul de derivades

### 1.1.1 Derivades de les operacions elementals

Si apliquem la definició de derivada a les operacions elementals entre funcions, obtenim els resultats següents:

- 1) Derivada de la suma de dues funcions  $f(x) = p(x) + q(x)$ :

$$f'(x) = p'(x) + q'(x).$$

- 2) Derivada d'una constant per una funció  $f(x) = kg(x)$ :

$$f'(x) = kg'(x).$$

- 3) Derivada del producte de dues funcions  $f(x) = p(x)q(x)$ :

$$f'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x).$$

- 4) Derivada del quocient de dues funcions  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ :

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}.$$

- 5) Derivada de la inversa d'una funció  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ :

$$f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

- 6) Derivada de la composició de dues funcions (regla de la cadena)  $f(x) = p(q(x))$ :

$$f'(x) = p'(q(x))q'(x).$$

## 1.1.2 Derivades d'algunes funcions elementals

Així mateix, si apliquem la definició de derivada a les següents funcions elementals, obtindrem els resultats indicats.

1)  $f(x) = k, f'(x) = 0$

2)  $f(x) = x, f'(x) = 1$

3)  $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$

4)  $f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}$

5)  $f(x) = \log_a x, f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

6)  $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$

7)  $f(x) = a^x, f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

8)  $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$

9)  $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$

10)  $f(x) = \tan x, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

11)  $f(x) = \arcsin x, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12)  $f(x) = \arccos x, f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

13)  $f(x) = \arctan x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

14)  $f(x) = u(x)^{v(x)}$ . Per fer aquesta derivada, prenent en primer lloc logaritmes:

$\ln(f(x)) = v(x)\ln u(x)$ , i derivem:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

I ara podem aïllar  $f'(x)$ :

$$f'(x) = u(x)^{v(x)} \left( v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

### Exemples

1)  $f(x) = x^3 + x^2, f'(x) = 3x^2 + 2x$

2)  $f(x) = 7x^3, f'(x) = 21x^2$

3)  $f(x) = \sin x^3, f'(x) = 3x^2 \cos x^3$

4)  $f(x) = \sin^4 x, f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x$

5)  $f(x) = (ax + b)^8, f'(x) = 8(ax + b)^7 a$

- 6)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$
- 7)  $f(x) = \ln(x^2 - 1), f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$
- 8)  $f(x) = \ln(\ln x), f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$
- 9)  $f(x) = \log_3(x^2 + x + 1), f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$
- 10)  $f(x) = e^{x^2+1}, f'(x) = 2xe^{x^2+1}$
- 11)  $f(x) = a^{\frac{1}{x}}, f'(x) = \frac{-a^{\frac{1}{x}} \ln a}{x^2}$
- 12)  $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
- 13)  $f(x) = (x^2 + 1)^x, \ln f(x) = x \ln(x^2 + 1),$   
 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x^2 + 1) + x \frac{2x}{x^2 + 1}$   
 $f'(x) = (x^2 + 1)^x \left[ \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right]$
- 14)  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$
- 15)  $f(x) = \ln(\arccos(x-1)), f'(x) = \frac{-1}{\arccos(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}$