Regla de Ruffini. Teorema del residu. Factorització de polinomis

1.1 Regla de Ruffini

Al dividir un polinomi $P(x)$ per un del tipus $(x-a)$ es pot aplicar la ***regla de Ruffini***, que és molt més còmode que fer la divisió convencional. Per fer-ho escriurem tots els coeficients de $P(x)$, incloent els que són zero, i seguirem aquests passos:

1. Multiplicarem el coeficient de grau més gran per a
2. Sumarem el resultat anterior al coeficient de segon grau més gran
3. Multiplicarem el resultat anterior per a i aquest nou resultat el sumarem al coeficient de tercer grau més gran
4. Repetirem el procés fins que ja no es pugui més

seguint aquests passos obtindrem uns nombres que són els coeficients del polinomi quocient, ordenats de grau més gran a més petit, excepte el darrer nombre, que és el residu de la divisió

Exemple

Fes la divisió de $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ per $(x-2)$

construïm la següent taula

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -2 & 1 & 4 & -6 & 3 \\
 & & & & & & \\
2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & &
\end{array}
$$

seguim els passos descrits anteriorment posant els resultats intermedis a la fila inferior

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -2 & 1 & 4 & -6 & 3 \\
 & & & & & & \\
2 & & 2 & 0 & 2 & 12 & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 6 & 6 & \boxed{15}
\end{array}
$$

el quocient de la divisió és $Q(x) = x^4 + x^2 + 6x + 6$ i el residu $R = 15$

Exercici

1. Calcula la divisió $2x^6 + 4x^3 - 5x^2 + x - 4 : x + 1$. *Resp.* $Q(x) = 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ i $R = -12$

Teorema del Residu

Teorema 1.1 *El residu de la divisió del polinomi $P(x)$ per $x - a$ coincideix amb el valor numèric del polinomi per $x = a$, o sigui amb $P(a)$*

Demostració

al dividir $P(x)$ per $x - a$ obtenim un quocient, $Q(x)$, i un residu, R, que verifiquen

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

si fem $x = a$

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R \Longrightarrow P(a) = R$$

Exemple

Calcula el valor numèric de $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ per $x = 2$

per trobar $P(2)$ podem dividir $P(x)$ per $x - 2$ i al fer-ho, si ens fixem en el primer exemple resolt més amunt, surt un residu igual a 15, per tant

$$P(2) = 15$$

Exercici

1. Calcula el valor numèric de $P(x) = 3x^4 - x^2 + 2x - 5$ per $x = 2$. Fes-ho de dues maneres diferents. *Resp.* $P(2) = 43$

Factorització d'un polinomi

Per factoritzar un polinomi haurem de trobar les arrels d'aquest, o sigui, els nombres que fan que el valor numèric del polinomi sigui zero. Un cop trobada una arrel, $x = a_1$, d'un polinomi $P(x)$, pel teorema del residu sabem que el residu haurà de ser zero si dividim $P(x)$ per $x - a_1$, i per tant es complirà

$$P(x) = (x - a_1)Q_1(x)$$

on $Q_1(x)$ és el primer quocient obtingut. Repetint el procès per $Q_1(x)$ i per tots els successius quocients que van apareixent fins que ja no sigui possible continuar, factoritzarem $P(x)$. Per trobar les possibles arrels haurem de tenir en compte els tres punts següents

1. Les arrels les trobarem pel mètode de Ruffini, aplicant el teorema del residu i exigint que aquest sigui zero

2. Les arrels candidates ***han de ser nombres divisors del terme independent***

3. Si un nombre candidat a ser arrel ens dóna un residu diferent de zero, aquest no serà arrel del polinomi, i per tant ja no caldrà que el tornem a provar, en canvi si dóna residu igual a zero no tant sols serà una arrel del polinomi, si no que a més es susceptible de tornar a ser provat, ja que pot ser una arrel doble, tercera ....

Exemple

Factoritza el polinomi $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

primer de tot busquem les arrels, aplicant el teorema del residu al mètode de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & & & & \\ 1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 1$ és una arrel ja que $P(1) = 0$, continuant

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & & & \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -1$ és una arrel ja que $P(-1) = 0$, continuant

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -6 \\ & & & \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{-4} \end{array}$$

$x = 2$ no és una arrel ja que $P(2) = -4 \neq 0$, continuant

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -6 \\ & & & \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -2$ és una arrel ja que $P(-2) = 0$, continuant

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & -3 \\ & & \\ 3 & & 3 \\ \hline & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 3$ és una arrel ja que $P(3) = 0$. Tenim doncs que $P(x)$ té per arrels 1, -1, -2 i 3, per tant aplicant la relació que hi ha entre dividend, divisor i quocient podem escriure

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x^3 - 7x - 6) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6) =$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

per tant ja tenim la factorització feta

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

Exercici

1. Factoritza el polinomi $P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$. *Resp.* $(x-1)^3(x+2)^2$