Els nombres naturals

Els nombres naturals

Els nombres naturals són aquells que serveixen per a comptar. Se solen representar fent servir les xifres del 0 al 9.

Operacions bàsiques

Suma: $\underbrace{\underset{\uparrow}{9} \overset{\text{signe}}{\overset{\downarrow}{+}} \underset{\uparrow}{12}}_{\text{sumands}} = \overset{\text{suma o resultat}}{\overset{\downarrow}{21}}$

Resta: $\underset{\text{minuend}}{\underset{\uparrow}{12}} \overset{\text{signe}}{\overset{\downarrow}{-}} \underset{\text{subtrahend}}{\underset{\uparrow}{9}} = \overset{\text{diferència}}{\overset{\downarrow}{3}}$

Multiplicació: $\underbrace{\underset{\uparrow}{3} \overset{\text{signe}}{\overset{\downarrow}{\times}} \underset{\uparrow}{7}}_{\text{factors}} = \overset{\text{producte}}{\overset{\downarrow}{21}}$

Divisió: $\underset{\text{dividend}}{\underset{\uparrow}{18}} \overset{\text{signe}}{\overset{\downarrow}{:}} \underset{\text{divisor}}{\underset{\uparrow}{3}} = \overset{\text{quocient}}{\overset{\downarrow}{6}}$

Ordre de les operacions:

1r. Parèntesis
2n. Divisió
3r. Multiplicació
4t. Suma i resta

La resta: El minuend ha de ser major que el subtrahend

La divisió:
- Pot ser exacta: 15 : 3 = 5, en aquest cas
  15 és múltiple de 3
  3 és divisor de 15
- Pot no ser exacta: 17 : 3 no dóna exacte, en aquest cas

$$\underset{\textit{dividend}}{\underset{\uparrow}{17}} = \underset{\textit{divisor}}{\underset{\uparrow}{3}} \times \underset{\textit{quocient}}{\underset{\uparrow}{5}} + \underset{\textit{residu}}{\underset{\uparrow}{2}}$$

Els múltiples	Els divisors
15 és múltiple de 3 perquè 15 = 5 · 3.	3 és divisor de 15 perquè 15 : 3 és exacta. Es diu que 15 és divisible per 3.

Propietats

	Múltiples	Divisors
Reflexiva	Tot nombre natural és múltiple de si mateix. Per exemple, 3 és múltiple de 3 perquè 1 · 3 = 3.	Tot nombre natural és divisor de si mateix. Per exemple, 5 és divisor de 5 perquè 5 : 5 = 1.
Antisimètrica	Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest és múltiple del primer, llavors, tots dos nombres són iguals.	Si un nombre és divisor d'un altre i aquest és divisor del primer, llavors, tots dos nombres són iguals.
Transitiva	Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest és múltiple d'un tercer nombre, llavors, el primer també és múltiple del tercer. 28 és múltiple de 14; 14 és múltiple de 2: per tant, 28 és múltiple de 2.	Si un nombre és divisor d'un altre i aquest és divisor d'un tercer nombre, llavors, el primer també és divisor del tercer. 2 és divisor de 14; 14 és divisor de 28: per tant, 2 és divisor de 28.

Els nombres primers

Un nombre és primer quan no té cap altre divisor que no sigui l'1 i ell mateix. Per exemple, l'11 és primer.

Els criteris de divisibilitat

Per 2	Última xifra parell
Per 3	Suma de xifres divisible per 3
Per 5	Última xifra 0 o 5
Per 10	Última xifra 0

La descomposició en factors primers

Qualsevol nombre es pot descompondre en factors primers. Per exemple, $24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 1$.

El mínim comú múltiple | **El màxim comú divisor**

Per a calcular el mcm i el mcd de dos nombres,

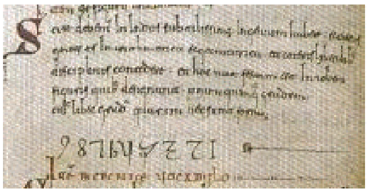
s'han de descompondre els nombres en factors. Per exemple, per a calcular el mcm(24,90) i el mcd(24,90), s'han de descompondre ambdós nombres:

$24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 1$ i $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$.

1. mcm(24,90) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1 = 360$. Es multipliquen els factors primers comuns i no comuns amb el major exponent.
2. mcd(24,90) = $2 \cdot 3 \cdot 1$. Es multipliquen els factors primers comuns amb el menor exponent.

Què és un nombre natural?

> Un nombre natural és el que permet comptar objectes. Des de fa segles es representa utilitzant les xifres del 0 al 9.



Fragment d'una pàgina del *Codex Virgilanus* (s. X), on es poden observar les nou xifres, en ordre invers.

Els nombres naturals són els que permeten comptar objectes. La llista dels nombres naturals s'inicia amb l'1 i no té fi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. (l'etcètera indica precisament que aquesta llista no té fi). Des de fa alguns segles se solen representar amb les xifres decimals del 0 al 9, d'origen hindú, i que es van introduir a Europa per mitjà de textos àrabs. Un dels motius determinants per a l'ús d'aquestes xifres, en lloc d'altres representacions, és la facilitat per al càlcul de les operacions bàsiques entre aquests nombres: suma, resta, multiplicació i divisió.

Quins són les operacions bàsiques entre nombres naturals?

> Les operacions bàsiques entre nombres naturals són la suma, la resta, la multiplicació i la divisió. La resta és una operació oposada a la suma, i la divisió és una operació oposada a la multiplicació.

La suma és una operació que es representa amb el signe +, interposat entre els dos nombres que se sumen. A continuació s'hi posa el signe = i, finalment, el resultat de la suma. Per exemple, 12 + 19 = 31. Els nombres que se sumen es denominen *sumands,* mentre que el resultat rep el nom de *suma* o, simplement, *resultat*. En l'exemple, 12 i 19 són els sumands, i 31 és la suma.

La resta, també denominada *diferència* o *subtracció,* és una operació que es representa amb el signe – interposat entre els dos nombres que es volen restar. Per exemple, 14 – 6 = 8. El nombre anterior al signe – es denomina *minuend*; el nombre que segueix el signe – es denomina *subtrahend* i el resultat de la resta es denomina *diferència.* En l'exemple, el 14 és el minuend, el 6 és el subtrahend i 8 és la diferència. En la resta de nombres naturals el minuend ha de ser més gran que el subtrahend. La suma i la resta són operacions oposades; aquest fet permet afirmar que en una resta, la diferència més el subtrahend és igual al minuend.

La multiplicació, o producte, de nombres naturals fa servir el signe × entre els dos nombres multiplicats, però també pot utilitzar un punt lleugerament elevat (·). Aquest signe es llegeix "per". És una operació que es basa en la suma: la suma de diversos sumands iguals es transforma en una multiplicació. Per exemple:

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \times 6 = 5 \cdot 6 = 30$$

és a dir, la suma de 5 vegades el 6 és igual a "5 per 6".

Els nombres multiplicats es denominen *factors,* mentre que el resultat de la multiplicació es denomina *producte.* En l'exemple, els factors són 5 i 6, mentre que el producte és 30.

Quan s'ha de multiplicar un nombre diverses vegades per ell mateix, s'escriu en forma de potència:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

El 2 de 2^5 indica el nombre que es multiplica diverses vegades i es denomina *base de la potència*. El 5 indica les vegades que s'ha de repetir el nombre i es denomina *exponent.*

La divisió de nombres naturals s'assenyala amb el signe : (o, també, /), interposat entre els dos nombres que s’han de dividir, i es llegeix “entre”. El nombre dividit es denomina *dividend,* el nombre que divideix es denomina *divisor,* mentre que el resultat es denomina *quocient*. Així, per exemple, en la divisió 15 : 3 = 5, el 15 es denomina *dividend*; el 3, *divisor,* i el 5, *quocient.*

Aquesta operació és oposada al producte; aquest fet permet trobar el resultat de qualsevol divisió: per exemple, per a conèixer el quocient de 72 : 8, s'ha de trobar el nombre que, multiplicat pel divisor, proporciona el dividend, és a dir:

$$8 \times ? = 72$$

evidentment, el nombre buscat és 9, perquè 8 × 9 = 72. Així, doncs, 72 : 8 = 9.

Què són i per a què serveixen els parèntesis?

> Els parèntesis són un parell de símbols que permeten tancar operacions que s’han de fer a part.

Els parèntesis són dos símbols: (per a obrir i) per a tancar. Entre aquests dos elements se situa una operació o grup d'operacions i s’utilitza per a tancar operacions que s’han de fer a part. Per exemple, en aquesta expressió, 3 + (6 + 8), s’ha de calcular primer el resultat de l'operació que es troba entre parèntesis, 6 + 8 = 14. Només després es farà l'operació exterior: 3 + (6 + 8) = 3 + 14 = 17. Si en una expressió hi ha diversos parèntesis encaixats, el primer que s’ha de fer és el més intern. Per exemple:

2 + (2 + (8 – 3)) = 2 + (2 + 5) = 2 + 7 = 9. Així, en una expressió amb parèntesis:

- El nombre de parèntesis que s'obren ha de ser el mateix que el dels que es tanquen.
- Sempre s'han d'operar en primer lloc els parèntesis més interns, sempre que hi hagi parèntesis encaixats.

En quin ordre s’han de fer les operacions?

> L'ordre de les operacions és: primer els parèntesis, a continuació les divisions i les multiplicacions, i, finalment, les sumes i restes.

De vegades se'ns presenta un grup d'operacions entre nombres naturals, que es denomina *expressió numèrica*. Per exemple:

$$4 + 5 - (5 \times 3 + 8 : 2)$$

Per a trobar el resultat d'aquesta expressió, s’han de tenir en compte aquestes observacions:

- És imprescindible conèixer l'ordre en el qual s’han de fer les operacions, que és el següent:
  - En primer lloc, s’han d’efectuar les operacions que es troben a l'interior dels parèntesis (començant pels parèntesis més interns).
  - En segon lloc, s’han de fer les multiplicacions i les divisions. Les divisions, sempre abans que les multiplicacions.
  - Finalment, les sumes i les restes. Primer les restes i, després, les sumes.
- S’ha de vigilar l'ús del signe igual, =: només s’ha d’usar quan l'expressió a l'esquerra de l'igual té el mateix resultat que la de la dreta. Per exemple,

és correcte:	$4 + 6 \times 3 = 4 + 18 = 22$
és incorrecte:	$7 \times 4 - 9 : 3 = 3 = 28 - 3 = 25$
	(encara que el resultat final, 25, sigui correcte, la primera igualtat és incorrecta: $7 \times 4 - 9 : 3 \neq 3$)

Quin problema trobem en les operacions entre nombres naturals?

> El problema bàsic que trobem en la resta i la divisió de nombres naturals és que no sempre es poden restar o dividir dos nombres qualssevol.

Quan es vulgui restar a un nombre natural, un altre de més gran o igual, comprovarem que no sempre és possible. Per exemple, 8 – 13 no pot donar com a resultat un nombre natural. Hauríem de definir un altre tipus de nombres, els nombres enters (podeu veure el tema corresponent), perquè aquesta operació sigui possible.

El quocient entre dos nombres naturals tampoc no és sempre un nombre natural. Per exemple, 13 : 5 no pot ser igual a un nombre natural perquè no hi ha cap nombre que multiplicat per 5 doni 13. En aquest cas, es pot descompondre la divisió anterior, de la manera següent: $13 = 5 \times 2 + 3$, essent el 3, denominat *residu,* menor que el divisor (5). Per tant, la regla general per a la divisió s'enuncia així:

$$\text{dividend} = \text{divisor} \times \text{quocient} + \text{residu}$$

i sempre que el residu sigui 0, es diu que la divisió és *exacta.* De vegades, per a abreujar, s'expressa d'aquesta altra manera:

$$D = d \times c + r$$

essent el dividend una D; el divisor, una d; el quocient, una c; i el residu, una r.

Què són els múltiples i els divisors?

> Un nombre és múltiple d'un altre si podem obtenir el primer multiplicant el segon per un nombre natural; també es diu que el primer nombre és *divisible* pel segon. A més, el segon nombre és *divisor* del primer.

És fàcil trobar una relació senzilla entre 3 i 15: $5 \times 3 = 15$, és a dir, el 15 és igual a cinc vegades el 3. En aquest cas es diu que el 15 és un múltiple de 3. Altres múltiples del 3 són el mateix 3, el 6, el 9, el 12, etc. En general, un nombre és múltiple d'un altre si es pot obtenir multiplicant aquest últim per algun altre nombre natural.

Quan una divisió entre dos nombres naturals és exacta, per exemple, 15 : 3 = 5, es diu que el 15 és *divisible* entre el 3 (o per 3). En aquest cas, també es diu que el 3 és un divisor del 15.

Es pot observar que els conceptes de múltiple, divisor i divisibilitat estan lligats estretament: si un nombre és múltiple d'un altre, també es pot afirmar que el primer nombre és divisible pel segon; de la mateixa manera, el segon ha de ser un divisor del primer. És a dir,

si *a* és múltiple de *b*, llavors	*b* és divisor de *a*
	i *a* és divisible per *b*

En l'exemple anterior:

15 és múltiple de 3, llavors	3 és divisor de 15
	i 15 és divisible per 3

Quines són les propietats dels múltiples i divisors?

> Les propietats dels múltiples i dels divisors són la reflexiva, la transitiva i l'antisimètrica.

Les propietats que compleixen els múltiples (i els divisors) de qualsevol nombre són les següents:

- Qualsevol nombre natural és múltiple (i divisor) d'ell mateix. Per exemple, el 7 és múltiple del 7 perquè $7 \cdot 1 = 7$; també és divisor de 7 perquè $7 : 7 = 1$. Aquesta propietat es denomina *reflexiva.*
- Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest últim és múltiple d'un tercer nombre, llavors, el primer nombre també és múltiple del tercer nombre (passa el mateix si es tracta de divisors). Per exemple, el 84 és múltiple de 21, i 21 és múltiple de 7, llavors 84 és múltiple de 7. Aquesta propietat es denomina *transitiva.*
- Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest últim ho és del primer, llavors ambdós nombres són el mateix nombre (el mateix es pot dir en el cas de ser divisor). Aquesta propietat es denomina *antisimètrica.*

Com se sap si un nombre és múltiple (o divisor) d'un altre?

> Hi ha una sèrie de criteris senzills que permeten saber quan un nombre és divisible per un d'aquests nombres: 2, 3, 4, 5, 6, 9 , 10 i 11.

En alguns casos, és molt útil conèixer si un nombre és divisible per alguns nombres concrets:

Divisible per	Criteri de divisibilitat	Exemple
2	Un nombre natural és divisible per 2 si la seva última xifra és un nombre parell.	El 548 és divisible per 2 perquè la seva última xifra (8) és parell.
3	Un nombre natural és divisible per 3 si la suma de les seves xifres és divisible per 3.	El 18.231 és divisible per 3 perquè la suma de les seves xifres (1 + 8 + 2 + 3 + 1 = 15) és divisible per 3.
4	Un nombre natural és divisible per 4 si el nombre format per les seves dues últimes xifres és divisible per 4.	El 95.828 és divisible per 4 perquè el numero format per les seves dues últimes xifres (28) és divisible per 4.
5	Un nombre natural és divisible per 5 si la seva última xifra és 0 o 5.	El 845.825 és divisible per 5 perquè la seva última xifra és 5.
6	Un nombre natural és divisible per 6 si és divisible per 2 i per 3.	El 234 és divisible per 6 perquè és divisible per 2 i per 3.
9	Un nombre natural és divisible per 9 si la suma de les seves xifres és divisible per 9.	El 94.833 és divisible per 9 perquè la suma de les seves xifres (9 + 4 + 8 + 3 + 3 = 27) és divisible per 9.
10	Un nombre natural és divisible per 10 si la seva última xifra és 0.	El 9.274.020 és divisible per 10 perquè la seva última xifra és 0.
11	Un nombre és divisible per 11 quan la diferència entre la suma de les xifres que ocupa la posició parell i la suma de les xifres que ocupen la posició senar és múltiple d'11.	El 12.111 és divisible entre 11 perquè la diferència de les xifres que ocupen la posició parell (1 + 1 + 1 = 3) i la suma de les xifres que ocupen la posició senar (2 + 1 = 3), és a dir, 3 – 3 = 0, és múltiple d'11.

Què és un nombre primer?

> Un nombre natural és primer quan els únics divisors que té són el mateix nombre i l'1.

Un nombre natural es diu que és un nombre primer quan els únics divisors que té són el mateix nombre i l'1. Els exemples més senzills de nombres primers són: 1, 2, 3, 5, 7, 11, etc. Per a saber si un nombre és primer, s'ha de dividir entre tots i cadascun dels nombres primers menors que el nombre en qüestió, començant pel 2. Si cap d'aquests nombres no és un divisor seu, llavors el nombre és primer. Per exemple, per a saber si el nombre 121 és primer, s'ha d'intentar dividir entre 2, 3, etc.; quan s'arriba a l'11, es pot comprovar que el 121 no és primer, perquè $121 = 11 \cdot 11$.

Qualsevol nombre natural es pot descompondre en un producte de factors primers i aquesta descomposició és única. Per exemple, el nombre 28 es pot expressar com a $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, és a dir, $28 = 1 \cdot 2^2 \cdot 7$.

Com es descompon un nombre natural en factors primers?

> La descomposició d'un nombre natural en factors primers és summament important i es pot fer de manera molt senzilla.

El procediment per a descompondre un nombre natural és senzill tot i que, de vegades, pot ser un procés llarg. Aquests són els passos per a descompondre un nombre:

Passos	Exemple
1. S'escriu el nombre que es vol descompondre i, a la seva dreta, una línia vertical.	$\begin{array}{r\|l} 36 & \end{array}$
2. S'escriu al costat de la línia vertical el nombre primer més petit, que no sigui 1, que sigui divisor del nombre situat a la part esquerra de la línia.	$\begin{array}{r\|l} 36 & 2 \end{array}$
3. Sota el nombre de l'esquerra s'escriu el quocient de la divisió d'aquest nombre entre el nombre primer situat a la seva dreta.	$\begin{array}{r\|l} 36 & 2 \\ 18 & \end{array}$
4. Es repeteixen els passos 2 i 3, fins que a l'esquerra s'hagi d'escriure un 1.	$\begin{array}{r\|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$
5. Finalment, es pot comprovar com el nombre inicial és igual al producte de tots els nombres primers que apareixen a la dreta de la línia.	$36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 =$ $= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$

La descomposició d'un nombre natural és molt important per a trobar el màxim comú divisor (mcd) i el mínim comú múltiple (mcm).

Què és i com es troba el màxim comú divisor o mcd?

> El màxim comú divisor (mcd) de dos (o més) nombres naturals és el més gran dels divisors comuns d'aquests nombres.

El màxim comú divisor (denominat, per a abreujar, mcd) de dos (o més) nombres naturals és el nombre que compleix aquests dos requisits:

- És un divisor comú d'ambdós nombres.
- És el més gran d'aquests divisors.

Així, per exemple, el màxim comú divisor de 36 i 30 és 6, és a dir, mcd(36, 30) = 6. Això és així perquè si s'escriu una llista de tots els divisors de 36 i una altra amb els de 30:

divisors de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

divisors de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

podem comprovar que de tots els divisors comuns (en blau), el més gran és el 6. És clar, aquest mètode per a trobar el mcd entre dos nombres podria requerir molt de temps perquè s'han de trobar tots els divisors d'un nombre. Hi ha un mètode molt més ràpid i senzill per a trobar el mcd entre dos nombres, que consta d'aquests dos passos:

1. Es descomponen els dos (o més) nombres en factors primers. En l'exemple, $36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$, mentre que $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.
2. Es multipliquen els nombres primers comuns a ambdues (o més) descomposicions, fent servir el de menor exponent. En l'exemple, els primers comuns són 1, 2 i 3; el seu exponent ha de ser 1, perquè és el menor. Per tant, $mcd(36,30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Què és i com es troba el mínim comú múltiple o mcm?

> El mínim comú múltiple (mcm) de dos (o més) nombres naturals és el menor dels múltiples comuns d'aquests nombres.

El mínim comú múltiple (denominat, per a abreujar, mcm) de dos nombres és un nombre que ha de complir que:

- És un múltiple d'aquests dos nombres.
- És el menor d'aquests múltiples.

Per exemple, el mínim comú múltiple dels nombres 4 i 10 és el 20, és a dir, mcm(4,10) = 20. Aquest fet es pot comprovar fàcilment escrivint la llista de múltiples d'aquests dos nombres:

múltiples de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, etc.

múltiples de 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, etc.

S'han ressaltat el múltiples comuns a ambdós. És fàcil observar que el menor d'aquests múltiples comuns és el 20.

Evidentment, aquest mètode per a trobar el mcm de dos (o més) nombres pot ser molt lent. Així, doncs, per a trobar el mcm de dos nombres s'ha de fer el següent:

1. Es descomponen els nombres en factors primers. Així, per exemple, en el cas dels nombres 4 i 10, $4 = 1 \cdot 2^2$ i $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$.
2. Es multipliquen els nombres primers de les descomposicions que siguin comunes a tots dos nombres, utilitzant els d'exponent més gran, i també els que no són comuns, amb l'exponent corresponent. En el cas de l'exemple, els primers comuns són l'1 i el 2, aquest últim elevat al quadrat perquè és el d'exponent major; pel que fa als primers no comuns, només hi ha el 5. Així, doncs,

$$\text{mcm}(4, 10) = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 = 20.$$