Equacions racionals i iracionals

1.1 Equacions racionals

Definició:

Són equacions racionals aquelles equacions en les quals apareixen fraccions algèbriques.

Per resoldre-les es duen a terme les operacions pertinents fins a reduir-les a equacions polinomiques, després es resolen aquestes equacions i, finalment, cal comprovar si les solucions d'aquestes equacions ho són de les racionals.

Anem a veure el procés amb uns exemples.

Exemple:

Resolem l'equació

$$\frac{2\,x}{x-2}-\frac{x+2}{2}=1$$

Primer de tot restarem les dues fraccions algèbriques, per tant l'equació quedarà

$$\frac{4\,x-(x-2)\,(x+2)}{2\,(x-2)}=1$$

, si arreglem el numerador tenim

$$\frac{4\,x-x^2-4}{2\,(x-2)}=1$$

.

Multiplicant els dos termes de l'equació per $2\,(x-2)$ tenim

$$4\,x-x^2+4=2\,(x-2)$$

Fent les operacions i posant tots els termes al mateix costat de la igualtat queda $x^2-2\,x-8=0$ que és ja una equació de 2n grau, si la resolem obtenim $x_1=4$ i $x_2=-2$.

Ara hem de comprovar en l'equació inicial que realment són solució:

Si fem $x = 4$ tenim $\frac{2\,4}{4-2} - \frac{4+2}{2} = 1$ igualtat que és certa.

Si fem $x = -2$ tenim $\frac{2\,(-2)}{-2-2} - \frac{-2+2}{2} = 1$ que també és certa.

Per tant les dues solucions de l'equació de 2n grau ho són de la racional.

Exemple:

Resolem l'equació

$$\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{19\,x}{12}$$

Si reduïm a comú denominador els dos termes de l'equació queda

$$\frac{12\,(x^2+1)\,(x^2-1) + 12\,x^2}{12\,x\,(x^2-1)} = \frac{19\,x^2\,(x^2-1)}{12\,x\,(x^2-1)}$$

multiplicant els dos costats de la igualtat per $12\,x\,(x^2-1)$ tenim

$$12\,(x^2+1)\,(x^2-1) + 12\,x^2 = 19\,x^2\,(x^2-1)$$

Fent les operacions als dos costats i posant tots els termes al mateix costat queda $7\,x^4 - 31\,x^2 + 12 = 0$ que és una equació biquadrada si la resolem surten 4 solucions que són $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{7}}$ i $x_4 = -\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Comprovem si aquestes quatre solucions ho són de l'equació racional

Si fem $x = 2$ tenim

$$\frac{2^2+1}{2} + \frac{2}{2^2-1} = \frac{19\,2}{12}$$

igualtat que és certa

Si fem $x = -2$ tenim

$$\frac{(-2)^2+1}{-2} + \frac{-2}{(-2)^2-1} = \frac{19\,(-2)}{12}$$

igualtat que també és certa.

Si fem $x = \sqrt{\frac{3}{7}}$ tenim

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}^2+1}{\sqrt{\frac{3}{7}}} + \frac{\sqrt{\frac{3}{7}}}{\sqrt{\frac{3}{7}}^2-1} = \frac{19\,\sqrt{\frac{3}{7}}}{12}$$

igualtat que no és certa

Si fem $x = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ tenim

$$\frac{(-\sqrt{\frac{3}{7}})^2+1}{-\sqrt{\frac{3}{7}}} + \frac{-\sqrt{\frac{3}{7}}}{(-\sqrt{\frac{3}{7}})^2-1} = \frac{19\,(-\sqrt{\frac{3}{7}})}{12}$$

igualtat que tampoc és certa.

Per tant les solucions de l'equació racional són $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$.

Exercicis:

1) Resoleu les següents equacions:

a) $\dfrac{1}{x} = x$

b) $\dfrac{3\,x+2}{x-1} = x+6$

c) $\dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{1}{x-3}$

d) $\dfrac{5}{(x-2)^2} - \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4}{5}$

e) $\dfrac{8}{x^2-3\,x} - \dfrac{7}{9-x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{4}$

f) $\dfrac{x^2-x-2}{x^3-4\,x^2+x+6} = \dfrac{15}{x^2+x}$

1.2 Equacions irracionals

Definició:

S'anomenen equacions irracionals les equacions en les quals la incògnita apareix en el radicand d'una arrel quadrada.

Per resoldre aquest tipus d'equacions cal seguir els passos següents:

1) El terme que conté l'arrel es deixa aïllat en un dels membres. Si n'hi ha dues se'n situarà una a cada membre.

2) S'eleva al quadrat els dos membres de l'equació per fer desapareixer l'arrel.

En el cas que hi hagui dues arrels caldrà repetir aquests dos passos.

3) Es resol l'equació que queda.

4) Es comproven les solucions obtingudes en l'equació inicial.

Anem a veure aquest procediment amb uns exemples.

Exemple:

Resolem l'equació

$$x - 2\sqrt{x} = 15$$

Aïllem l'arrel en un dels dos costats

$$x - 15 = 2\sqrt{x}$$

elevem al quadrat a cada costat $(x-15)^2 = (2\sqrt{x})^2$, i queda $x^2 - 30\,x + 225 = 4\,x$.

Si ajuntem termes tenim $x^2 - 34\,x + 225 = 0$ que és una equació de segon grau. Resolent-la obtenim $x_1 = 25$ i $x_2 = 9$ com a solucions.

Comprovem aquestes solucions en l'equació irracional inicial

Si fem $x = 25$ queda

$$25 - 2\sqrt{25} = 15$$

igualtat que és certa.

Si fem $x = 9$ queda

$$9 - 2\sqrt{9} = 15$$

igualtat que no és certa.

Per tant l' única solució de l'equació és $x = 25$.

Exemple:

Resolem l'equació

$$\sqrt{2\,x + 10} - \sqrt{2\,x + 3} = 1$$

Deixem una arrel a cada costat de la igualtat

$$\sqrt{2\,x + 10} = \sqrt{2\,x + 3} + 1$$

Elevem al quadrat a cada costat $\sqrt{2\,x + 10}^2 = (\sqrt{2\,x + 3}+1)^2$, i queda $2\,x+10 = 2\,x+3+2\,\sqrt{2\,x + 3}+1$.

Si fem les operacions que queden tenim $3 = \sqrt{2\,x + 3}$ expressió que encara té una arrel, per tant, tornem a repetir el procés.

Elevem al quadrat a cada costat $3^2 = \sqrt{2\,x + 3}^2$, fent les operacions queda $9 = 2\,x + 3$, per tant, $x = 3$.

Anem ara a comprovar a l'equació inicial si és o no solució.

Si fem $x = 3$ tenim $\sqrt{2\,3 + 10} - \sqrt{2\,3 + 3} = 1$ igualtat que és certa, per tant, $x = 3$ és solució.

Exercicis:

2) Resoleu les equacions següents:

a) $1 - 5\,x = \sqrt{2\,x + 1}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = x$

c) $\sqrt{\dfrac{2\,(x + 4)}{x - 3}} = x - 2$

d) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 4} = 5$

e) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{2\,x + 2} = 0$

f) $\sqrt{6 + \sqrt{4\,x - 3}} = 3$