Iniciació a les Matemàtiques per a l'enginyeria

Els nombres naturals

Els nombres naturals

Els nombres naturals són aquells que serveixen per a comptar. Se solen representar fent servir les xifres del 0 al 9.

Operacions bàsiques

Suma: $$\underbrace{\underset{\uparrow}{9} \overset{\substack{\text{signe}\\ \downarrow}}{+} \underset{\uparrow}{12}}_{\text{sumands}} = \overset{\substack{\text{suma o resultat}\\ \downarrow}}{21}$$

Resta: $$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{minuend}}}{12} \overset{\substack{\text{signe}\\ \downarrow}}{-} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{subtrahend}}}{9} = \overset{\substack{\text{diferència}\\ \downarrow}}{3}$$

Multiplicació: $$\underbrace{\underset{\uparrow}{3} \overset{\substack{\text{signe}\\ \downarrow}}{\times} \underset{\uparrow}{7}}_{\text{factors}} = \overset{\substack{\text{producte}\\ \downarrow}}{21}$$

Divisió: $$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{dividend}}}{18} \overset{\substack{\text{signe}\\ \downarrow}}{:} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{divisor}}}{3} = \overset{\substack{\text{quocient}\\ \downarrow}}{6}$$

Ordre de les operacions:

1r. Parèntesis
2n. Divisió
3r. Multiplicació
4t. Suma i resta

La resta: El minuend ha de ser major que el subtrahend

La divisió:

- Pot ser exacta: 15 : 3 = 5, en aquest cas
  15 és múltiple de 3
  3 és divisor de 15
- Pot no ser exacta: 17 : 3 no dóna exacte, en aquest cas

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{dividend}}}{17} = \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{divisor}}}{3} \times \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{quocient}}}{5} + \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{residu}}}{2}$$

Els múltiples	Els divisors
15 és múltiple de 3 perquè $15 = 5 \cdot 3$.	3 és divisor de 15 perquè $15 : 3$ és exacta. Es diu que 15 és divisible per 3.

Propietats

	Els múltiples	Els divisors
Reflexiva	Tot nombre natural és múltiple de si mateix. Per exemple, 3 és múltiple de 3 perquè $1 \cdot 3 = 3$.	Tot nombre natural és divisor de si mateix. Per exemple, 5 és divisor de 5 perquè $5 : 5 = 1$.
Antisimètrica	Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest és múltiple del primer, llavors, tots dos nombres són iguals.	Si un nombre és divisor d'un altre i aquest és divisor del primer, llavors, tots dos nombres són iguals.
Transitiva	Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest és múltiple d'un tercer nombre, llavors, el primer també és múltiple del tercer. 28 és múltiple de 14; 14 és múltiple de 2: per tant, 28 és múltiple de 2.	Si un nombre és divisor d'un altre i aquest és divisor d'un tercer nombre, llavors, el primer també és divisor del tercer. 2 és divisor de 14; 14 és divisor de 28: per tant, 2 és divisor de 28.

Els nombres primers

Un nombre és primer quan no té cap altre divisor que no sigui l'1 i ell mateix. Per exemple, l'11 és primer.

Els criteris de divisibilitat

Per 2	Última xifra parell
Per 3	Suma de xifres divisible per 3
Per 5	Última xifra 0 o 5
Per 10	Última xifra 0

La descomposició en factors primers

Qualsevol nombre es pot descompondre en factors primers. Per exemple, $24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 1$.

El mínim comú múltiple / **El màxim comú divisor**

Per a calcular el mcm i el mcd de dos nombres,

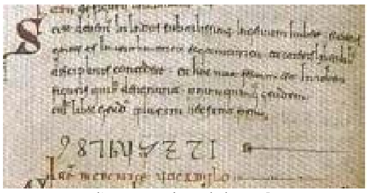
s'han de descompondre els nombres en factors. Per exemple, per a calcular el mcm(24,90) i el mcd(24,90), s'han de descompondre ambdós nombres:

$24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 1$ i $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$.

1. $\text{mcm}(24,90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1 = 360$. Es multipliquen els factors primers comuns i no comuns amb el major exponent.
2. $\text{mcd}(24,90) = 2 \cdot 3 \cdot 1$. Es multipliquen els factors primers comuns amb el menor exponent.

Què és un nombre natural?

> Un nombre natural és el que permet comptar objectes. Des de fa segles es representa utilitzant les xifres del 0 al 9.



Fragment d'una pàgina del *Codex Virgilanus* (s. X), on es poden observar les nou xifres, en ordre invers.

Els nombres naturals són els que permeten comptar objectes. La llista dels nombres naturals s'inicia amb l'1 i no té fi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. (l'etcètera indica precisament que aquesta llista no té fi). Des de fa alguns segles se solen representar amb les xifres decimals del 0 al 9, d'origen hindú, i que es van introduir a Europa per mitjà de textos àrabs. Un dels motius determinants per a l'ús d'aquestes xifres, en lloc d'altres representacions, és la facilitat per al càlcul de les operacions bàsiques entre aquests nombres: suma, resta, multiplicació i divisió.

Quins són les operacions bàsiques entre nombres naturals?

> Les operacions bàsiques entre nombres naturals són la suma, la resta, la multiplicació i la divisió. La resta és una operació oposada a la suma, i la divisió és una operació oposada a la multiplicació.

La suma és una operació que es representa amb el signe +, interposat entre els dos nombres que se sumen. A continuació s'hi posa el signe = i, finalment, el resultat de la suma. Per exemple, $12 + 19 = 31$. Els nombres que se sumen es denominen *sumands,* mentre que el resultat rep el nom de *suma* o, simplement, *resultat*. En l'exemple, 12 i 19 són els sumands, i 31 és la suma.

La resta, també denominada *diferència* o *subtracció,* és una operació que es representa amb el signe – interposat entre els dos nombres que es volen restar. Per exemple, $14 - 6 = 8$. El nombre anterior al signe – es denomina *minuend*; el nombre que segueix el signe – es denomina *subtrahend* i el resultat de la resta es denomina *diferència.* En l'exemple, el 14 és el minuend, el 6 és el subtrahend i 8 és la diferència. En la resta de nombres naturals el minuend ha de ser més gran que el subtrahend. La suma i la resta són operacions oposades; aquest fet permet afirmar que en una resta, la diferència més el subtrahend és igual al minuend.

La multiplicació, o producte, de nombres naturals fa servir el signe × entre els dos nombres multiplicats, però també pot utilitzar un punt lleugerament elevat (·). Aquest signe es llegeix "per". És una operació que es basa en la suma: la suma de diversos sumands iguals es transforma en una multiplicació. Per exemple:

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \times 6 = 5 \cdot 6 = 30$$

és a dir, la suma de 5 vegades el 6 és igual a "5 per 6".

Els nombres multiplicats es denominen *factors,* mentre que el resultat de la multiplicació es denomina *producte.* En l'exemple, els factors són 5 i 6, mentre que el producte és 30.

Quan s'ha de multiplicar un nombre diverses vegades per ell mateix, s'escriu en forma de potència:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

El 2 de 2^5 indica el nombre que es multiplica diverses vegades i es denomina *base de la potència*. El 5 indica les vegades que s'ha de repetir el nombre i es denomina *exponent.*

La divisió de nombres naturals s'assenyala amb el signe : (o, també, /), interposat entre els dos nombres que s'han de dividir, i es llegeix "entre". El nombre dividit es denomina *dividend,* el nombre que divideix es denomina *divisor,* mentre que el

resultat es denomina *quocient*. Així, per exemple, en la divisió 15 : 3 = 5, el 15 es denomina *dividend*; el 3, *divisor,* i el 5, *quocient.*
Aquesta operació és oposada al producte; aquest fet permet trobar el resultat de qualsevol divisió: per exemple, per a conèixer el quocient de 72 : 8, s'ha de trobar el nombre que, multiplicat pel divisor, proporciona el dividend, és a dir:

$$8 \times ? = 72$$

evidentment, el nombre buscat és 9, perquè $8 \times 9 = 72$. Així, doncs, 72 : 8 = 9.

Què són i per a què serveixen els parèntesis?

> Els parèntesis són un parell de símbols que permeten tancar operacions que s'han de fer a part.

Els parèntesis són dos símbols: (per a obrir i) per a tancar. Entre aquests dos elements se situa una operació o grup d'operacions i s'utilitza per a tancar operacions que s'han de fer a part. Per exemple, en aquesta expressió, 3 + (6 + 8), s'ha de calcular primer el resultat de l'operació que es troba entre parèntesis, 6 + 8 = 14. Només després es farà l'operació exterior: 3 + (6 + 8) = 3 + 14 = 17. Si en una expressió hi ha diversos parèntesis encaixats, el primer que s'ha de fer és el més intern. Per exemple:

2 + (2 + (8 – 3)) = 2 + (2 + 5) = 2 + 7 = 9. Així, en una expressió amb parèntesis:

- El nombre de parèntesis que s'obren ha de ser el mateix que el dels que es tanquen.
- Sempre s'han d'operar en primer lloc els parèntesis més interns, sempre que hi hagi parèntesis encaixats.

En quin ordre s'han de fer les operacions?

> L'ordre de les operacions és: primer els parèntesis, a continuació les divisions i les multiplicacions, i, finalment, les sumes i restes.

De vegades se'ns presenta un grup d'operacions entre nombres naturals, que es denomina *expressió numèrica*. Per exemple:

$$4 + 5 - (5 \times 3 + 8 : 2)$$

Per a trobar el resultat d'aquesta expressió, s'han de tenir en compte aquestes observacions:

- És imprescindible conèixer l'ordre en el qual s'han de fer les operacions, que és el següent:
    - En primer lloc, s'han d'efectuar les operacions que es troben a l'interior dels parèntesis (començant pels parèntesis més interns).
    - En segon lloc, s'han de fer les multiplicacions i les divisions. Les divisions, sempre abans que les multiplicacions.
    - Finalment, les sumes i les restes. Primer les restes i, després, les sumes.
- S'ha de vigilar l'ús del signe igual, =: només s'ha d'usar quan l'expressió a l'esquerra de l'igual té el mateix resultat que la de la dreta. Per exemple,
  és correcte: $4 + 6 \times 3 = 4 + 18 = 22$
  és incorrecte: $7 \times 4 - 9 : 3 = 3 = 28 - 3 = 25$
  (encara que el resultat final, 25, sigui correcte, la primera igualtat és incorrecta: $7 \times 4 - 9 : 3 \neq 3$)

Quin problema trobem en les operacions entre nombres naturals?

> El problema bàsic que trobem en la resta i la divisió de nombres naturals és que no sempre es poden restar o dividir dos nombres qualssevol.

Quan es vulgui restar a un nombre natural, un altre de més gran o igual, comprovarem que no sempre és possible. Per exemple, 8 – 13 no pot donar com a resultat un nombre natural. Hauríem de definir un altre tipus de nombres, els nombres enters (podeu veure el tema corresponent), perquè aquesta operació sigui possible.
El quocient entre dos nombres naturals tampoc no és sempre un nombre natural. Per exemple, 13 : 5 no pot ser igual a un nombre natural perquè no hi ha cap nombre que multiplicat per 5 doni 13. En aquest cas, es pot descompondre la divisió anterior, de la manera següent: $13 = 5 \times 2 + 3$, essent el 3, denominat *residu,* menor que el divisor (5). Per tant, la regla general per a la divisió s'enuncia així:

$$\text{dividend} = \text{divisor} \times \text{quocient} + \text{residu}$$

i sempre que el residu sigui 0, es diu que la divisió és *exacta.* De vegades, per a abreujar, s'expressa d'aquesta altra manera:

$$D = d \times c + r$$

essent el dividend una D; el divisor, una d; el quocient, una c; i el residu, una r.

Què són els múltiples i els divisors?

> Un nombre és múltiple d'un altre si podem obtenir el primer multiplicant el segon per un nombre natural; també es diu que el primer nombre és *divisible* pel segon. A més, el segon nombre és *divisor* del primer.

És fàcil trobar una relació senzilla entre 3 i 15: $5 \times 3 = 15$, és a dir, el 15 és igual a cinc vegades el 3. En aquest cas es diu que el 15 és un múltiple de 3. Altres múltiples del 3 són el mateix 3, el 6, el 9, el 12, etc. En general, un nombre és múltiple d'un altre si es pot obtenir multiplicant aquest últim per algun altre nombre natural.
Quan una divisió entre dos nombres naturals és exacta, per exemple, 15 : 3 = 5, es diu que el 15 és *divisible* entre el 3 (o per 3). En aquest cas, també es diu que el 3 és un divisor del 15.
Es pot observar que els conceptes de múltiple, divisor i divisibilitat estan lligats estretament: si un nombre és múltiple d'un altre, també es pot afirmar que el primer nombre és divisible pel segon; de la mateixa manera, el segon ha de ser un divisor del primer. És a dir,

si *a* és múltiple de *b*, llavors *b* és divisor de *a*
i *a* és divisible per *b*

En l'exemple anterior:

15 és múltiple de 3, llavors 3 és divisor de 15
i 15 és divisible per 3

Quines són les propietats dels múltiples i divisors?

> Les propietats dels múltiples i dels divisors són la reflexiva, la transitiva i l'antisimètrica.

Les propietats que compleixen els múltiples (i els divisors) de qualsevol nombre són les següents:

- Qualsevol nombre natural és múltiple (i divisor) d'ell mateix. Per exemple, el 7 és múltiple del 7 perquè $7 \cdot 1 = 7$; també és divisor de 7 perquè 7 : 7 = 1. Aquesta propietat es denomina *reflexiva.*

- Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest últim és múltiple d'un tercer nombre, llavors, el primer nombre també és múltiple del tercer nombre (passa el mateix si es tracta de divisors). Per exemple, el 84 és múltiple de 21, i 21 és múltiple de 7, llavors 84 és múltiple de 7. Aquesta propietat es denomina *transitiva.*
- Si un nombre és múltiple d'un altre i aquest últim ho és del primer, llavors ambdós nombres són el mateix nombre (el mateix es pot dir en el cas de ser divisor). Aquesta propietat es denomina *antisimètrica.*

Com se sap si un nombre és múltiple (o divisor) d'un altre?

> Hi ha una sèrie de criteris senzills que permeten saber quan un nombre és divisible per un d'aquests nombres: 2, 3, 4, 5, 6, 9 , 10 i 11.

En alguns casos, és molt útil conèixer si un nombre és divisible per alguns nombres concrets:

Divisible per	Criteri de divisibilitat	Exemple
2	Un nombre natural és divisible per 2 si la seva última xifra és un nombre parell.	El 548 és divisible per 2 perquè la seva última xifra (8) és parell.
3	Un nombre natural és divisible per 3 si la suma de les seves xifres és divisible per 3.	El 18.231 és divisible per 3 perquè la suma de les seves xifres (1 + 8 + 2 + 3 + 1 = 15) és divisible per 3.
4	Un nombre natural és divisible per 4 si el nombre format per les seves dues últimes xifres és divisible per 4.	El 95.828 és divisible per 4 perquè el numero format per les seves dues últimes xifres (28) és divisible per 4.
5	Un nombre natural és divisible per 5 si la seva última xifra és 0 o 5.	El 845.825 és divisible per 5 perquè la seva última xifra és 5.
6	Un nombre natural és divisible per 6 si és divisible per 2 i per 3.	El 234 és divisible per 6 perquè és divisible per 2 i per 3.
9	Un nombre natural és divisible per 9 si la suma de les seves xifres és divisible per 9.	El 94.833 és divisible per 9 perquè la suma de les seves xifres (9 + 4 + 8 + 3 + 3 = 27) és divisible per 9.
10	Un nombre natural és divisible per 10 si la seva última xifra és 0.	El 9.274.020 és divisible per 10 perquè la seva última xifra és 0.
11	Un nombre és divisible per 11 quan la diferència entre la suma de les xifres que ocupa la posició parell i la suma de les xifres que ocupen la posició senar és múltiple d’11.	El 12.111 és divisible entre 11 perquè la diferència de les xifres que ocupen la posició parell (1 + 1 + 1 = 3) i la suma de les xifres que ocupen la posició senar (2 + 1 = 3), és a dir, 3 – 3 = 0, és múltiple d’11.

Què és un nombre primer?

> Un nombre natural és primer quan els únics divisors que té són el mateix nombre i l'1.

Un nombre natural es diu que és un nombre primer quan els únics divisors que té són el mateix nombre i l'1. Els exemples més senzills de nombres primers són: 1, 2, 3, 5, 7, 11, etc. Per a saber si un nombre és primer, s'ha de dividir entre tots i cadascun dels nombres primers menors que el nombre en qüestió, començant pel 2. Si cap d'aquests nombres no és un divisor seu, llavors el nombre és primer. Per exemple, per a saber si el nombre 121 és primer, s'ha d'intentar dividir entre 2, 3, etc.; quan s'arriba a l'11, es pot comprovar que el 121 no és primer, perquè $121 = 11 \cdot 11$.
Qualsevol nombre natural es pot descompondre en un producte de factors primers i aquesta descomposició és única. Per exemple, el nombre 28 es pot expressar com a $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, és a dir, $28 = 1 \cdot 2^2 \cdot 7$.

Com es descompon un nombre natural en factors primers?

> La descomposició d'un nombre natural en factors primers és summament important i es pot fer de manera molt senzilla.

El procediment per a descompondre un nombre natural és senzill tot i que, de vegades, pot ser un procés llarg. Aquests són els passos per a descompondre un nombre:

<table>
<tr><th>Passos</th><th>Exemple</th></tr>
<tr><td>1. S'escriu el nombre que es vol descompondre i, a la seva dreta, una línia vertical.</td><td>$\begin{array}{r|l} 36 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>2. S'escriu al costat de la línia vertical el nombre primer més petit, que no sigui 1, que sigui divisor del nombre situat a la part esquerra de la línia.</td><td>$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>3. Sota el nombre de l'esquerra s'escriu el quocient de la divisió d'aquest nombre entre el nombre primer situat a la seva dreta.</td><td>$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>4. Es repeteixen els passos 2 i 3, fins que a l'esquerra s'hagi d'escriure un 1.</td><td>$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>5. Finalment, es pot comprovar com el nombre inicial és igual al producte de tots els nombres primers que apareixen a la dreta de la línia.</td><td>$36 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 =$
$= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$</td></tr>
</table>

La descomposició d'un nombre natural és molt important per a trobar el màxim comú divisor (mcd) i el mínim comú múltiple (mcm).

Què és i com es troba el màxim comú divisor o mcd?

> El màxim comú divisor (mcd) de dos (o més) nombres naturals és el més gran dels divisors comuns d'aquests nombres.

El màxim comú divisor (denominat, per a abreujar, mcd) de dos (o més) nombres naturals és el nombre que compleix aquests dos requisits:

- És un divisor comú d’ambdós nombres.
- És el més gran d'aquests divisors.

Així, per exemple, el màxim comú divisor de 36 i 30 és 6, és a dir, mcd(36, 30) = 6. Això és així perquè si s'escriu una llista de tots els divisors de 36 i una altra amb els de 30:
divisors de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
divisors de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
podem comprovar que de tots els divisors comuns (en blau), el més gran és el 6. És clar, aquest mètode per a trobar el mcd entre dos nombres podria requerir molt de temps perquè s’han de trobar tots els divisors d'un nombre. Hi ha un mètode molt més ràpid i senzill per a trobar el mcd entre dos nombres, que consta d'aquests dos passos:

1. Es descomponen els dos (o més) nombres en factors primers. En l'exemple, $36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$, mentre que $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.
2. Es multipliquen els nombres primers comuns a ambdues (o més) descomposicions, fent servir el de menor exponent. En l'exemple, els primers comuns són 1, 2 i 3; el seu exponent ha de ser 1, perquè és el menor. Per tant, $\text{mcd}(36,30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Què és i com es troba el mínim comú múltiple o mcm?

> El mínim comú múltiple (mcm) de dos (o més) nombres naturals és el menor dels múltiples comuns d'aquests nombres.

El mínim comú múltiple (denominat, per a abreujar, mcm) de dos nombres és un nombre que ha de complir que:

- És un múltiple d’aquests dos nombres.
- És el menor d'aquests múltiples.

Per exemple, el mínim comú múltiple dels nombres 4 i 10 és el 20, és a dir, mcm(4,10) = 20. Aquest fet es pot comprovar fàcilment escrivint la llista de múltiples d’aquests dos nombres:

múltiples de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, etc.
múltiples de 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, etc.

S’han ressaltat el múltiples comuns a ambdós. És fàcil observar que el menor d'aquests múltiples comuns és el 20.
Evidentment, aquest mètode per a trobar el mcm de dos (o més) nombres pot ser molt lent. Així, doncs, per a trobar el mcm de dos nombres s’ha de fer el següent:

1. Es descomponen els nombres en factors primers. Així, per exemple, en el cas dels nombres 4 i 10, $4 = 1 \cdot 2^2$ i $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$.
2. Es multipliquen els nombres primers de les descomposicions que siguin comunes a tots dos nombres, utilitzant els d'exponent més gran, i també els que no són comuns, amb l'exponent corresponent. En el cas de l'exemple, els primers comuns són l'1 i el 2, aquest últim elevat al quadrat perquè és el d'exponent major; pel que fa als primers no comuns, només hi ha el 5. Així, doncs,
$$\text{mcm}(4, 10) = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 = 20.$$

Els nombres enters

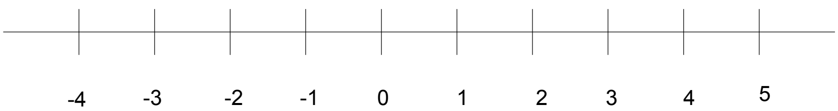
Els nombres enters

Els nombres enters són els que permeten comptar tant els objectes que es tenen com els objectes que es deuen.

Tipus d'enters
- Enters positius: precedits del signe + o de cap signe. Exemples:
  $3, +5, 6, +12$
- El zero, 0, que no és ni positiu ni negatiu
- Enters negatius: precedits sempre del signe $-$. Exemples:
  $-5, \ -7, \ -23$

L'ordenació dels enters
- Signes
  - $>$ significa "major que". Exemple: $58 > 12$
  - $<$ significa "menor que". Exemple: $-3 < 12$
- Caracterització
  - • Qualsevol nombre positiu sempre es major que quasevol nombre negatiu.
    Per exemple, $+3 > -8$ (o bé, $-8 < +3$).
  - • El 0 es major que qualsevol nombre negatiu, i menor que qualsevol nombre postiu.
    Per exemple, $-30 < 0 < 4$ (o bé, $4 > 0 > -30$).
  - • Entre dos enters negatius, el major és aquell que, sense signe, és el menor.
    Per exemple, $-5 > -12$ (o be, $-12 < -5$).

Representació en una recta dels enters:



El valor absolut d'un nombre enter és el mateix nombre sense signe: $|-4| = |4| = 4$.

Les operacions entre nombre enters

La suma

Nombres amb signes iguals — Se sumen els valors absoluts i es posa el signe que tenen:

$+5 + (+4) = +9$

$-4 + (-10) = -14$

Nombres amb signes diferents — Es resten els valors absoluts del més gran menys el del més petit, i es posa el signe del més gran: $+8 + (-7) = +1$.

Propietats de la suma

- La propietat commutativa: $7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$
- La propietat associativa: $-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$
- L'element neutre de la suma de nombres enters és el 0
- L'element oposat d'un nombre enter: l'oposat de 3 és -3

La resta

La resta de dos nombres és la suma de minuend i l'oposat del subtrahend:

$-4 - (-7) = -4 + (+7) = +3$

La multiplicació i la divisió

Propietats de la multiplicació

- La propietat commutativa: $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$
- La propietat associativa : $-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24$
- La propietat distributiva del producte respecte de la suma:

$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$

Regla dels signes

Multiplicació	+	–	Divisió	+	–
+	+	–	+	+	–
–	–	+	–	–	+

Les operacions i l'ordre dels enters

La suma	No altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 + (-3) < +4 + (-3)$
La resta	No altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 - (-3) < +4 - (-3)$
La multiplicació	Si es multiplica per un nombre positiu, no altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 \times (+3) < +4 \times (+3)$ Si es multiplica per un nombre negatiu, altera l'ordre: $-2 < +4$; per tant, $-2 \times (-3) > +4 \times (-3)$
La divisió	Si es divideix per un nombre positiu, no altera l'ordre: $-4 < +2$; per tant, $-4 : (+2) < +2 : (+2)$ Si es divideix per un nombre negatiu, altera l'ordre: $-4 < +2$; per tant, $-4 : (-2) > +2 : (-2)$

Que és un nombre enter?

> Els nombres enters són els que permeten comptar tant objectes que es tenen com objectes que es deuen.

Els nombres enters permeten contar, entre moltes altres situacions, tant allò que es posseeix com allò que es deu. Més genèricament, els nombres enters permeten representar les situacions en les quals els objectes contats es poden dividir en dos grups, un de format pels objectes que es compten a partir d'un punt en endavant, i l'altre format pels que es compten a partir d'aquest mateix punt cap enrere.


72
4 + 5 Wiltu das wyſ-
4 — 17 ſen oder deßgley-
3 + 30 chen/So ſumier
4 — 19 die zentner vnd
3 + 44 lb vnnd was auß
3 + 22 —iſt/das iſt mi-
Zentner 3 — 11 lb nus dz ſetz beſon-
3 + 50 der vnnd werden
4 — 16 4539 lb (So
3 + 44 du die zendtner
3 + 29 zů lb gemachett
3 — 12 haſt vnnd das /
3 + 9 + das iſt meer
darzů Addiereſt)vnd > 5 minus. Nun

Els símbols + i – van aparèixer impresos per primera vegada en *Aritmètica Mercantil*, de Johannes Widmann, publicada a Leipzig el 1489. L'autor va utilitzar aquests símbols per a referir-se a guanys i pèrdues en problemes comercials.

Els nombres enters es poden classificar en:

- Enters positius, que són els que permeten comptar allò que es posseeix; es poden associar als nombres naturals (excepte el 0). Els enters positius es poden escriure com s'escriuen els nombres naturals, o bé poden anar precedits del signe +. Per exemple, el nombre enter 5 també es pot escriure com a +5. Així, per a indicar que es posseeixen 13 €, es pot escriure +13 € o, simplement, 13 €.
- Enters negatius, que són els que permeten comptar el que es deu. Els enters negatius s'escriuen utilitzant un nombre natural, precedit d'un signe –. Així, un enter negatiu podria ser –6, que es llegeix "menys 6". Per tant, per a indicar que es deuen 23 €, es pot escriure –23 €.
- El zero, que és un enter ni positiu ni negatiu.

Com estan ordenats els nombres enters?

> Donats dos nombres enters diferents qualssevol, un d'ells sempre és més gran que l'altre, fet que es pot expressar amb els signes de desigualtat.

Donats dos nombres enters diferents qualssevol, un d'ells sempre és més gran que l'altre. Aquest fet tan senzill es pot expressar mitjançant els signes de desigualtat:

- El signe **>** significa 'major que', i indica que el que es troba a l'esquerra del signe és més gran que el que es troba a la dreta. Per exemple, l'expressió $6 > 4$ indica que el 6 és més gran que el 4.
- El signe **<** significa 'menor que', i indica que el que es troba a l'esquerra del signe és més petit que el que es troba a la dreta. Per exemple, l'expressió $1 < 17$ indica que l'1 és menor que el 17.

Com en el cas del signe igual, = , es poden encadenar diversos signes < ó >. Ara bé, en una mateixa expressió, només poden aparèixer signes < ó > del mateix tipus. Per exemple, és correcte escriure $5 < 7 < 8$; en canvi, és incorrecte escriure $8 > 1 < 2$ (encara que ambdues parts de l'expressió siguin correctes).
Utilitzant aquests signes es poden ordenar tots els nombres enters, tenint en compte que:

- Qualsevol nombre positiu sempre és més gran que qualsevol nombre negatiu. Això és fàcil d'entendre amb un exemple: és evident que +3 € és més gran que –9 €; és a dir, es posseeix més diners tenint 3 € que devent 9 €. Així, doncs, $+3 > -9$ (o bé, $-9 < +3$).
- El 0 és més gran que qualsevol nombre negatiu i menor que qualsevol nombre positiu. És clar que no tenir cap euro (0 €) és posseir més que

deure'n trenta (–30 €) però, en canvi, és tenir menys que quatre euros (+4 €). Així, doncs, –30 < 0 < 4 (o bé, 4 > 0 > –30).

- Entre dos enters negatius, el més gran és aquell que, sense signe, és el menor. Un exemple pot il·lustrar aquest fet: Qui té més diners, algú que deu 5 €, o bé algú que deu 12 €? És fàcil contestar que qui deu 5 €. És a dir, –6 > –12 (o bé, –12 < –6).

Què és el valor absolut d'un nombre enter?

> El valor absolut d'un nombre enter és igual al mateix nombre enter eliminant el seu signe.

El valor absolut d'un nombre enter és igual al mateix nombre enter sense el seu signe. És a dir, per a trobar el valor absolut d'un nombre enter, n'hi ha prou amb llevar-li el signe i convertir-lo en un nombre natural. Així, per exemple, el valor absolut del +6 és igual a 6; el valor absolut de –23 és igual a 23; evidentment, el valor absolut de 0 és 0.
Per a expressar el valor absolut d'un nombre, es fan servir dos petits segments verticals col·locats a banda i banda del nombre; així, el valor absolut de +6, s'expressa $|+6|$, i $|+6| = 6$. De la mateixa manera:

$|-23| = 23$ $\qquad$ $|0| = 0$.

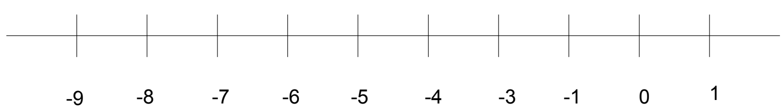
Com es representen els nombres enters en una recta?

> Les característiques dels nombres enters permeten representar-los en una recta.

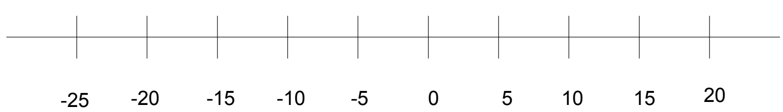
Les característiques dels nombres enters permeten representar-los sobre una recta, com a punts equidistants, és a dir, punts que es troben a la mateixa distància, ja que:

- No hi ha cap nombre enter que sigui el primer, ni tampoc l'últim. És a dir, donat un nombre enter qualsevol, sempre es pot trobar un nombre que sigui menor i un altre nombre que sigui major.
- Un nombre enter i el següent sempre es diferencien en una unitat.
- Els nombres enters es poden llistar ordenats d'esquerra a dreta; evidentment, aquesta llista sempre serà incompleta. Per exemple:
  ... –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...

Així, doncs, una altra representació dels nombres enters pot ser aquesta:



També és possible representar nombres enters no consecutius, encara que la diferència entre un i el següent sempre ha de ser, habitualment, la mateixa. Per exemple, en aquesta representació els nombres es troben de 5 en 5:



Com es pot observar, el zero no s'ha de trobar sempre en el centre de la representació; fins i tot pot no trobar-se entre els nombres representats. Per exemple:

Com es fan la suma i la resta entre nombres enters?

> La suma i la resta de nombres enters tenen unes regles especials i compleixen les propietats commutativa i associativa.

Les operacions entre nombres enters són les mateixes que entre els nombres naturals i compleixen, a més, les mateixes propietats; ara bé, tenen certes regles de càlcul específiques per la distinció que hi ha entre enters positius i enters negatius. En tot cas, la denominació d'operacions i elements que formen part de cada operació se segueix mantenint.

Les regles per a sumar nombres enters són les següents:

- Per a sumar dos nombres que tenen el mateix signe, se sumen els seus valors absoluts i, al resultat, s'hi afegeix el signe comú. Per exemple:

  +17 + (+12) = +29
  –10 + (–6) = –16

- Per a sumar dos nombres amb signe diferent, s'han de restar els seus valors absoluts, el més gran del més petit. Finalment, s'ha d'afegir el signe del nombre que té el valor absolut més gran. Per exemple:

  +13 + (–11) = +2 (el valor absolut de +13, 13 és més gran que el valor absolut de –11, 11; per això, el signe ha d'ésser +)
  +6 + (–11) = –5 (el valor absolut de –11, 11 és més gran que el valor absolut de +6, 6; per això el signe ha d'ésser –)

La suma de nombres enters té les propietats següents:

- La propietat commutativa, és a dir, que l'ordre dels sumands no altera el resultat. Per exemple: 7 + (–2) = –2 + (+7) = 5
- La propietat associativa, és a dir, una suma de més de dos enters no depèn de l'ordre en què es fan les sumes. Per exemple:

  –3 + (+2) + (–5) = (–3 + (+2)) + (–5) = –3 + ((+2) + (–5)) = –6

Hi ha dos tipus d'elements que compleixen certes propietats especials: l'element neutre de la suma de nombres enters és el 0; l'element oposat d'un nombre enter és un altre nombre enter que, sumat amb l'anterior, dóna zero. Per exemple, l'oposat de +5 és –5, perquè +5 + (–5) = 0. És fàcil observar que per a calcular l'oposat d'un nombre, únicament s'ha de canviar el seu signe. Tot nombre enter té un únic oposat i tots dos nombres tenen el mateix valor absolut. En l'exemple: |+5| = |–5| = 0.

La resta o diferència de nombres enters té una regla senzilla: la diferència de dos nombres enters és igual a la suma del minuend amb l'oposat del subtrahend. Per exemple:

14 – (+3) = 14 + (–3) = 11
–12 – (+16) = –12 + (–16) = –28

Sempre signifiquen el mateix els signes + i –?

> Els signes + i – poden representar el signe d'un nombre enter, o bé una operació.

Els signes + i – poden expressar tant una operació com el signe d'un nombre (positiu o negatiu). Cada vegada que es detecta un signe d'aquest tipus en una expressió numèrica, s'ha de distingir quin és el seu sentit. Així, per exemple:

signes d'operació

$$+2 \;-\; (-12) \;-\; (+7) \;-\; (-9)$$

signes dels números

+2 – (–12) – (+7) – (–9)

Quan entre dos nombres només hi ha un únic signe, aquest no pot expressar altra cosa que una operació. Per exemple:

$$5 \;-\; 7$$

signe d'operació

Per descomptat, en aquest cas, el signe del nombre que segueix el signe d'operació és sempre positiu perquè és sabut que quan un nombre no té signe, aquest és positiu.
Una expressió amb nombres enters pot ser molt confusa per la quantitat de signes i parèntesis innecessaris (parèntesis que només tanquen un nombre). Per a evitar-ho, es poden eliminar dos signes consecutius (un d'operació i l'altre del nombre) seguint per ordre aquestes senzilles regles:

- S'eliminen tots els parèntesis.
- Se substitueixen dos signes consecutius.

$$\begin{cases} \text{per un signe +, si es tracta de dos signes iguals} \\ \text{per un signe } -\text{, si es tracta de signes diferents} \end{cases}$$

Per exemple:

–5 + (–8) – (–13) + (–2) – (+4) + (+6) = –5 – 8 + 13 – 2 – 4 + 6

Una manera ràpida d'obtenir el resultat final és la següent: se sumen, d'una banda, tots els nombres precedits d'un signe +; per altra banda, se sumen tots aquells que van precedits d'un signe –. Finalment, es fa la suma d'aquests dos valors, tenint en compte que tenen signes diferents.

Com es fan la multiplicació i la divisió entre nombres enters?

> Les regles multiplicació de nombres enters tenen unes regles especials i compleixen les propietats commutativa i associativa.

Per a fer una multiplicació entre nombres enters, en primer lloc es realitza el producte dels seus valors absoluts; a continuació s'ha d'establir el signe del resultat. Amb aquesta finalitat només cal recordar la regla següent:

- si ambdós nombres tenen el mateix signe, el seu producte és positiu;
- si els nombres tenen signe diferent, el seu producte és negatiu.

És usual escriure aquesta regla d'aquesta manera:

$+ \times + = +$ $\qquad$ $+ \times - = -$

$- \times - = +$ $\qquad$ $- \times + = -$

En tot cas, s'ha de tenir en compte que aquestes expressions només serveixen per a recordar la regla, i no es poden trobar dintre d'una expressió numèrica (en la qual està prohibit l'ús de dos signes consecutius). Així, per exemple:

$$+5 \cdot (+4) = +20$$
$$-5 \cdot (-4) = +20$$
$$+5 \cdot (-4) = -20$$
$$-5 \cdot (+4) = -20$$

Les mateixes regles són vàlides per a la divisió, canviant el signe de multiplicar pel signe de dividir:

$+ : + = +$ $\qquad$ $+ : - = -$

$- : - = +$ $\qquad$ $- : + = -$

En cas que la divisió sigui exacta, igual que amb els nombres naturals, es diu que el dividend és un múltiple del divisor. Les regles i propietats de múltiples i divisors són també les mateixes, utilitzant el valor absolut dels nombres. Per exemple, el –3 és un divisor del 12 perquè $|12| : |-3| = 4$ és una divisió exacta.
Les propietats del producte de nombres enters són:

- La propietat commutativa: l'ordre dels factors no afecta el producte. Per exemple: $3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$.
- La propietat associativa: el producte de més de dos factors no depèn de l'ordre com es fan las multiplicacions. Per exemple:
  $$-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24.$$

Una altra propietat que relaciona la suma i el producte de nombres enters és la propietat distributiva del producte respecte de la suma. Aquesta propietat afirma que el producte d'un nombre per la suma de dos nombres és igual a la suma dels productes del primer nombre per cadascun dels altres dos. Per exemple:

$$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$$

Com afecten les operacions a l'ordre dels nombres enters?

> En sumar o restar un mateix nombre a dos nombres enters, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre que els dos nombres originals; en canvi, en multiplicar o dividir dos nombres per un mateix nombre enter, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre només si aquest últim nombre és positiu.

És important conèixer la influència que exerceixen les operacions en l'ordre dels nombres enters. En altres paraules, donats dos nombres enters qualssevol, com influeix l'operació (suma, resta, multiplicació o divisió) amb un altre nombre en la seva ordenació?
Si se suma (o es resta) un mateix nombre a dos més, els resultats conserven el mateix ordre que tenien aquests dos nombres. Per exemple, evidentment $-4 < 8$. Si se suma +3 a ambdós nombres, els resultats mantenen el mateix ordre:

$$-4 < 8.$$

sumant 3 a banda i banda de la desigualtat

$-4 \mathbf{+ 3}$ $\qquad$ $8 \mathbf{+ 3}$

resulta $\quad -1 < 11.$

per la qual cosa es manté la desigualtat.
Així, doncs, els resultats mantenen el mateix ordre que els nombres inicials.
De la mateixa manera, en restar un mateix nombre a dos nombres, els resultats conserven el mateix ordre que tenien aquests dos nombres. Per exemple:

$$-4 < 8.$$

restant 4 a banda i banda de la desigualtat

$-4 - \mathbf{4}$ $\qquad$ $8 - \mathbf{4}.$

resulta $\quad -8 < 4.$

amb la qual cosa es manté la desigualtat.
En general, se sol dir que en sumar o restar un mateix nombre als dos costats d'una desigualtat, la desigualtat es manté. També es pot dir que la suma i la resta mantenen l'ordre dels enters.
En canvi, quan es multipliquen o es divideixen ambdós costats d'una desigualtat per un mateix nombre, no sempre passa el mateix. Si es multiplica, per exemple, +3, a banda i banda d'aquesta desigualtat:

$$-5 < 3$$

els resultats són $-5 \cdot 3$ $\quad$ $3 \cdot 3$.

és a dir $-15 < 9$.

l'ordre de resultat segueix essent el mateix. En canvi, si es multiplica per un nombre negatiu, per exemple, el –4

$$-5 < 3$$

els resultats són $-5 \cdot (-4)$ $\quad$ $3 \cdot (-4)$

és a dir $20 > -12$.

en aquest cas, l'ordre és exactament el contrari, com es pot observar, ja que s'ha canviat el signe < pel signe >.
D'aquesta manera, es pot afirmar que:

- els resultats mantenen el mateix ordre si el nombre pel qual es multipliquen és positiu;
- els resultats tenen un ordre contrari si el nombre pel qual es multipliquen és negatiu.

Altres exemples podrien ser:

$$-9 < -3$$

si es multipliquen ambdós nombres per +5,

$$-9 \cdot 5 \qquad -3 \cdot 5$$

s'obté $-35 < -15$;

en canvi, si es multipliquen ambdós nombres per –2,

$$-9 \cdot (-2) \qquad -3 \cdot (-2)$$

s'obté $18 > 6$

tal com s'esperava.
De manera semblant, sabem que,

$$4 > -3$$

si es multipliquen ambdós nombres per +3,

$$4 \cdot (+3) \qquad -3 \cdot (+3)$$

s'obté $12 > -9$,

tal com s'esperava. En canvi, si es multipliquen ambdós nombres per –5

$$4 \cdot (-5) \qquad -3 \cdot (-5)$$

s'obté $-20 < 15$,

tal com afirma la regla.
En el cas de la divisió, les regles s'apliquen de la mateixa manera que amb la multiplicació. Per exemple:

$$-15 < 30$$

si es divideixen ambdós costats entre 5,

$$-15 : 5 \qquad 30 : 5$$

s'obté $-3 < 6$;

en canvi,

$$-36 < -30$$

Si es divideixen ambdós costats entre –2,

$$-36 : (-2) \qquad -30 : (-2)$$

s'obté $18 > 15$,

com es podia preveure.

Els nombres racionals

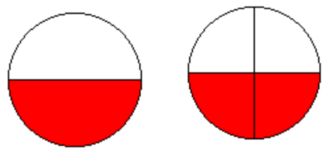
Els nombres racionals

Els nombres fraccionaris o fraccions permeten representar les situacions en les quals s'obté o es deu una part d'un objecte.

Totes les fraccions **equivalents** entre si representen el mateix **nombre racional**, i la millor representació d'aquest nombre és **la fracció irreductible**.

Una fracció *irreductible* és aquella el numerador i denominador de la qual són primers entre si.
La manera de trobar-la, denominada *simplificació,* consisteix a dividir numerador

Dues o més fraccions són *equivalents* si representen la mateixa part. Per exemple, la fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4.



Forma decimal d'un nombre racional

La forma decimal està formada per una secció entera, a l'esquerra de la coma, i una secció decimal, o senzillament, decimals, a la dreta de la coma. Exemple:

Nom	desena	unitat	desena	centèsima	mil·lèsima	deumil·lèsima	centmil·lèsima	milionèsima
Xifres	1.	5.	3.	2.	5.	7.	0.	2.

- La forma decimal estricta: si la divisió del numerador entre el denominador acaba tenint un residu igual a 0. Exemple: 12/5 = 2,4.
- La forma decimal es denomina *periòdica* en cas contrari. La xifra, o xifres, que es repeteixen duen el símbol periòdic a la part superior. Per exemple:

$$\frac{5627}{9900} = 0,568383838383... = 0,56\overset{\frown}{83}$$

De la forma fraccionària a la forma decimal

S'obté dividint el numerador entre el denominador d'una fracció. Per exemple, la forma decimal de 12/5 és 2,4, és a dir, 12/5 = 2,4.

De la forma decimal a la forma fraccionària

- Si la forma decimal és estricta. Exemple, la forma fraccionària de 3,465 és 3465/1000.
- Si la forma decimal és periòdica. Exemple:

$$23,4\overset{\frown}{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Les operacions amb nombres fraccionaris</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">La suma</td></tr>
<tr><td>Denominadors iguals</td><td colspan="2">Se sumen els numeradors en el numerador i es manté el denominador:
$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Denominadors diferents</td><td colspan="2">Es busquen fraccions equivalents amb el mateix denominador i se sumen seguint el procediment anterior:
$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{15}{18}+\frac{4}{18}=\frac{19}{18}$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Mètodes per a trobar el mateix denominador</td></tr>
<tr><td>Multiplicant els denominadors</td><td>$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{5\times 9}{6\times 9}+\frac{2\times 6}{9\times 6}=\frac{45}{54}+\frac{12}{54}=\frac{57}{54}$</td></tr>
<tr><td>Calculant el mcm dels denominadors</td><td>$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}\underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{mcm}(6,9)=18 \\ 18/6=3 \\ 18/9=2}}{=}\frac{5\times 3+2\times 2}{18}=\frac{15+4}{18}=\frac{19}{18}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">La resta</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Suma amb l’oposat:
$\frac{4}{7}-\frac{2}{3}=\frac{4}{7}+\frac{-2}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">La multiplicació</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Producte de numeradors en el numerador i producte de denominadors en el denominador:
$\frac{2}{3}\times\frac{-2}{7}=\frac{2\times(-2)}{3\times 7}=\frac{-4}{21}$</td></tr>
<tr><td>La fracció d’un nombre</td><td colspan="2" align="center">dos terços de 125 és $\frac{2}{3}\times 125=\frac{2}{3}\times\frac{125}{1}=\frac{250}{3}$</td></tr>
<tr><td>L’invers d’un nombre</td><td colspan="2" align="center">3/7 és l’invers de 7/3.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">La divisió</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">És el producte del numerador per l’invers del denominador:
$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{5}=\frac{3\cdot 9}{4\cdot 5}=\frac{27}{20}$</td></tr>
</table>

Què és un nombre fraccionari?

> Els nombres enters no poden expressar totes les situacions possibles en les quals intervenen càlculs numèrics: els nombres fraccionaris es troben, per exemple, en aquelles situacions en les quals es produeix un repartiment d'objectes.

Sempre que se sumen, resten o multipliquen dos nombres enters, el resultat és un nombre enter. Això no succeeix així quan els nombres es divideixen. Per exemple:

en dividir 12 entre 4, 12 / 4, el resultat és un nombre enter, el 3;

en dividir 1 entre 2, 1 / 2,el resultat no és un nombre enter.

En aquest últim cas sorgeix la qüestió del significat d'aquesta última expressió, 1/2, i d'altres de similars. Aquest tipus d'expressions conformen els nombres fraccionaris i es poden associar, per exemple, al repartiment d'objectes entre diverses persones. Així, per exemple, si es volen repartir 8 pastissos iguals entre 2 persones, cadascuna d'elles obtindrà 4 pastissos, ja que 8 : 2 = 4. Ara bé, si es vol repartir 1 pastís entre 2 persones, no hi ha cap nombre enter que pugui representar el resultat d'aquesta operació. En aquest cas, a cada persona no li correspon més que una part o fracció del pastís, en concret, la meitat del pastís. El nombre que expressa aquest repartiment és, simplement, la forma de la divisió amb la barra, és a dir, 1/2. Aquest nombre és un nombre fraccionari.

Un nombre fraccionari, o fracció, o simplement trencat, s'expressa en forma de quocient de nombres enter, amb una barra entre ambdós nombres, que pot ser horitzontal o inclinada. Un exemple de fracció pot ser:

$\frac{12}{5}$, o també, 12/5

En aquest cas, el 12 es denomina *numerador* i el 5, *denominador*. Com es pot observar, doncs, els elements d'un nombre fraccionari es denominen de manera específica, diferenciada de la denominació dels elements d'una divisió entera.

Per a llegir aquestes expressions s'utilitza, en general, el nom del nombre del numerador, seguit del plural del partitiu corresponent al denominador (si el numerador és 1, s'utilitza el singular). Així, per exemple, 12/5 es llegeix "dotze cinquens"; 1/7 és "un setè"; 3/11 és "tres onzens", etc. Ara bé, de vegades, sobretot si el denominador és molt gran, simplement s'utilitza l'expressió "partit per", o bé, "entre", entre el numerador i el denominador. Així, 12/25 és "dotze partit per vint-i-cinc", o bé, "dotze entre vint-i-cinc".

Una fracció que tingui el numerador menor que el denominador, i ambdós positius, es denomina *fracció pròpia*. Per exemple, 1/4 és una fracció pròpia.

Qualsevol nombre enter es pot convertir en un nombre fraccionari. Amb aquesta finalitat, la fracció ha de tenir el numerador igual al nombre enter en qüestió i el denominador ha de ser 1. Així, doncs, per exemple, 8 = 8/1. També, –3 = –3/1.

Aquest fet ens mostra com els nombres enters són un subconjunt dels nombres fraccionaris o, dit d'una altra manera, qualsevol nombre enter és, també, un nombre fraccionari.

Quin és el signe d'una fracció?

> Les regles per a establir el signe d'una divisió entera també s'utilitzen per a establir el signe d'una fracció.

Tant el numerador com el denominador d'una fracció poden ser positius o negatius. Utilitzant la regla dels signes per a la divisió de nombres enters, es pot deduir el signe d'ona fracció. Per exemple:

$$\frac{+4}{+7}=\frac{4}{7} \qquad \frac{-6}{-11}=\frac{6}{11} \text{ són fraccions positives}$$

$$\frac{-4}{+7}=\frac{-4}{7} \qquad \frac{+6}{-11}=\frac{-6}{11} \text{ són fraccions negatives}$$

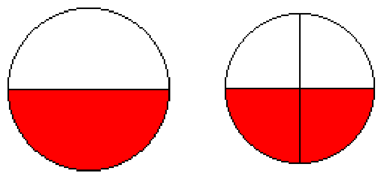
És a dir, una fracció és positiva si numerador i denominador tenen el mateix signe; una fracció és negativa si numerador i denominador tenen signe diferent. Normalment, el signe de la fracció s'anteposa al numerador, mentre que el denominador no va precedit de cap signe, tal com s'il·lustra en els exemples. El signe de la fracció també es pot situar avantposat a la línia fraccionària, a la seva mateixa altura, com per exemple:

$$\frac{4}{7}=+\frac{4}{7} \qquad \frac{-6}{11}=-\frac{6}{11}$$

En quins casos dues o més fraccions són equivalents?

> Dues (o més) fraccions són equivalents quan representen un mateix nombre; hi ha una prova senzilla per a esbrinar-ho.

La fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4.



Resulta fàcil observar que hi ha fraccions diferents que representen el mateix nombre. Per exemple, la fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4. La comprovació d'aquest fet és senzilla: si es reparteix un pastís equitativament entre dues persones, a cadascuna li correspondrà la meitat del pastís, és a dir, 1/2. Si es reparteixen equitativament 2 pastissos entre 4 persones, a cadascuna li correspondrà, evidentment, la mateixa quantitat de pastís que en el cas anterior; ara bé, en aquest cas, la seva porció és igual a 2/4. Queda clar, doncs, que 1/2 = 2/4.
Quan dues fraccions expressen el mateix nombre, es diu que són fraccions equivalents. En l'exemple, 1/2 i 2/4 són fraccions equivalents. De fet, una fracció pot ser equivalent a moltes altres. Així:

1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10

són totes fraccions equivalents, és a dir, expressen el mateix nombre.
La manera més senzilla de trobar una fracció equivalent a una altra consisteix a multiplicar tant el numerador com el denominador d'aquesta per un mateix nombre. Per exemple, per a construir una fracció equivalent a 5/11, es pot multiplicar numerador i denominador per 3, amb la qual cosa s'obté 15/33; d'aquesta manera, es pot assegurar que ambdues fraccions són equivalents, és a dir, 5/11 = 15/33. Evidentment, si es divideixen el numerador i el denominador d'una fracció, també s'obté una fracció equivalent. Per exemple, la fracció 6/12 és equivalent a la fracció 2/4, ja que 6 : 3 = 2 i 12 : 3 = 4.
Hi ha una prova senzilla que permet saber quan dues fraccions són equivalents. Es tracta de multiplicar el numerador d'una pel denominador de l'altra, i viceversa. Si els resultats són iguals, es pot assegurar que ambdues fraccionis són equivalents. Per exemple:

4/10 és equivalent a 6/15 perquè $4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$.
2/6 no és equivalent a 7/11 perquè $2 \cdot 11 \neq 6 \cdot 7$.

El símbol $\neq$ és el signe de desigualtat, i se situa entre dues expressions amb resultats diferents.
De vegades, aquest procés es denomina, per abreujar, *multiplicar en creu*:

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{15} \qquad \begin{matrix} = 10 \cdot 6 = 60 \\ = 4 \cdot 15 = 60 \end{matrix}$$

Què és una fracció irreductible?

> Una fracció irreductible es caracteritza pel fet que numerador i denominador són primers entre si. El procés per a trobar la fracció irreductible equivalent a una fracció es denomina *simplificació.*

El fet que moltes fraccions puguin representar el mateix nombre en complica molt la manipulació. Per a evitar aquesta complicació, se sol destacar una fracció del conjunt de totes les fraccions que són equivalents entre si, la denominada *fracció irreductible.* Una fracció irreductible es caracteritza pel fet que numerador i denominador són primers entre si, això és, són nombres el mcd dels quals és 1. Per exemple, 8/16 no és una fracció irreductible, ja que el mcd(8,16) = 8. En canvi, 4/9 és una fracció irreductible perquè el mcd(4,9) = 1. El procés de recerca de la fracció irreductible equivalent a una altra es denomina *simplificació de la fracció.*
Donada una fracció qualsevol, sempre es pot trobar una fracció irreductible que hi sigui equivalent. El mètode més senzill per a fer-ho consisteix a dividir el numerador i el denominador entre el seu mcd. Per exemple, per a convertir la fracció 18/12 en una fracció irreductible, cal dividir numerador i denominador entre el mcd(18,12) = 6. La fracció resultant és $\frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}$.
És evident que per a trobar una fracció equivalent a una fracció irreductible, s'ha de multiplicar el numerador i el denominador de la fracció irreductible per un nombre enter. Així, doncs, qualsevol fracció equivalent a una fracció irreductible (diferent d'ella mateixa) no pot ser mai irreductible. En definitiva, no és possible que dues fraccions irreductibles diferents siguin equivalents. Aquest fet permet seleccionar, d'entre totes les fraccions equivalents entre si, la fracció irreductible com a representant de totes elles.

Què és un nombre racional?

> Totes les fraccions equivalents a una altra representen un mateix nombre, que es denomina *nombre racional*. La millor representació d'aquest nombre és la fracció irreductible.

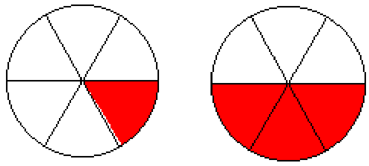
Un nombre racional és aquell que es pot expressar com una fracció, o com qualsevol fracció de les equivalents a aquesta. Així, per exemple, el nombre racional que s'expressa com la fracció irreductible 1/3 es pot també expressar amb la fracció 2/6 o, també, amb la fracció 7/21. En aquests casos, les fraccions són diferents, però el nombre racional representat és el mateix. Aquest fet es podria comparar amb els diferents noms amb els quals es pot conèixer una mateixa persona; per exemple, una noia que es digui Montserrat pot ser coneguda per Montse, Montsina, o qualsevol altre nom o renom, però no per això deixarà de ser la mateixa persona. De la mateixa manera, un mateix nombre racional es pot expressar de diferents formes (fraccions) i no deixarà, per això, de ser un únic nombre. Ara bé, la millor manera d'expressar un nombre racional és mitjançant una fracció irreductible perquè aquesta sempre serà la més senzilla. En l'exemple, la millor manera de representar el nombre racional anterior és 1/3, perquè és una fracció irreductible.
De vegades, els termes *nombre racional*, *nombre fraccionari*, *fracció* o *trencat* se solen usar indistintament, encara que siguin conceptes lleugerament diferents, per a

indicar el concepte de nombre racional tal com s'acaba de definir. Se solen usar aquests últims, *fracció* i *trencat*, amb preferència, ja que són els més breus.

Com es fa la suma de fraccions amb el mateix denominador?

> La suma de dues fraccions amb el mateix denominador és igual a una fracció el numerador de la qual és la suma de numeradors, i el denominador de la qual és el mateix denominador comú.

La suma de nombres fraccionaris és una operació que expressa la reunió dels "fragments" expressats pels nombres sumats, i estableix un nombre fraccionari que expressa aquesta reunió. Se'n poden distingir dos casos, segons si el denominador és comú o no.
La suma d'1/6 amb 3/6 es pot representar amb la reunió d'aquests dos "fragments" acolorits:



Resulta fàcil determinar que el resultat de la suma és 4/6. Aquest fet es pot generalitzar de la manera següent: la suma de dos nombres amb el mateix denominador és igual a una fracció el numerador de la qual és la suma de numeradors, i el denominador de la qual és el mateix denominador comú. En l'exemple:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1+3}{6}=\frac{4}{6}$$

Com es fa la suma de fraccions amb denominador diferent?

> Per a sumar dues fraccions amb denominador diferent, s'ha de substituir cadascuna d'elles per una altra fracció equivalent amb el mateix denominador i, posteriorment, sumar les fraccions resultants.

Per a sumar dues fraccions amb diferent denominador s'ha de substituir cadascuna d'elles per una altra fracció equivalent amb el mateix denominador; a continuació, se sumen les dues fraccions resultats tal com s'ha explicat a l'apartat anterior. Per exemple, si es vol fer la suma 3/18 + 5/12, s'ha de buscar una fracció equivalent a cadascuna d'elles que tingui el mateix denominador:

$$\frac{3}{18}=\frac{6}{36}=\frac{9}{54}=\frac{12}{72}=\ldots$$
$$\frac{5}{12}=\frac{10}{24}=\frac{15}{36}=\frac{20}{48}=\frac{25}{60}=\ldots$$

en aquest cas trobem que les fraccions 6/36 i 15/36 comparteixen el denominador. D'aquesta manera, la suma es pot fer fàcilment així:

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

Ara bé, aquest mètode pot arribar a ser realment costós perquè es podria trigar molt de temps a trobar dues fraccions amb el mateix denominador.

Com es redueixen dues o més fraccions d'una suma al mateix denominador?

> Hi ha dos mètodes que permeten reduir dues o més fraccions a un mateix denominador: la multiplicació de denominadors i el càlcul del mcm dels denominadors.

Hi ha dos mètodes que permeten fer el mateix de manera més ràpida:
1r. La multiplicació de denominadors
Consisteix a multiplicar el numerador i el denominador de les dues fraccions que se sumen pel denominador de l'altra. Així s'aconsegueix que les fraccions resultants tinguin el mateix denominador i, és clar, siguin equivalents a les originals. En l'exemple anterior:

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{3\cdot 12}{18\cdot 12}+\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}=\frac{36}{216}+\frac{90}{216}=\frac{126}{216}$$

Es pot observar que, en general, aquest mètode té el desavantatge d'oferir resultats amb nombres elevats, encara que, evidentment, es poden simplificar, sempre recomanable quan es manipulen fraccions.
2n. El càlcul del mcm dels denominadors
Aquest mètode es basa en el càlcul del mcm dels denominadors per a trobar el nou denominador comú. Els passos que s'han de seguir són:

1. Calcular el mcm dels denominadors involucrats en la suma. Aquest resultat serà el denominador comú. En el cas de l'exemple, mcm(12,18) = 36.

2. Multiplicar el numerador de cada fracció pel resultat de dividir el mcm entre el denominador de la fracció respectiva. Així, en l'exemple, el numerador de la fracció 3/18, que és 3, s'ha de multiplicar pel resultat de 36 : 18 = 2; de la mateixa manera, el numerador de la fracció 5/12, que és 5, s'ha de multiplicar pel resultat de 36 : 12 = 3.
   Les fraccions resultants són equivalents a les anteriors i tenen el denominador comú:
   $$\frac{6}{36}=\frac{3}{18} \qquad \frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

3. Finalment, cal sumar les fraccions amb el mateix denominador trobades en l'apartat anterior:
   $$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

El primer mètode és, sovint, més ràpid, però el segon ofereix l'avantatge que el resultat es presenta de forma més simplificada. Això és més fàcil d'observar si la suma involucra diverses fraccions, com en aquest exemple:

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3}{18}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{mcm}(6,8,18)=36}}{=}\frac{2\cdot 6}{36}+\frac{1\cdot 9}{36}+\frac{3\cdot 2}{36}=\frac{12+9+6}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

Per tant, si no hi ha massa sumes, és possible utilitzar el primer mètode, però si n'hi ha tres o més, és recomanable seguir el mètode del càlcul del mcm.

Quines són les propietats de la suma de fraccions?

> Les propietats de la suma de fraccions són la commutativa, l'associativa, l'element neutre i l'element oposat.

Les propietats de la suma de fraccions són:

- La propietat commutativa

L'ordre dels sumands en una suma de dos o més nombres racionals no n'altera el resultat. Així, per exemple: $\frac{-3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{2}{6}+\frac{-3}{6}=\frac{-1}{6}$.

- La propietat associativa

El resultat d'una expressió amb dues o més sumes de nombres enters no depèn de l'ordre com s'agrupen las diferents sumes. Per exemple:

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{-2}{3}=\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)+\frac{-2}{3}=\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{3}+\frac{-2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

A més d'aquestes propietats, existeix una sèrie d'elements amb propietats interessants respecte de la suma de nombres racionals:

- L'element neutre de la suma

El element neutre de la suma és aquell que sumat a qualsevol altre no el modifica. L'element neutre de la suma de fraccions (i d'enters) és el 0. Per exemple: $\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}$.

- L'element oposat

Tot nombre racional té un oposat, que compleix que la suma d'ambdós és igual a l'element neutre de la suma, és a dir, és igual a 0. Així, per exemple, l'oposat d'1/3 és –1/3, ja que $\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}=0$. Per a trobar l'oposat d'un nombre, només cal canviar el signe al numerador, com s'acaba de comprovar.

Evidentment, aquestes propietats també ho són de la suma de nombres enters.

Com es fa la resta de fraccions?

La resta de dues fraccions es redueix a la suma amb la fracció oposada.

La resta és l'operació oposada a la suma, igual que passa entre els nombres enters. La resta de fraccions es redueix a la suma amb la fracció oposada. Així, doncs, per exemple, $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5}{8}+\frac{-2}{8}=\frac{3}{8}$. És evident que si se suma aquest resultat amb el nombre restat, $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$, s'obté el nombre inicial.

Com es fa la multiplicació de fraccions i quines són les seves propietats?

Per a multiplicar dues fraccions, s'han de multiplicar ambdós numeradors i posar el resultat en el numerador; també s'han multiplicar ambdós denominadors i posar el resultat en el denominador.

En molts casos, las fraccions que tenen per denominador 100 s'expressen en forma de percentatge amb el símbol %, denominat "tant per cent". Així, la fracció 23/100 es pot indicar, també, com 23%, i es llegeix "23 per cent".
El càlcul de tants per cent es redueix al càlcul amb fraccions.

El resultat de multiplicar dues fraccions és una fracció el numerador de la qual és el producte dels numeradors, i el denominador de la qual és el producte dels denominadors. Per exemple: $\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times 3}{7\times 5}=\frac{6}{35}$.

La multiplicació permet calcular la fracció d'un nombre: per a trobar el triple de 39 es fa la multiplicació següent: 3 · 39 = 117. De la mateixa manera, per a calcular una fracció d'un nombre s'ha de multiplicar la fracció pel nombre. Així, tres quarts de 120 és igual a ¾ · 120 = 90.

Quines són les propietats del producte de fraccions?

Les propietats del producte de fraccions són la commutativa, l'associativa, la distributiva respecte a la suma, l'element neutre i l'element invers.

Les propietats de la multiplicació de fraccions són les mateixes que les propietats de la multiplicació de nombres enters i naturals:

- Propietat commutativa

L'ordre dels factors d'un producte de dos o més nombres racionals no n'altera el resultat. Així, per exemple: $\frac{-2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{-2}{3}=\frac{-8}{15}$.

- Propietat associativa

El resultat d'una expressió amb dos o més productes de nombres enters no depèn de l'ordre com s'agrupen els productes. Per exemple:

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{60}$$

- Propietat distributiva del producte respecte de la suma

El producte d'una fracció per una suma de fraccions és igual a la suma dels productes de la primera fracció amb les fraccions que formen la suma. Per exemple:

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$$

- Element neutre del producte

El element neutre del producte és aquell que, multiplicat a qualsevol altre, no el modifica. L'element neutre de la multiplicació de fraccions és l'1. Per exemple:

$$\frac{3}{5}\times 1=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

- Tot nombre racional, excepte el 0, té un invers

L'invers d'un nombre compleix que el producte d'ambdós és igual a l'element neutre del producte, és a dir, és igual a 1. Així, per exemple, l'oposat de 2/5 és 5/2, ja que

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{2\times 5}{5\times 2}=\frac{10}{10}=1$$

Com es pot comprovar en l'exemple, l'invers d'una fracció es troba intercanviant de posició numerador i denominador.

Com es fa la divisió de fraccions?

> La divisió de fraccions és el producte d'una fracció per la inversa de l'altra.

La divisió de dues fraccions es pot indicar de dues maneres. Per exemple:

$$\frac{2}{3}:\frac{7}{11} \qquad \frac{\;\frac{2}{3}\;}{\;\frac{7}{11}\;}$$

En el segon cas, s'ha d'allargar la barra de divisió respecte de les barres de fracció per a no deixar lloc a dubtes sobre quin és el numerador i quin, el denominador.

El resultat de la divisió de dues fraccions és igual al producte de la fracció que es troba en el numerador, multiplicada per la inversa de la fracció del denominador. Així, doncs: $\frac{2}{3}:\frac{7}{11}=\frac{2}{3}\times\frac{11}{7}=\frac{22}{21}$.

Una altra regla fàcil de recordar per a fer una divisió és aquesta: es multipliquen en creu numeradors amb denominadors, i els resultats també se situen en creu. En el cas anterior: $\frac{2}{3}:\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 11}{3\cdot 7}=\frac{22}{21}$.

A partir de la divisió de nombres es pot expressar l'invers d'un nombre d'una altra {\gC}{\gC}manera: com a 1 dividit entre el nombre. Així, per exemple, l'invers de 4/7 és $\frac{1}{\frac{4}{7}}$.

Quin és l'ordre en què s'han de fer les operacions elementals entre fraccions?

> En una expressió en la qual s'encadenen diferents operacions entre fraccions, primer s'han de resoldre els parèntesis, tot seguit la divisió i la multiplicació i, finalment, la resta i la suma.

Com que s'encadenen diverses operacions elementals (suma, resta, multiplicació i divisió) en una expressió amb nombres racionals, s'ha de respectar el mateix ordre que l'enunciat per als nombres naturals i enters:

- En primer lloc, s'han de fer les operacions entre parèntesis.
- En segon lloc, les multiplicacions i divisions, començant per aquestes últimes.
- En tercer lloc, les sumes i restes, començant per aquestes últimes.

Així, per exemple:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\text{operacions}\\\text{dins dels parèntesis}}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\text{prioritat de la}\\\text{multiplicació}\\\text{sobre la resta}}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{24}{12}-\frac{5}{12}=\frac{19}{12}$$

Ara bé, en el primer pas, en lloc d'operar dintre dels parèntesis, també es podria haver aplicat la propietat distributiva, sense que això en modifiqués el resultat:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\text{propietat}\\\text{distributiva}}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1}{4}\times\frac{8}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{8}{3}-\frac{5}{12}\underset{\substack{\text{prioritat de la}\\\text{multiplicació sobre}\\\text{suma y resta}}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{8}{12}+\frac{16}{12}-\frac{5}{12}=\frac{19}{12}$$

Què és la forma decimal d'un nombre racional?

> Un nombre racional es pot expressar de maneres diferents, a part de la forma fraccionària. Una de les més comunes és la forma decimal, que s'obté dividint el numerador entre el denominador.

En el món anglosaxó, en lloc de la coma s'usa un punt, com es pot observar en qualsevol calculadora. Nosaltres utilitzarem indistintament l'una i l'altre.

Per a obtenir la forma decimal d'una fracció, s'ha de dividir el numerador entre el denominador, com en la divisió entera, però sense detenir-se fins que la resta sigui zero, afegint-hi els decimals corresponents. Per exemple, la forma decimal de 12/5 és 2,4, és a dir, 12/5 = 2,4.

La forma decimal està formada per una secció entera, a l'esquerra de la coma, i una secció decimal, o senzillament, decimals, a la dreta de la coma. En aquesta taula es pot observar la denominació de les sis primeres xifres a la dreta de la coma del nombre 15,325702.

Nom	desena	unitat	dècima	centèsima	mil·lèsima	deumil·lèsima	centmil·lèsima	milionèsima
Xifres	1	5	3	2	5	7	0	2.

- La forma decimal es denomina *estricta* si la divisió del numerador entre el denominador acaba tenint un residu igual a 0. Un exemple: 12/5 = 2,4.
- La forma decimal es denomina periòdica en cas contrari. Per exemple, 1/3 = 0,333333333... = $0,\widehat{3}$. Es pot observar que la xifra, o xifres, que es repeteixen, duen el símbol periòdic en la part superior. És evident que el grup de nombres repetits pot ser superior a un. Per exemple,

$$\frac{5627}{9900}=0,568383838383...=0,56\widehat{83}$$

Unes senzilles normes permeten transformar la forma decimal d'un nombre en la forma fraccionària:

- Si la forma decimal és exacta, solament s'ha d'eliminar la coma del nombre decimal; el nombre resultant serà el numerador de la fracció. El denominador ha de ser un nombre la primera xifra del qual sigui un 1, i amb tants zeros com decimals té el nombre decimal. Per exemple, la forma fraccionària de 3,465 és 3465/1000.
- Si la forma decimal és periòdica, s'han de seguir aquests passos:
    - El numerador és igual a la diferència del nombre en qüestió, sense coma ni símbol periòdic (amb la qual cosa es transforma en un

nombre enter) i el mateix nombre, sense coma ni xifres a sota del símbol periòdic.

- El denominador ha de ser un enter amb tants 9 com xifres a sota del símbol periòdic, i tants 0 com xifres de la secció decimal que no es troben dintre del símbol periòdic.

Per tant, la fracció que correspon al nombre periòdic és:

$$23,4\overset{\frown}{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

Com s'aproxima un nombre racional per un nombre decimal?

> Per a evitar nombres excessivament llargs, es recorre a aproximacions d'aquests per uns altres amb menys xifres. Ara bé, aquestes aproximacions han de ser prou properes al nombre en qüestió. La millor via d'aproximar un nombre és l'arrodoniment.

L'arrodoniment d'un nombre fins a una xifra determinada, la *xifra d'arrodoniment*, consisteix a escriure el nombre decimal més proper al nombre donat, de manera que només tingui xifres decimals fins a la d'arrodoniment. Per exemple, l'arrodoniment d'1/3 per les centèsimes consisteix a trobar el nombre decimal més proper a 1/3 que només tingui decimals fins a les centèsimes. En aquest cas, és fàcil adonar-se que l'arrodoniment d'1/3 per les centèsimes és 0,33. Per a expressar que 1/3 és aproximadament igual a 0,33 s'utilitza el símbol $\simeq$, que es llegeix "aproximadament igual". Així, doncs $\frac{1}{3} \simeq 0,33$. En tot cas, no cal abusar de l'ús d'aquest símbol.

Aquestes són les regles per a l'arrodoniment d'un nombre fins a una xifra determinada:

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és inferior a 5, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a aquesta xifra. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32,543613 per les centèsimes, podem dir que $32,543613 \simeq 32,54$.

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és superior a 4, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a la xifra d'arrodoniment, i a la xifra d'arrodoniment s'hi suma una unitat. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32,5436134 per les mil·lèsimes, $32,5436134 \simeq 32,544$. Si la xifra d'arrodoniment és 9, s'actua de la mateixa manera que en una suma de nombres decimals, quan a una xifra 9 s'hi suma 1. Per exemple, si es vol arrodonir el nombre 2,749623 per les mil·lèsimes, com que la xifra de les deumil·lèsimes és 6, més gran que 4, s'ha de sumar una unitat a la xifra de les mil·lèsimes, 9; per tant, el nombre arrodonit serà igual a 2,750 o, el que és el mateix, 2,75.

Com s'ordenen els nombres racionals en una recta?

> Com en el cas dels nombres enters, donats dos nombres racionals qualssevol, diferents, un d'ells sempre serà més gran que l'altre i, doncs, es poden ordenar tots al llarg d'una recta.

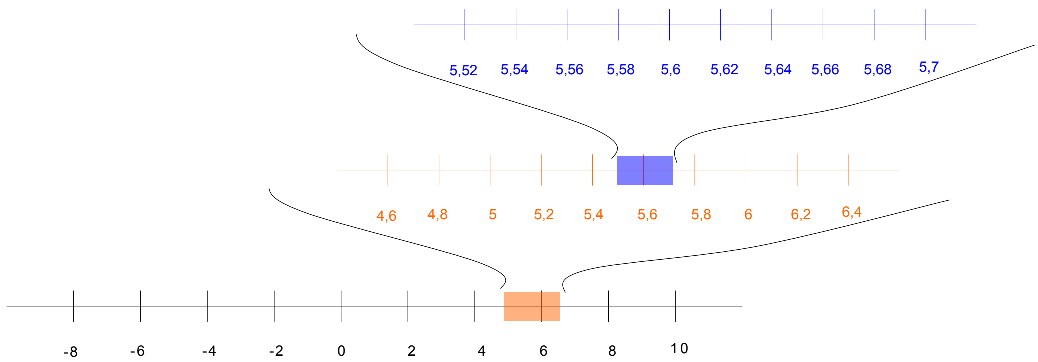
La manera més senzilla de comprovar-ho, potser, es redueix a escriure'n l'expressió decimal, que mostra de manera immediata quin dels dos és més gran. També es poden restar tots dos nombres per a esbrinar quin és més gran. Per exemple:

$$\frac{4}{7} - \frac{13}{15} = \frac{4 \cdot 15 - 7 \cdot 13}{7 \cdot 15} = \frac{-31}{105}$$

per tant, 13/15 > 4/7.

Les operacions bàsiques influeixen en l'ordenació dels racionals de la mateixa manera

Com que estan ordenats, els nombres racionals es poden representar en una recta, de manera similar als enters. Ara bé, la seva representació presenta una diferència important amb els enters: entre dos nombres racionals diferents sempre en podem trobar un altre (de fet, se'n poden trobar moltíssims). Per a trobar un nombre que estigui entre dos altres nombres qualssevol, només cal sumar-los i dividir el resultat entre 2. Per exemple, el nombre 3/4 és menor que el nombre 9/5; és fàcil comprovar que $\frac{\frac{3}{4}+\frac{9}{5}}{2}=\frac{51}{40}$ es troba entre tots dos nombres, és a dir, $\frac{3}{4}<\frac{51}{40}<\frac{9}{5}$. Aquesta circumstància permet preveure que els nombres racionals poden cobrir molts més punts de la recta en la qual es representen, i sempre podrem ampliar una secció qualsevol d'aquesta recta, perquè sempre trobarem més nombres racionals, com mostra aquest exemple:



Potències i arrels

Potències i arrels

$$\text{Potència} \quad \xleftrightarrow[\text{inverses}]{\text{operacions}} \quad \text{Arrel}$$

$$\overset{\substack{\text{exponent}\\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{base}}}{7^{3}}} = 7\cdot 7\cdot 7 = 343 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt[\overset{\substack{\text{índex}\\ \downarrow}}{3}]{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{base}}}{343}} = 7$$

Per a unificar ambdues operacions, es defineix la potència d'exponent fraccionari:

$$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^{b}}$$

Característiques especials de les potències i les arrels, segons el tipus de nombres:

- Nombres naturals

Potències	**Arrels**
• Base i exponent són nombres naturals.	• Índex i base són nombres naturals.

- Nombres enters

Potències	**Arrels**
• Base i exponent són nombres enters.	• Base entera i índex natural. • Si l'índex és parell, la base ha de ser positiva.

- Nombres racionals

<table>
<tr><th>Potències</th><th>Arrels</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Base i exponent són nombres fraccionaris.
• Índex i exponent són inversos.
• La base ha de ser positiva si el denominador de l'exponent és parell.</td></tr>
</table>

Propietats de les potències (i arrels)

En general, les propietats de les potències (i arrels) d'un nombre racional es poden enunciar així, essent a, b, p, q nombres racionals:

- La potència d'exponent 1 és igual a la base

$$a^1 = a$$

- El producte de potències amb la mateixa base

Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents, deixant la base sense modificacions.

$$a^p \times a^q = a^{p+q}$$

- El quocient de potències de la mateixa base

Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents, deixant la base sense modificacions.

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

- La potència d'exponent 0 és igual a 1

Qualsevol potència (amb base distinta del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a

$$a^0 = 1$$

- La potència d'una potència

El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

- El producte de potències amb el mateix exponent

El resultat de multiplicar diferents potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.

$$a^p \times b^p = (a \times b)^p$$

- El quocient de potències amb el mateix exponent

El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.

$$a^p : b^p = (a : b)^p$$

Com es fa la potenciació de nombres i quines són les seves propietats?

> Encara que la potenciació es fa de la mateixa manera per a qualsevol nombre, cada tipus de nombre té unes característiques especials que requereixen una atenció especial. Les propietats bàsiques de la potenciació es donen per als nombres naturals, però es poden estendre a la resta de nombres.

Com és sabut, quan es té una expressió amb un grup de multiplicacions amb els mateixos factors, per a abreujar-la es pot fer servir una potència. Per exemple: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$. Es pot observar que la potència està formada per dos nombres:

- La base de la potència, que és el nombre repetit en la multiplicació. En l'exemple, la base és 7.
- L'exponent de la potència, que indica el nombre de vegades que es repeteix la base en la multiplicació. En l'exemple, l'exponent és 5, perquè el 7 es repeteix 5 vegades.

Per a designar una potència s'usa el terme *elevat a*. En l'exemple, 7^5 es llegeix "set elevat a cinc", o fins i tot, "set elevat a la cinquena potència", excepte en dos casos: si l'exponent és 2, s'utilitza el terme *al quadrat* (per exemple, 8^2 es llegeix "vuit al quadrat"); i si l'exponent és 3, s'utilitza el terme *al cub* (per exemple, 5^3 es llegeix "cinc al cub").
Per a simplificar els càlculs amb potències, és útil utilitzar aquestes propietats:

- La potència d'exponent 1
  El resultat d'una potència d'exponent 1 és igual a la base. Per exemple,
  $5^1 = 5$
- El producte de potències de la mateixa base
  Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple,
  $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$. Això és així perquè
  $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$
- El quocient de potències de la mateixa base
  Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple, $7^6 : 7^4 = 7^2$. Això és així perquè
  $7^6 : 7^4 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) : (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^2$
- La potència d'exponent 0
  Qualsevol potència (amb base diferent del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a 1. Això és així perquè, per exemple, seguint la propietat anterior,
  $9^0 = 9^{3-3} = 9^3 : 9^3 = 1$
- Potència d'una potència
  El resultat d'elevar una potencia qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents. Per exemple, $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$, ja que
  $(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$
- Producte de potències amb el mateix exponent
  El resultat de multiplicar diverses potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple, $8^3 \cdot 5^3 = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$, ja que
  $8^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$

- Quocient de potències amb el mateix exponent
  El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple, $12^5 : 3^5 = (12 : 3)^5 = 4^5$, ja que
  $12^5 : 3^5 = (12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) =$
  $= (4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) =$
  $= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

Quines són les característiques de la potenciació de nombres enters?

> Les regles de la multiplicació de signes d'un nombre enter permeten establir una manera senzilla de trobar el signe d'una potència d'un nombre enter. A més, s’ha de tenir cura a expressar correctament la potència (amb o sense parèntesi, segons quin sigui el cas) per a evitar errors en el resultat.

Igual que en els nombres naturals, l'ús de potències en els nombres enters és una manera d'abreujar un producte reiterat d'un mateix nombre. Per exemple:

$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4$$

Ara bé, és imprescindible en aquest cas posar-hi el parèntesi perquè l'exponent afecta tant el nombre com el signe. En cas contrari, no s'estaria indicant la mateixa operació, és a dir:

$$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

o sigui, l'exponent només afecta el nombre i no el signe.
Per a establir el signe de la potència d'un nombre enter, s’han de tenir en compte el signe del nombre i la potència:

- Si el signe del nombre és positiu, el nombre resultant serà positiu. Per exemple, $(+2)^3 = 2^3$.
- Si el signe del nombre és negatiu, el nombre resultant:
  - serà positiu si l'exponent és parell. Per exemple, $(-2)^4 = 2^4$, ja que el producte de 4 vegades un nombre negatiu és positiu;
  - serà negatiu si l'exponent és senar. Per exemple, $(-2)^5 = -2^5$, ja que el producte de 5 vegades un nombre negatiu és negatiu.

Quines són les característiques de la potenciació de nombres fraccionaris?

> En el cas de les fraccions, cal destacar que l'exponent també pot ser un nombre negatiu.

La potència d'una fracció és igual a una altra fracció amb el mateix numerador i denominador, però elevats a l'exponent de la potència. Així, per exemple:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}$$

Es pot definir, a més, una potència amb exponent negatiu, que és igual a l'invers de la mateixa potència amb exponent positiu. Per exemple,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{7}{9}\right)^{6}}$$

Les propietats de la potenciació de nombres enters i naturals s'apliquen de la mateixa manera a la potenciació de fraccions, fins i tot en el cas d'exponents negatius.

Com se simplifica una expressió amb potències del tipus $\dfrac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 .49^3}$?

> Per a simplificar una expressió amb potències s'han d'aplicar les propietats de les potències fins a obtenir una fracció irreductible.

Per a simplificar qualsevol expressió, s'han d'aplicar les propietats de les potències amb la finalitat d'agrupar les potències amb la mateixa base i, posteriorment, eliminar les potències repetides tant en el numerador com en el denominador. Així, per a simplificar aquesta expressió, s'ha de fer el següent:

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 .49^3} \underset{\uparrow}{=} -\frac{2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^6}{3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^6} \underset{\uparrow}{=}$$

Descomponem cadascun dels factors, tant del numerador com del denominador. Es treu fora el signe del denominador, perquè és negatiu

Ordenem els factors, i dels que tenen base comú, descomponem el que té exponent més gran

$$= -\frac{2^3 \cdot \cancel{5^6} \cdot \cancel{7^6} \cdot 7}{3^5 \cdot \cancel{5^6} \cdot 5 . \cancel{7^6}} \underset{\uparrow}{=} -\frac{2^3 \cdot 7}{3^5 \cdot 5}$$

Simplifiquem els factors comuns al numerador y al denominador

Només es poden simplificar factors iguals del numerador i denominador quan en tots dos (numerador i denominador) només hi ha multiplicacions, **mai amb sumes**.

El resultat final també pot expressar-se com $-2^3 \cdot 7 \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-1}$

Què és i com es calcula l'arrel d'un nombre?

> La radicació és una operació oposada a la potenciació; per a calcular-la, s'ha de tenir en compte el signe del nombre perquè no hi ha l'arrel d'índex imparell d'un nombre negatiu.

De la mateixa manera que la diferència és l'operació oposada a la suma, i la divisió és l'operació oposada a la multiplicació, la radicació és l'operació oposada a la potenciació. Els tipus més importants de radicació són:

- L'arrel quadrada

  Es tracta en aquest cas de l'operació oposada a “elevar al quadrat”. Usa el signe $\sqrt{\ }$, o signe radical, amb el nombre a l'interior. Per exemple, com que 5 al quadrat és 25, llavors, l'arrel quadrada de 25 és igual a 5

  $5^2 = 25$ ——> $\sqrt{25} = 5$,

  i es llegeix “l'arrel quadrada de 25 és 5”; de la mateixa manera,

  $7^2 = 49$ ——> $\sqrt{49} = 7$

  $11^2 = 121$ ——> $\sqrt{121} = 11$, etc.

  Al nombre que es troba en l'interior del signe radical se l'anomena *radicant.* Al resultat, de vegades, se l'anomena, simplement, *arrel.*

- L'arrel cúbica

  L'arrel cúbica és l'operació oposada a “elevar al cub”. Fa servir el signe $\sqrt[3]{\ }$, amb el nombre a l'interior. En aquest cas, es diu que el 3 (que es troba a la part superior del signe) és l'índex de l'arrel. Per exemple, com que 5 al cub és igual a 125, llavors, l'arrel cúbica de 125 ha de ser igual a 5:

  $5^3 = 125$ ——> $\sqrt[3]{125} = 5$,

  i es llegeix “l'arrel cúbica de 125 és 5”; de la mateixa manera,

  $2^3 = 8$ ——> $\sqrt[3]{8} = 2$, etc.

De manera similar a l'arrel cúbica, es poden fer arrels de diferents índexs. Així, per exemple,

- L'arrel d'índex 4, o més breument, l'arrel quarta, de 625 és 5 ($\sqrt[4]{625} = 5$), ja que $5^4 = 625$.
- L'arrel d'índex 5, o més breument, l'arrel cinquena, de 32 és 2 ($\sqrt[5]{32} = 2$), ja que $2^5 = 32$.

En el cas dels nombres negatius, s'ha de tenir en compte que no és possible calcular l'arrel d'índex parell. Per exemple, l'expressió $\sqrt{-4}$ és incorrecta perquè no hi ha cap nombre enter el quadrat del qual sigui –4; en general, no existeix cap nombre el quadrat del qual sigui un nombre negatiu.
En el cas dels nombres fraccionaris, la seva arrel també és fàcil de calcular:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{perquè} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

En tot cas, l'arrel d'una fracció sempre es pot expressar com una fracció d'arrels. Per exemple, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$.

Tota arrel es pot expressar, també, com una potència l'exponent de la qual és un nombre fraccionari igual a l'invers de l'índex. Per exemple, $\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}}$, o també, $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$. D'aquesta manera, es pot expressar conjuntament l'arrel d'una potència. Per exemple: $\sqrt[3]{27^2} = \left(27^2\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}$. És a dir, l'arrel d'una potència és igual a una potència l'exponent de la qual és una fracció, de numerador igual al de la potència i de denominador igual a l'índex de l'arrel. Un altre exemple:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-3}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-3}{4}}$$

Quines són les propietats bàsiques de la radicació?

> Les propietats de la radicació i de la potenciació són exactament les mateixes, ja que sabem que ambdues operacions es poden expressar en forma de potència d'exponent fraccionari.

Si una arrel (o una potència i una arrel), s'expressa en forma de potència d'exponent fraccionari, les propietats bàsiques són les mateixes que les propietats de les potències:

- El resultat d'una potència d'exponent 1 és igual a la base. Per exemple, $(-3)^1 = -3$.
- Per a multiplicar potències amb la mateixa base se sumen els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}+\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{21}{4}}$$

- Per a dividir potències amb la mateixa base s'han de restar els exponents, deixant la base sense modificacions. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{-1}{4}}$$

- La potència d'exponent 0 (amb base distinta del 0) resulta sempre igual a 1.
- El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents. Per exemple:

$$\left(\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}\times\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{21}{6}}$$

- El resultat de multiplicar diverses potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81}\times\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{200}{324}\right)^{\frac{5}{2}}$$

- El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de bases, i l'exponent és l'exponent comú. Per exemple:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81}:\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{32}{2025}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Com es poden expressar de manera general les propietats de les potències i arrels?

> Per a expressar les propietats de les potències de manera general, és molt útil indicar la base i l'exponent amb lletres, que representen un nombre racional qualsevol.

Si la base i l'exponent d'una potència s'expressen amb una lletra, les propietats de les potències es poden expressar així, de manera general:

- La potència d'exponent 1 és igual a la base

  $a^1 = a$

- El producte de potències amb la mateixa base

  Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents, deixant la base sense modificacions:

  $a^p \times a^q = a^{p+q}$

- El quocient de potències de la mateixa base

  Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents, deixant la base sense modificacions:

  $a^p : a^q = a^{p-q}$

- La potència d'exponent 0 és igual a 1

  Qualsevol potència (amb base distinta del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a

  $a^0 = 1$

- La potència d'una potència

  El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents

  $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

- El producte de potències amb el mateix exponent

  El resultat de multiplicar diferents potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.

  $a^p \times b^p = (a \times b)^p$

- El quocient de potències amb el mateix exponent

  El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de les bases, i l'exponent és l'exponent comú.

  $a^p : b^p = (a : b)^p$

S'ha de tenir en compte que aquestes propietats són correctes sempre que a, b, p, q siguin nombres racionals correctes per a l'operació que s'ha de fer. Per exemple, en el cas de la potència d'exponent 0, la base no pot ser 0; en el cas dels exponents, sabem que no poden tenir el denominador parell si la base és negativa (perquè no existeix l'arrel d'índex parell d'un nombre negatiu).

Finalment, s'ha d'anar en compte a l'hora d'aplicar d'aquestes propietats perquè de vegades es produeixen errors greus; per exemple, no és el mateix dir que el producte de potències sigui igual a la potència de la suma, que la suma de potències sigui igual a la potència del producte (això últim és fals). És a dir, no és cert que:

$$a^p + a^q = a^{p \cdot q}$$

Com se simplifica una expressió del tipus $\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$?

> Per a simplificar una expressió amb arrels i potències, s'han de descompondre els nombres de la base i aplicar les propietats de les potències per a arribar a l'expressió més senzilla possible.

Per a simplificar $\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$, s'han de seguir aquests passos:

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Es descompon}\\ \text{la base}}}{=} \sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{2^3}{3^3}}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Es transformen les}\\ \text{arrels en potències}\\ \text{de fraccions}}}{=} \left(\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3/4}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{S'operen els exponents}\\ \text{seguint les propietats}\\ \text{de les potències}}}{=} \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}} =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$$

Què és la racionalització de fraccions?

> La racionalització d'una fracció consisteix en l'eliminació de les arrels del denominador per a obtenir una fracció equivalent.

No és usual deixar una fracció amb arrels en el denominador. Per això, és habitual eliminar-les, sempre que això sigui possible. A aquest procés se l'anomena *racionalització de la fracció*. Per a fer-lo és molt comú multiplicar numerador i denominador per alguna expressió que permeti eliminar les arrels del denominador. Un exemple de racionalització seria:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

En molts casos, també podem trobar-nos amb una suma o resta d'arrels en el denominador. En aquests casos, s'ha de multiplicar el denominador i el numerador per l'operació oposada, com es mostra en aquest exemple:

$$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{multipliquem}\\ \text{numerador i}\\ \text{denominador per}\\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}}{=} \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} =$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{-2} = -2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

Això és així perquè $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3-5 = -2$. I, en general, si *a i b* són dos nombres qualssevol, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

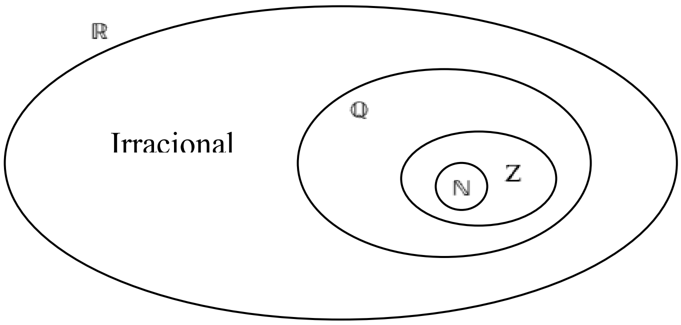
Els nombres reals

Els nombres reals

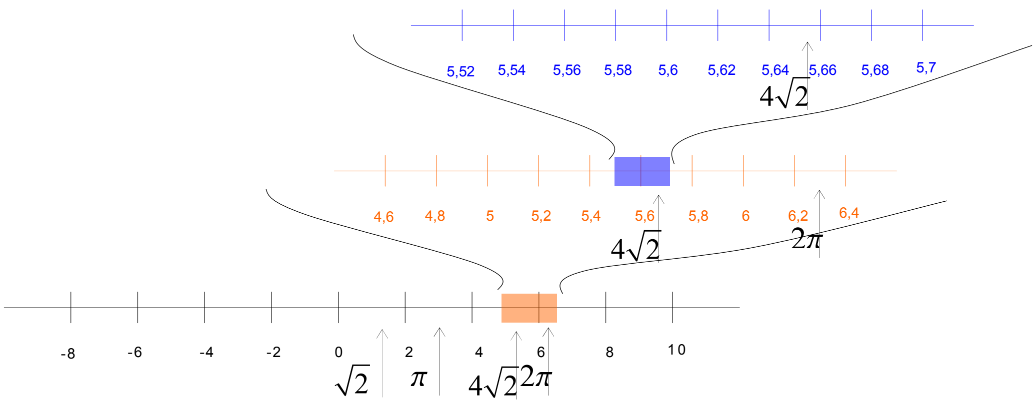
Nombres reals ($\mathbb{R}$)
- Nombres racionals ($\mathbb{Q}$): inclou als nombres enters ($\mathbb{Z}$) que inclouen als nombres naturals ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- Nombress irracionals: no poden expressar-se mitjançant una fracción de nombres enters



Representació dels nombres reals: recta real



Expressió dels reals: notació científica

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Mantissa}}}{1,352} \cdot 10^{\overset{\textit{Exponent}}{\overset{\downarrow}{36}}}$$

- Exponent: potència de deu

- Mantissa: nombre decimal el valor absolut del qual és major o igual que 1, i menor que 10.

Operacions bàsiques amb nombres reals: suma i multiplicació.

Elements destacats respecte de les operacions:

- L'element neutre de la suma és el 0: $a + 0 = 0 + a = a$.
- L'element neutre de la multiplicació és l'1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- L'oposat de qualsevol nombre real a és $-a$, i compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- L'invers de qualsevol nombre real a és $1/a$, i compleix: $a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1$.

Operacions derivades de les operacions elementals:

- La resta de dos nombres és igual a la suma amb l'oposat: $a - b = a + (-b)$.
- La divisió de dos nombres és igual a la multiplicació amb l'invers: $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Propietats de les operacions elementals:

$$\text{Suma}\begin{cases}\text{Propietat commutativa: } a+b=b+a\\ \text{Propietat associativa: } a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)\end{cases}$$

$$\text{Producte}\begin{cases}\text{Propietat commutativa:}\\ a\times b=b\times a\\ \text{Propietat associativa:}\\ a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times(b\times c)\\ \text{Propietat distributiva del producte respecte de la suma:}\\ a\cdot(b+c)=(b+c)\cdot a=a\cdot b+a\cdot c\end{cases}$$

La potenciació de nombres reals: si a és un nombre real, n i m són nombres enters:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

propietats de la potència, essent r i s nombres racionals:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$

$\left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$

$\left(a\cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$

$\left(a : b\right)^r = a^r : b^r$

$a^0 = 1$ sempre que $a \neq 0$

$a^1 = a$

Hi ha nombres que no siguin racionals?

> La gran quantitat de nombres racionals que hi ha, i també la seva gran concentració en qualsevol petita secció de la recta que els representa, podria fer pensar que qualsevol nombre imaginable és, de fet, un nombre racional. Això no és així: hi ha els nombres irracionals, que no es poden expressar com una fracció.

Un nombre racional s'ha de poder expressar en forma de fracció de nombres enters o, el que és el mateix, en forma de nombre decimal exacte o periòdic. Hi ha nombres que no es poden expressar d'aquesta manera, és a dir, que per molts decimals que es calculin, no apareixen repeticions constants de xifres. Per exemple:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980 8...$$

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415058723 7...$$

Aquest tipus de nombres que no es poden expressar en forma d'un nombre decimal, exacte o periòdic, es denominen *nombres irracionals*. Dit d'una altra manera: els nombres irracionals són aquells que no es poden expressar en forma d'una fracció de nombres enters, és a dir, són aquells que no són racionals (de fet, el nom *irracional* ja fa referència a aquesta característica de no ser racionals).
No resulta fàcil demostrar que un nombre, com els anteriors, és irracional, ja que ningú no pot assegurar que en xifres decimals més avançades no es pugui trobar la part periòdica del nombre; tampoc no és senzill demostrar que un nombre no es pot expressar com una fracció de nombres enters.

Com es pot demostrar que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional?

> La demostració que $\sqrt{2}$ (i en general qualsevol arrel d'un nombre primer) no és un nombre racional no és senzilla, però permet comprovar que, efectivament, hi ha nombres que no són racionals. En general, totes les arrels de nombres primers són irracionals.

La prova que l'arrel quadrada de 2 és irracional s'inicia suposant el contrari, és a dir, que $\sqrt{2}$ és un nombre racional. Veurem al final de la demostració que aquesta suposició és absurda (amb la qual cosa no quedarà cap dubte de la irracionalitat d'aquest nombre).
Així, doncs, comencem suposant que aquest nombre és racional: dit d'una altra manera, que es pot expressar com una fracció irreductible. És a dir, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ de manera que a , b són nombres naturals i que el mcd(a, b) = 1.
El quadrat de $\sqrt{2}$ és, evidentment, 2; així, doncs, $2 = a^2/b^2$. Si es multipliquen ambdós costats d'aquesta igualtat per b^2, obtenim $2b^2 = a^2$.
En descompondre el nombre $2b^2$, obtindrem com a mínim un 2 (si no més). Per tant, com que a^2 ha de ser igual a $2b^2$, també la descomposició de a^2 haurà de contenir un 2. En altres paraules, hi ha d'haver un nombre a' de manera que $a = 2a'$. Per tant, $a^2 = (2a')^2 = 4a'^2$.

Recopilem aquestes dues informacions:

$$2b^2 = a^2 = 4a'^2$$

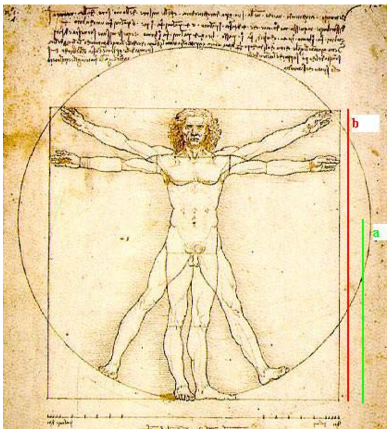
Així, doncs, $2b^2 = 4a'^2$; simplificant, $b^2 = 2a'^2$.
De manera similar a com s'acaba de fer per a a, existeix un nombre b' que compleix que $b = 2b$'. Així, doncs, de la mateixa manera que abans, $b^2 = (2b'^2) = 4b'^2$.
Hem arribat a la conclusió que:
d'una banda, $a = 2a'$
per l'altra, $b = 2b'$
llavors, a i b tenen un divisor comú: el 2. Però aquest fet no és possible: havíem afirmat que a i b havien de ser primers entre si, és a dir, que el mcd(a, b) = 1.

En definitiva, és absurd suposar que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, essent a i b primers entre si, ja que aquesta suposició ens duu a la conclusió que a i b mai no poden ser primers entre si. Aquest fet demostra que $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional. Així, doncs, ha de ser un nombre irracional.
Es podria generalitzar aquest fet a qualsevol arrel d'un nombre primer, és a dir, es podria demostrar de manera semblant que tot nombre de la forma $\sqrt{p}$, amb p un nombre natural primer, és irracional.

Hi ha nombres irracionals que no siguin arrels?

> Les arrels de nombres primers no són els únics irracionals que hi ha; de fet, el nombre d'irracionals és infinit, superior fins i tot al de racionals, encara que la seva designació és difícil, ja que no es poden escriure en la forma decimal habitual.

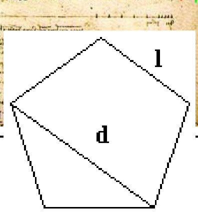
Leonardo da Vinci, en el dibuix *L'home de Vitrubi*, que representa un home dintre d'un cercle i un quadrat, ha volgut representar la secció àuria: el quocient entre l'altura total de l'home (b) i l'altura fins al melic (a) és, aproximadament, la raó àuria, un nombre irracional.



En general, la major part de les arrels (de qualsevol índex) de qualsevol nombre racional és irracional. Però no s'acaben aquí els nombres irracionals perquè hi ha multitud de nombres irracionals que tampoc no es poden expressar com una arrel d'un nombre racional. Entre aquests nombres es troba el nombre denominat *pi,* a partir de la lletra de l'alfabet grec que el representa, π. El nombre π indica quantes vegades més gran és la longitud de la circumferència en relació amb el seu diàmetre, i la seva forma decimal és:

π = 3,14159265358979323846264338327950288419 72...

L'aproximació per les deumil·lèsimes és $\pi \approx 3{,}1416$.
Un altre nombre irracional molt important és el denominat nombre e, el valor del qual és:
e = 2,71828182845904523536028747135266 24...
Es pot observar que els nombres irracionals coneguts, a part de les arrels, es designen amb una lletra (o fins i tot amb una expressió alfabètica, o amb el nom del seu descobridor, o amb el nom que la comunitat científica decideixi); això és fàcilment comprensible, ja que aquests nombres no es poden expressar de cap altra forma coneguda: ni mitjançant una expressió decimal (ni fraccionària), ni com a arrel.
És interessant conèixer l'origen d'alguns d'aquests nombres:



- La secció àuria o divina proporció, ϕ , és un nombre conegut des de molt antic per a expressar diferents relacions entre elements de certes figures geomètriques. Per exemple, la relació entre la diagonal d'un pentàgon regular i un dels seus costats és igual a la secció àuria. La relació d/l d'un pentàgon regular és igual a ϕ . L'arquitectura grega és plena de temples que semblen tenir relació amb la secció àuria: el quocient entre el costat més llarg i el més curt de la seva base se sol acostar moltíssim a aquest nombre. Numèricament, la raó àuria es pot calcular de manera senzilla: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- La constant de Brun és la suma dels inversos de tots els primers bessons, és a dir, dels nombres primers de la forma p i $p + 2$. Es tracta de trobar aquesta suma:

$$B = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\ldots$$

Brun va demostrar el 1919 que la suma de tots els primers bessons és un nombre, encara que no es pot assegurar amb total certesa que sigui un nombre irracional.

- La constant de Catalan (cognom del matemàtic belga del segle XIX Eugène Catalan), G, és la suma/resta alternada de la inversa de tots els nombres senars:

$$G = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}-\frac{1}{15^2}\ldots$$

Hi ha matemàtics que s'han dedicat a buscar el màxim nombre de xifres decimals possible d'alguns d'aquests nombres irracionals, amb el recurs de potents ordinadors i programes. En la taula següent es presenten alguns dels nombres irracionals més famosos, amb els seus primers dígits decimals, el màxim nombre de xifres decimals calculades, juntament amb el nom de qui les va trobar i la data (en molts casos no s'ha demostrat encara que es tracta de nombres irracionals, tot i que s'intueix que sí).

Nombres	Primers dígits	Xifres calculades	Qui i en quin any
Constant de Brun	1,902160582...	9	*T. Nicely – 1999* & *P. Sebah – 2002.*
Gauss–Kuzmin–Wirsing	0,30366300289873265...	468	*K. Briggs – 2003.*
Constant d'Artin	0,37395581361920228...	1.000	*G. Niklasch – 1999.*
Fransén-Robinson	2,80777024202851936...	1.025	*P. Sebah – 2001.*
Constant dels primers bessons	0,66016181584686957...	5.020	*P. Sebah – 2001.*
Constant de Khintchine	2,68545200106530644...	110.000	*X. Gourdon – 1998.*
Γ(13)	2,67893853470774763...	16.693.288	*S. Spännare – 2003.*
Γ(14)	3,62560990822190831...	51.097.000	*P. Sebah & M. Tommila – 2001.*
Constant d'Euler γ	0,57721566490153286...	108.000.000	*P. Demichel & X. Gourdon – 1999.*
Constant de Catalan G	0,91596559417721901...	201.000.000	*X. Gourdon & P. Sebah – 2002.*
Log 2.	0,69314718055994530...	600.001.000	*X. Gourdon & S. Kondo – 2002.*
ζ(3)	1,20205690315959428...	1.000.000.000	*P. Demichel – 2003.*
Secció àuria ϕ	1,61803398874989484...	3.141.000.000	*X. Gourdon & P. Sebah – 2002.*
e	2,71828182845904523...	50.100.000.000	*X. Gourdon & S. Kondo – 2003.*
√2.	1,41421356237309504...	137.438.953.444	*I. Kanada & D. Takahashi – 1997.*
π	3,14159265358979323...	1.241.100.000.000	*I. Kanada – 2002.*

Font: http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html

En la pràctica, se sol utilitzar una aproximació decimal (per arrodoniment) de qualsevol nombre irracional, amb el nombre suficient de decimals segons la situació real en la qual ens trobem. Por exemple, aquestes són les aproximacions fins a la deumil·lèsima d'alguns nombres irracionals (suficient en la majoria de càlculs):

$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$
$\sqrt{3} \simeq 1{,}7321$
$\sqrt{5} \simeq 2{,}2361$
$\pi \cong 3{,}1416$
$i \simeq 2{,}7183$
$\phi \cong 1{,}618$

Així, doncs, qualsevol nombre irracional es pot aproximar per un nombre racional (en forma decimal, principalment), de manera que el nombre racional es trobi tan a prop del nombre irracional com es vulgui.

Què és la notació científica i per a què serveix?

> La notació científica és la forma habitual d'escriure els nombres, racionals o irracionals, en les disciplines científiques, especialment aquelles que fan servir nombres molt grans, o que usen nombres molt petits. Bàsicament, la notació científica permet evitar el gran nombre de zeros que requereixen alguns nombres.

Moltes ciències requereixen nombres molt grans o inusualment petits: l'astronomia, per exemple, necessita treballar amb nombres grans perquè també són immenses les distàncies amb què treballa; en canvi, la física de partícules, com que investiga ens diminuts, utilitza nombres molt petits. Per a evitar nombres d'aquest tipus:

1403400000000000000000000000000000000000000 , o bé,
0,0000000000000000000000000000000000874.

es requereix una notació més compacta i eficient: la notació científica. Els nombres anteriors s'escriurien amb notació científica de la manera següent:

$1,4034 \cdot 10^{42}$
$8{,}74 \cdot 10^{-34}$

Es pot observar que l'expressió es descompon en dues parts:

1. Un nombre decimal el valor absolut del qual és més gran o igual a 1, i menor que 10, denominat *mantissa.*

2. Una potència de deu (de vegades anomenada, simplement, *exponent*).

El producte d'ambdós nombres ha de coincidir amb el nombre en qüestió. Es pot observar que aquesta forma d'escriure un nombre evita els zeros innecessaris; la informació de quants 0 s'han de posar es troba en l'exponent. Així, doncs:

- Per a expressar un nombre en notació decimal, s'ha de trobar la primera xifra diferent de zero, per l'esquerra del nombre.
    - La mantissa serà igual a un nombre la xifra de les unitats del qual és precisament aquesta, i les següents formen la seva secció decimal (evitant posar zeros innecessaris). Per exemple, la mantissa del nombre 0,000000000000323 és 3,23; la mantissa del nombre 180200000000000 és 1,802.
    - L'exponent de la potència de 10 és igual al nombre de xifres del nombre menys un, si el nombre no té decimals (el nombre és molt gran); per exemple, $180200000000000 = 1{,}802 \cdot 10^{14}$. En canvi, si es tracta d'un nombre amb decimals (el nombre és molt petit), l'exponent és negatiu i és igual, en valor absolut, al nombre de zeros del nombre; per exemple, $0{,}000000000000323 = 3{,}23 \cdot 10^{-13}$. En tot cas, l'exponent compleix les regles habituals de potenciació.
- El pas de la notació científica a la usual és, també, molt senzill.
    - Si l'exponent és negatiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a l'esquerra, tantes posicions com indiqui el nombre de l'exponent (sense signe), afegint-hi punts 0 com sigui necessari.

Per exemple,

$$1,032 \times 10^{-9} = 0,\underbrace{000000001}_{\text{9 posicions}}032$$

- Si l'exponent és positiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a la dreta, tantes posicions com indiqui l'exponent, afegint-hi els 0 que calgui. Per exemple.

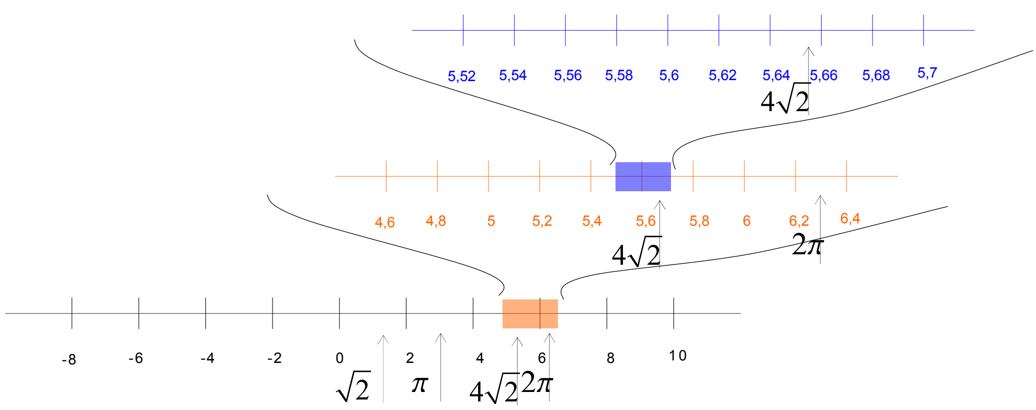
$$5,201 \times 10^{11} = 5\underbrace{20100000000}_{\text{11 posicions}}$$

Què és un nombre real?

> Al conjunt de tots els nombres, racionals i irracionals, se l'anomena *conjunt dels nombres reals*, i qualsevol nombre, sigui del tipus que sigui, es troba dintre d'aquest conjunt.

Tots els nombres, racionals o irracionals, formen part del denominat conjunt de nombres reals. El nombre 1/3 és un nombre real que és racional, mentre que el nombre π és un nombre real que és irracional.

Els nombres reals estan ordenats de més petit a més gran, igual que tots els nombres analitzats fins ara. Així, es poden representar els nombres reals en una recta, denominada *recta real*. El fet que hi hagi molts més nombres irracionals que racionals dóna una idea dels "buits" que hi ha en la representació dels nombres racionals en una recta. Això no passa amb els nombres reals: la recta real està completament plena de nombres reals, és a dir, cada punt de la recta es correspon amb un nombre real.

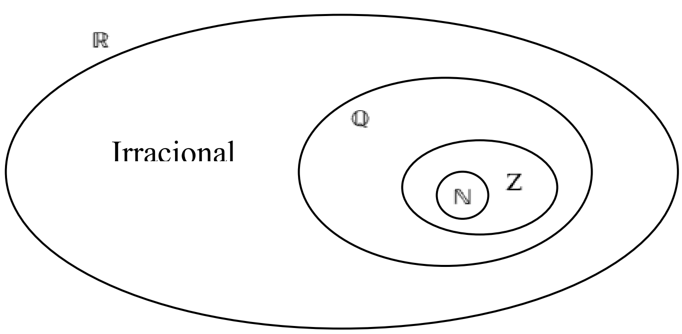


El conjunt de tots els nombres reals se simbolitza amb $\mathbb{R}$. A més, cadascun dels conjunts numèrics estudiats també es designa amb un símbol: $\mathbb{N}$ designa el conjunt de nombres naturals; $\mathbb{Z}$ designa el conjunt de nombres enters i $\mathbb{Q}$ designa el conjunt de nombres racionals.

Els diferents conjunts de nombres (naturals, enters, racionals i reals) mantenen relacions d'inclusió. És a dir, el conjunt dels nombres naturals es troba inclòs dintre del conjunt de nombres enters; aquest, al seu torn, es troba inclòs en el conjunt de nombres racionals; finalment, aquest últim està inclòs en el conjunt de nombres reals. Per a assenyalar relacions d'inclusió es fa servir el símbol $\subset$, que indica que el conjunt que se situa a la seva esquerra està inclòs en el conjunt que se situa a la seva dreta.

Així, doncs: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Aquesta representació gràfica mostra la relació d'inclusió entre els diferents conjunts numèrics.



Quines són les operacions bàsiques entre nombres reals i quines són les seves propietats?

> Les operacions bàsiques entre nombres reals són la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i la potenciació/radicació. Aquestes operacions tenen les mateixes propietats que les operacions entre nombres racionals.

Les operacions bàsiques entre nombres reals són la suma i la multiplicació. La resta i la divisió es defineixen a partir de la suma i de la multiplicació. Amb aquesta finalitat, cal definir uns elements especials:

- L'element neutre de la suma és el 0, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a + 0 = 0 + a = a$.
- L'element neutre de la multiplicació és l'1, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- L'oposat de qualsevol nombre real a, que és $-a$, i que compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- L'invers de qualsevol nombre real a (excepte el 0), que és $1/a$, i que compleix $a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- La resta de dos nombres és igual a la suma amb l'oposat. És a dir, si a, b són nombres reals: $a - b = a + (-b)$.
- La divisió de dos nombres és igual a la multiplicació amb l'invers. És a dir, si a, b són nombres reals, i $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Els nombres reals tenen les propietats següents, essent a, b i c nombres reals qualssevol:

- Pel que fa a la suma:
  Propietat commutativa: $a + b = b + a$
  Propietat associativa: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
- Pel que fa al producte:
  Propietat commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
  Propietat associativa: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Propietat distributiva del producte respecte de la suma:
  $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c.$

La potenciació de nombres reals es defineix així (sempre que sigui possible): si a és un nombre real, n i m són nombres enters,

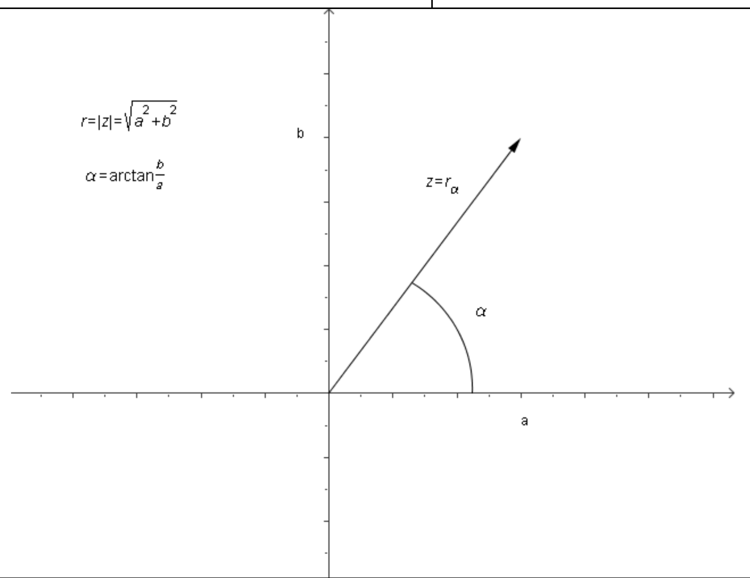
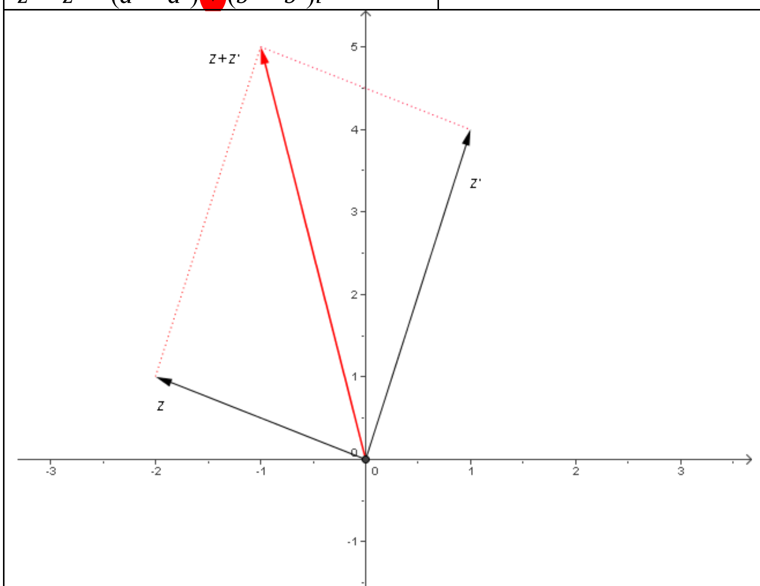
$$a^{-n} = 1/a^n \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

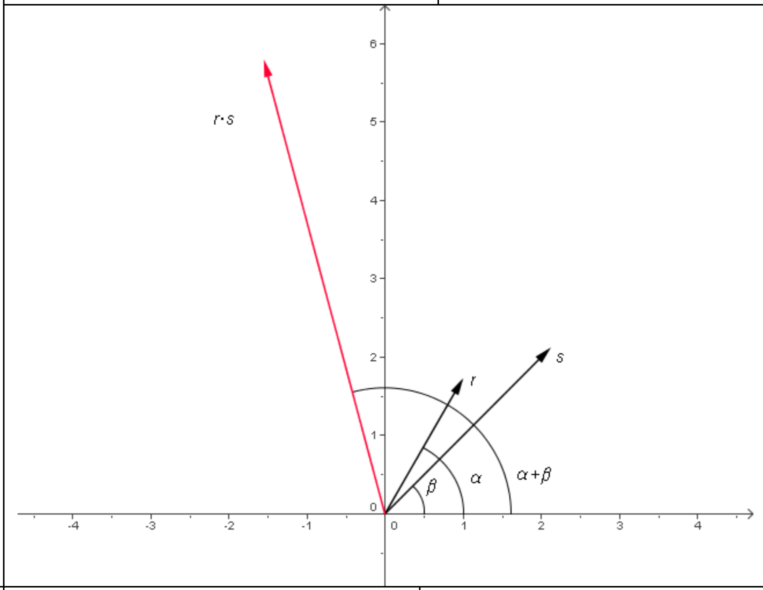
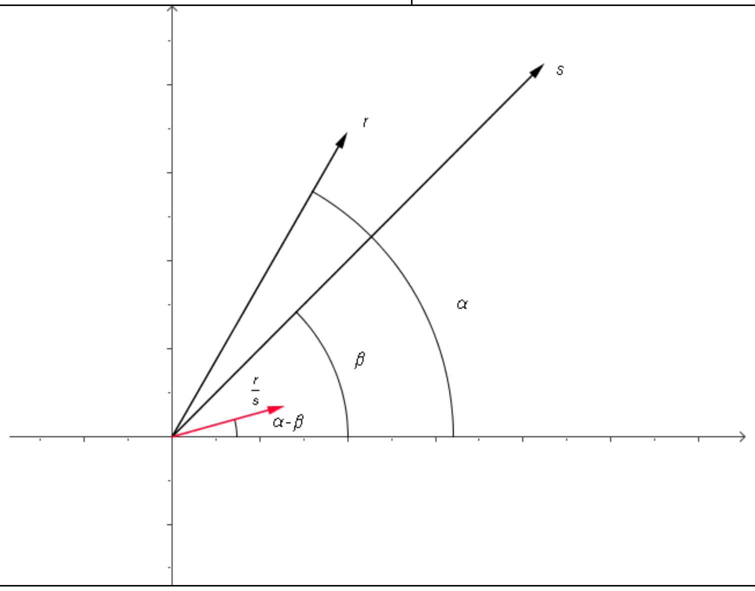
i compleix les propietats següents, essent r i s nombres racionals:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$a^r : a^s = a^{r-s}$$
$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$
$$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$$
$$\left(a : b\right)^r = a^r : b^r$$
$a^0 = 1$ sempre que $a \neq 0$
$$a^1 = a$$

Els nombres complexos

Els nombres complexos

	Forma binòmica	**Forma polar**
Definició	$z = a + bi$, o bé $z = (a, b)$ essent a la part real i b, la part imaginària. $a = r \cdot \cos \alpha$ $b = r \cdot \sin \alpha$	$z = r_\alpha$ essent r el mòdul i α, l'argument. $r = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\alpha = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$
Oposat	$-z = -a - bi$	
Conjugat	$\overline{z} = a - bi$	
Representació		
Operacions	si $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$	si $z = r_\alpha$ i $z' = s_\beta$
Suma	$z + z' = (a + a') + (b + b')i$ $z - z' = (a - a') + (b - b')i$	
		
Resta	$z - z' = (a - a') + (b - b')i$	

<table>
<tr><td>Multiplicació</td><td>$z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a' b)i$</td><td>$r_\alpha \cdot s_\beta = \left(r \cdot s\right)_{\alpha+\beta}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Divisió</td><td>$\frac{z'}{z} = \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i$</td><td>$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(r / s\right)_{\alpha-\beta}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Potència</td><td colspan="2">$z^n = \left(r_\alpha\right)^n = \left(r^n\right)_{n\alpha}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(r_\alpha\right)^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}}$ k va des de 0 fins $n - 1$</td></tr>
</table>

Què és un nombre complex?

> Un nombre complex, z, està format d'una part real, $a = \mathrm{Re}(z)$, i una part imaginària, $b = \mathrm{Im}(z)$, i s'escriu $a + bi$, o bé (a, b).

Un nombre complex és una expressió amb dos sumands: un és un nombre real i l'altre és un nombre real per una lletra *i*. Per exemple, z és un exemple de nombre complex:

$$z = 3 + 4i$$

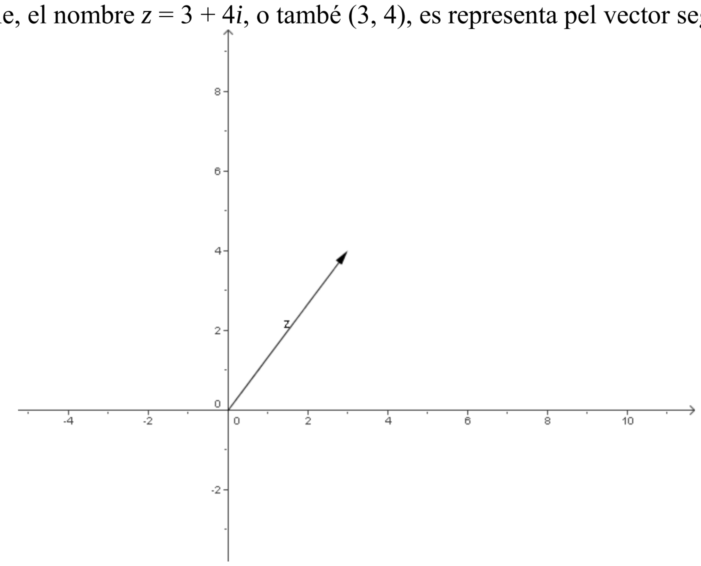
El sumand sense la *i* es denomina *part real*, mentre que el nombre que acompanya la i es denomina *part imaginària* del nombre complex. En l'exemple anterior, 3 és la part real i s'indica $3 = \mathrm{Re}(z)$; mentre que 4 és la part imaginària i s'indica $4 = \mathrm{Im}(z)$.
Un nombre complex també es pot escriure en forma de parell ordenat; en l'exemple, el nombre complex $z = 3 + 4i$ també es pot escriure (3, 4), essent la primera coordenada la part real, i la segona coordenada, la part imaginària.
Així, doncs, un nombre complex és un nombre format d'una part real, a, i una part imaginària, b, que s'escriu

$$a + bi \qquad \text{o bé,} \qquad (a, b)$$

Com es representa un nombre complex?

> Per a representar un nombre complex es poden fer servir els eixos de coordenades cartesianes, l'eix X per a la part real i l'eix Y per a la part imaginària.

Per a representar un nombre complex es poden fer servir els eixos cartesians, l'eix X per a la part real (eix real) i l'eix Y per a la part imaginària (eix imaginari). Així, per exemple, el nombre $z = 3 + 4i$, o també (3, 4), es representa pel vector següent:



Són necessaris els nombres complexos?

> Els nombres complexos són imprescindibles, ja que permeten que qualsevol equació polinòmica tingui solució. Per aconseguir-ho, es requereix que els nombres reals siguin completats amb el denominat *nombre i*, el valor del qual és $i = \sqrt{-1}$.

És fàcil observar que existeixen equacions que no tenen solució real. Per exemple, l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

no té solució, ja que si aïllem la x^2:

$$x^2 = -1$$

i no hi ha cap nombre real que elevat al quadrat sigui –1, perquè hauria de succeir que:

$$x = \sqrt{-1}$$

i ja sabem que no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.
Per a permetre que equacions del tipus anterior també tinguin solució, es completen els nombres reals afegint l'arrel quadrada de –1, amb la qual cosa obtenim els nombres complexos. A l'arrel quadrada de –1 se la denomina i:

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{és a dir} \qquad i^2 = -1$$

i, qualsevol nombre complex es pot expressar de la forma:

$$z = a + bi$$

Vegem que l'equació anterior té una solució complexa:

$$x^2 = -1$$

per tant,

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

És a dir, les solucions de l'equació són $+i$ i $-i$. Vegem-ho:

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$
$$(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

D'aquesta manera, qualsevol equació polinòmica té una solució complexa.

Com es representen les potències de *i*?

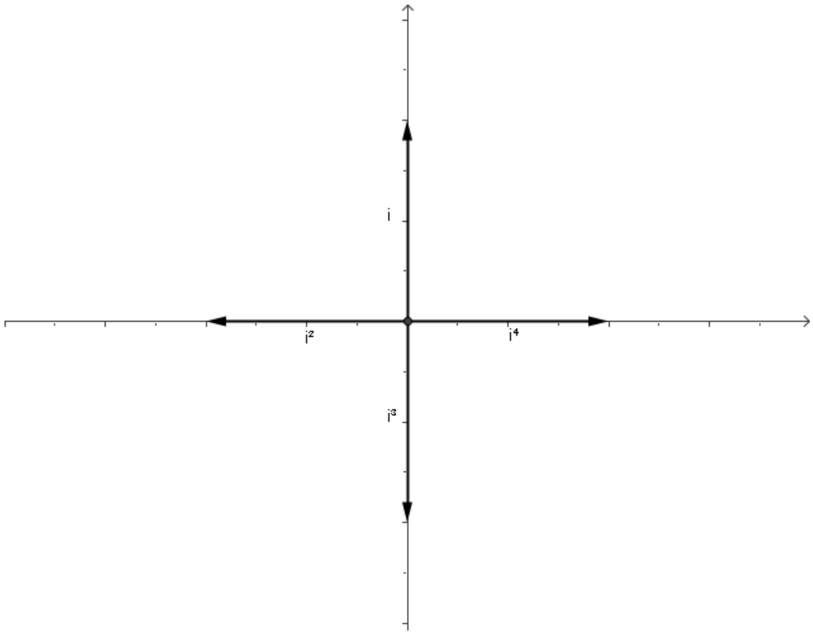
> Les potències de i són fàcils de trobar i de representar. N'hi ha prou de calcular les quatre primeres perquè la resta, a partir de la cinquena potència de i, i^5, es repeteixen cíclicament.

Les potències de i són fàcils de trobar:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

vegem que a partir de i^5 es tornen a repetir els valors, és a dir,

$i^5 = i$ $\qquad$ $i^6 = i^2$ $\qquad$ $i^7 = i^3$ $\qquad$ $i^8 = i^4$



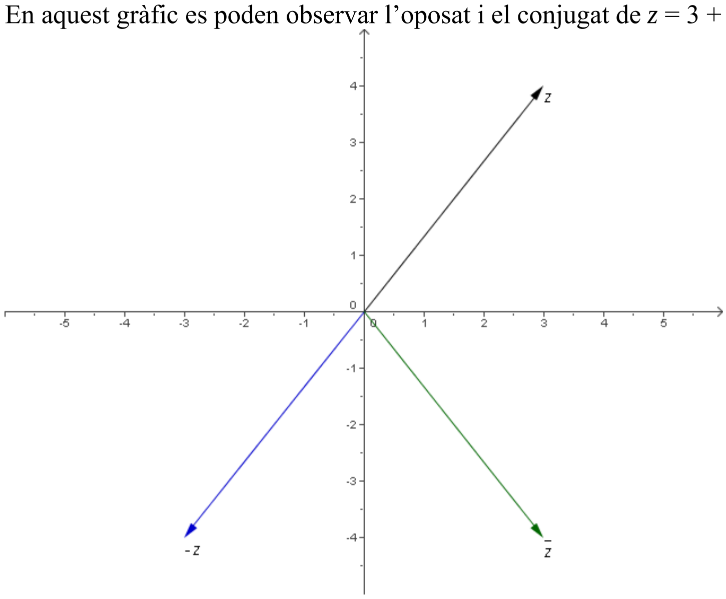
Com es calculen l'oposat i el conjugat d'un nombre complex?

> L'oposat d'un nombre complex $z = a + bi$, s'indica $-z$ i és igual a $-z = -a - bi$. El conjugat d'aquest complex z, s'indica $\overline{z}$, i és $\overline{z} = a - bi$

Donat un nombre complex $z = a + bi$, la seva oposat, que s'indica $-z$, és el nombre complex amb els signes oposats, és a dir, $-z = -a - bi$. El conjugat d'aquest complex z, que s'indica $\overline{z}$, es construeix canviant de signe la part imaginària de z. Així, doncs, $\overline{z} = a - bi$.

Per exemple, l'oposat de $z = 3 + 4i$ és $-z = -3 - 4i$. Mentre que el seu conjugat és $z = 3 - 4i$.

En aquest gràfic es poden observar l'oposat i el conjugat de $z = 3 + 4i$:



Com es fan la suma i la resta entre complexos?

> Per a sumar dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, se sumen les parts reals i imaginàries, $z + z' = (a + a') + (b + b')i$. La resta es realitza de manera similar: $z - z' = (a - a') + (b - b')i$.

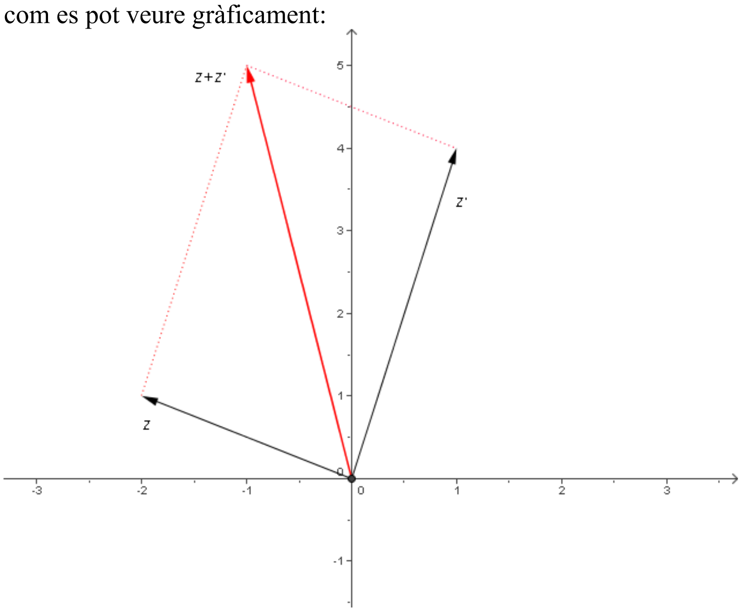
Per a sumar dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, se sumen les parts reals i imaginàries de la manera següent:

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

Per exemple, si $z = -2 + i$ i $z' = 1 + 4i$

$$z + z' = (-2 + 1) + (1 + 4)i = -1 + 5i$$

com es pot veure gràficament:



La resta es fa de manera similar, restant les parts reals i imaginàries:

$$z - z' = (a - a') + (b - b')i$$

Per exemple, si $z = -2 + i$ i $z' = 1 + 4i$

$$z + z' = (-2 - 1) + (1 - 4)i = -3 - 3i$$

Com es fa el producte de nombres complexos?

> El producte de dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$ és igual a $z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

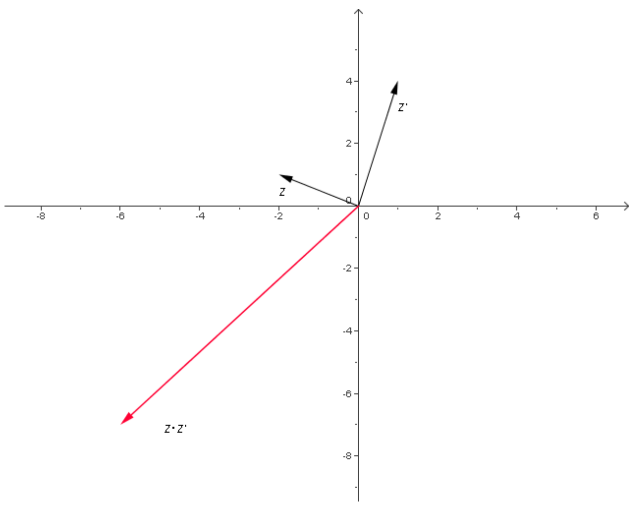
La multiplicació de dos nombres complexos es fa de manera semblant a la multiplicació de polinomis: si els nombres són $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, per a obtenir el resultat se situen un sobre l'altre, i es multipliquen factor a factor, tenint en compte que $i \cdot i = i^2 = -1$:

$$\begin{array}{l} a + bi \\ \underline{a' + b'i\ } \\ aa' + ab'i \\ \underline{bb'i^2 + a'bi} \\ (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \end{array}$$

és a dir, $z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Així, per exemple, si $z = -2 + i$ i $z' = 1 + 4i$

$$z \cdot z' = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 4) + (-2 \cdot 4 + 1 \cdot 1)i = -6 - 7i$$



Com es fa el quocient de nombres complexos?

El quocient de dos nombres complexos $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$ és igual a $\frac{z'}{z} = \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i$.

Per a fer el quocient de dos nombres complexos s'han de multiplicar numerador i denominador pel conjugat del denominador. Si els nombres són $z = a + bi$ i $z' = a' + b'i$, i tenint en compte que $i \cdot i = i^2 = -1$:

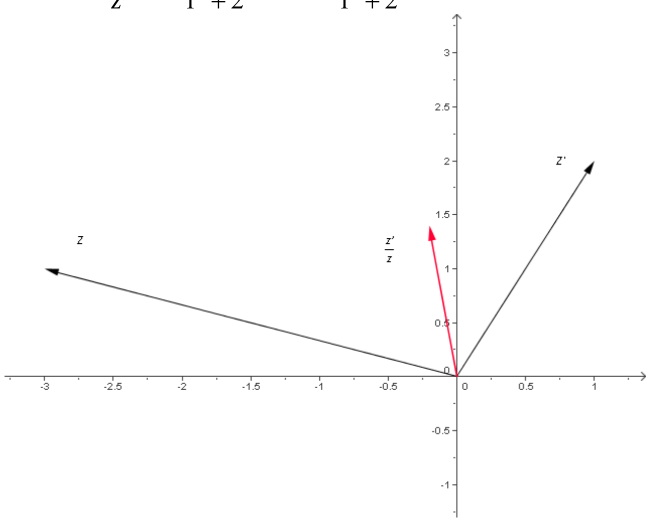
$$\frac{z'}{z} = \frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(a'a + b'b) + (ab' - a'b)i}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i$$

és a dir, la part real del quocient és $\frac{a'a + b'b}{a^2 + b^2}$ i la part imaginària és $\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$.

Així, per exemple, si $z' = -3 + i$ i $z = 1 + 2i$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{1^2 + 2^2} + \frac{1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2}{1^2 + 2^2} i = -0,2 + 1,4i$$



Com es representa un nombre complex en forma polar?

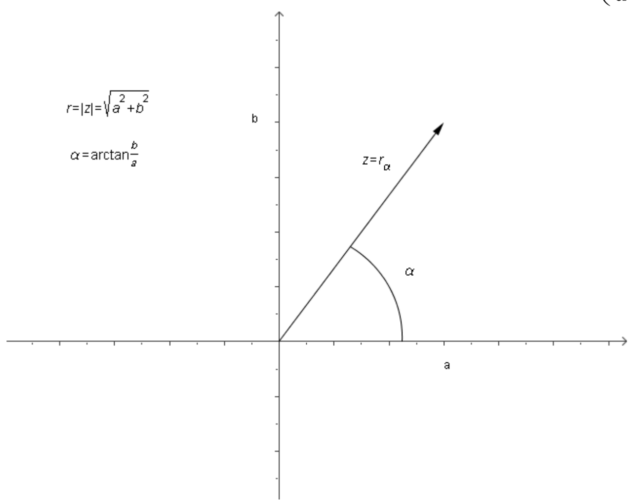
> Un nombre complex $z = a + bi$ es pot representar per $z = r_\alpha$, essent r el mòdul de z, i α l'argument o angle que forma amb l'eix real.

Observant la representació d'un nombre complex, és fàcil comprovar que el nombre z també es pot caracteritzar per la longitud del vector, denominada *mòdul,* $|z|$, i l'angle que forma amb l'eix real, denominat *argument.* Si el nombre és $z = 3 + 4i$, la longitud del segment és $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, mentre que l'angle es pot establir buscant l'arctangent del quocient entre la part imaginària i la part real:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,93 \text{ rad}$$

En general, doncs, un nombre complex $z = a + bi$, o (a, b), es pot representar per $z = r_\alpha$, essent r el mòdul de z, i α l'angle que forma aquest segment amb l'eix real:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Cal destacar que l'argument ha de ser un angle entre 0 i 2π (molt sovint també es pot usar un argument entre $-\pi$ i π); si fos major o menor, s'ha de buscar l'angle entre 0 i 2π que es correspongui; per exemple:

l'angle $-\pi$	es correspon amb l'angle π
l'angle $9\pi/2$	es correspon amb l'angle $\pi/2$

Com es transforma un complex de forma polar a forma bionòmica?

> La forma binòmica d'un nombre complex en forma polar, $z = r_\alpha$, és $z = r \cdot \cos \alpha + i \cdot r \cdot \sin \alpha$.

Si z és un nombre complex en forma polar, $z = r_\alpha$, per a trobar la seva forma binòmica, n'hi ha prou de calcular les coordenades de l'eix real i imaginari, (a, b):

$$a = r \cdot \cos \alpha$$
$$b = r \cdot \sin \alpha$$

és a dir, la forma binòmica és $z = r \cdot \cos \alpha + i \cdot r \cdot \sin \alpha$.

Com es fan la multiplicació i la divisió en forma polar?

> Per a fer el producte de dos nombres complexos en forma polar, r_α i s_β, s'han de multiplicar ambdós mòduls i posar per argument la suma d'arguments, $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$. Per a realitzar la divisió, s'han de dividir ambdós mòduls i posar per argument la diferència d'arguments, $\frac{r_\alpha}{s_\beta} = (r/s)_{\alpha-\beta}$.

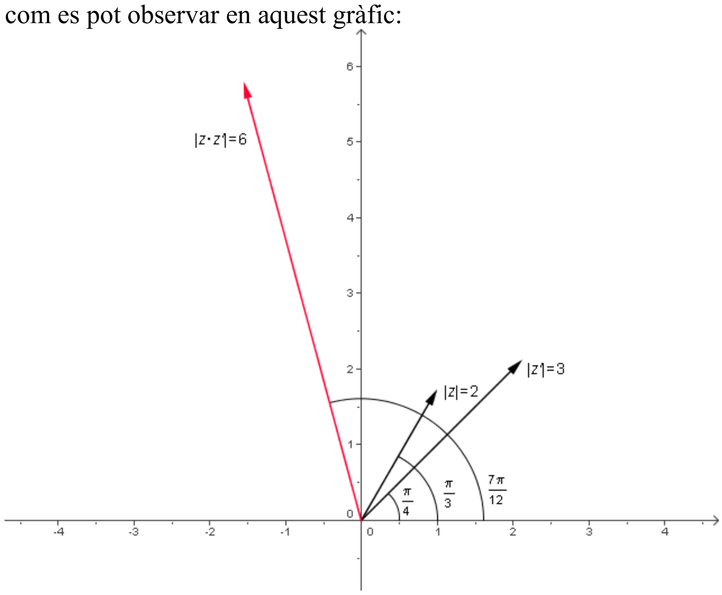
La suma i la resta no se solen fer en forma polar perquè és molt més fàcil fer-les en forma binòmica. En canvi, la multiplicació i la divisió són més senzilles en forma polar que en forma binòmica.
Per a fer el producte de dos nombres complexos en forma polar, r_α i s_β, s'han de multiplicar ambdós mòduls i posar per argument la suma d'arguments:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Per exemple, el producte de i $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$ $z' = 3_{\frac{\pi}{4}}$ és igual a

$$z \cdot z' = 2_{\frac{\pi}{3}} \cdot 3_{\frac{\pi}{4}} = (2 \cdot 3)_{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}} = 6_{\frac{7\pi}{12}}$$

com es pot observar en aquest gràfic:



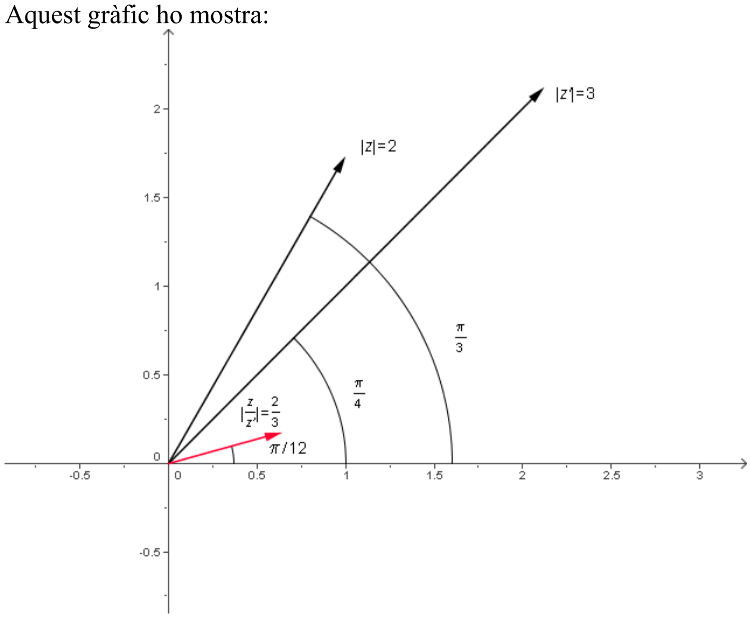
Per a dividir dos nombres complexos en forma polar, r_α i s_β, s'han de dividir ambdós mòduls i posar per argument la diferència d'arguments:

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = (r/s)_{\alpha-\beta}$$

Per exemple, el quocient d'i $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$ $z' = 3_{\frac{\pi}{4}}$ és igual

$$\frac{z}{z'} = \frac{2_{\frac{\pi}{3}}}{3_{\frac{\pi}{4}}} = (2/3)_{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}} = (2/3)_{\frac{\pi}{12}}$$

Aquest gràfic ho mostra:



Com es fa la potència d'un nombre complex en forma polar?

> La potència d'exponent *n* d'un nombre complex r_α és $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$.

Per a fer la potència d'un nombre complex, r_α , s'ha d'observar el següent:

$$(r_\alpha)^2 = r_\alpha \cdot r_\alpha = (r^2)_{2\alpha}$$

$$(r_\alpha)^3 = r_\alpha \cdot (r_\alpha)^2 = r_\alpha \cdot (r^2)_{2\alpha} = (r^3)_{3\alpha}$$

és a dir, en general,

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

Aquesta expressió és vàlida tant per a exponents positius com negatius. Per exemple:

$$(3_2)^4 = (3^4)_{4\cdot 2} = 81_8 = 81_{8-2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tots els angles} \\ \text{han de trobar-se} \\ \text{entre 0 i } 2\pi}}{=} 81_{1,72}$$

$$(3_2)^{-3} = (3^{-3})_{-3\cdot 2} = \frac{1}{27_{-6}} = \frac{1}{27_{-6+2\pi}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tots els angles} \\ \text{han de trobar-se} \\ \text{entre 0 i } 2\pi}}{=} \frac{1}{27_{0,28}}$$

Com es calculen les arrels d'un nombre complex en forma polar?

> La potència d'exponent *n* d'un nombre complex r_α és $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$.

Una arrel no és més que una potència d'exponent trencat. El procés és, doncs, similar a l'obtenció d'una potència, tot i que el nombre d'arrels d'un nombre complex és igual a l'índex de l'arrel.

Per exemple:

$$\sqrt{4_\pi} = (4_\pi)^{\frac{1}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)_{\frac{1}{2}\cdot\pi} = 2_{\frac{\pi}{2}}$$

Això és així perquè:

$$\left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 4_\pi$$

Ara bé, és fàcil observar que també:

$$\left(2_{\frac{3\pi}{2}}\right)^2 = 4_{3\pi} = 4_\pi$$

Així, doncs, per a trobar les arrels d'un nombre complex en forma polar es fa el següent:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = (r_\alpha)^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+2\pi k}{n}} \qquad k \text{ va des de 0 fins a } - n\ 1$$

Per exemple, per a trobar les arrels d'índex 4 de la unitat, és a dir, del nombre real 1, que en forma polar s'escriu 1_0, s'ha de fer el següent:

$$\sqrt[4]{1_0} = (1_0)^{\frac{1}{4}} = \left(1^{\frac{1}{4}}\right)_{\frac{0+2\pi k}{4}} = \left(\sqrt[4]{1}\right)_{\frac{2\pi k}{4}} = 1_{\frac{2\pi k}{4}} \quad k \text{ va des de 0 fins a } 4 - 1 = 3$$

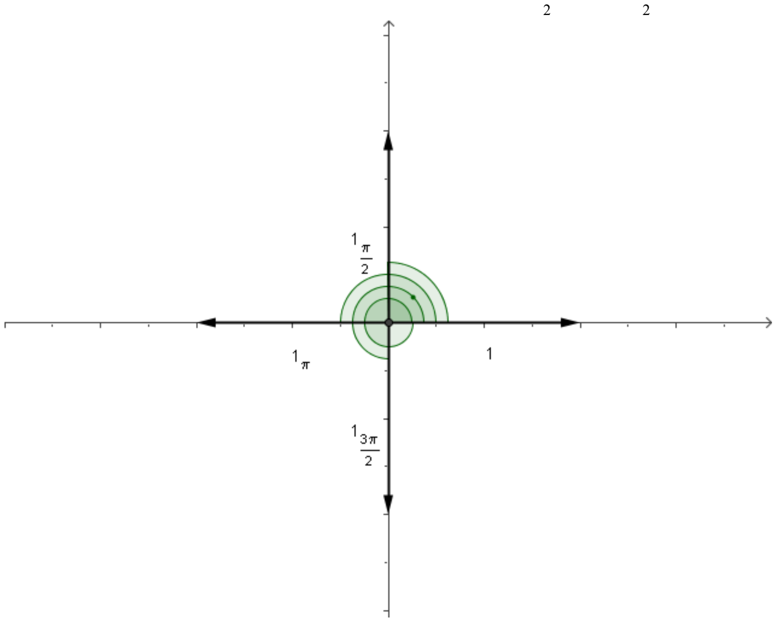
Per a $k = 0$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 0}{4}} = 1_0$

Per a $k = 1$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 1}{4}} = 1_{\frac{\pi}{2}}$

Per a $k = 2$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 2}{4}} = 1_\pi$

Per a $k = 3$ $\quad \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{2\pi 3}{4}} = 1_{\frac{3\pi}{2}}$

Per tant, les arrels d'índex 4 de la unitat són: 1_0, $1_{\frac{\pi}{2}}$, 1_π i $1_{\frac{3\pi}{2}}$.



Expressions algebraiques

Expressions algebraiques

Les expressions algebraiques	
Elements d'una expressió algebraica	Nombres de qualsevol tipus
	Lletres
	Signes d'operació: sumes, restes, multiplicacions i divisions
Exemples	$a + 1$ $21a + 4b$ $2x - 6y + z$
Valor numèric d'una expressió algebraica	Es troba substituint les seves lletres per nombres i obtenint-ne el resultat. El valor numèric d'una expressió algebraica depèn dels valors concrets que rebin les lletres. Per exemple, el valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$, quan $x = 5$ i $y = 2$, és $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$.
Utilitat d'una expressió algebraica	Simplificar una situació real en la qual s'han de fer operacions entre quantitats conegudes i quantitats desconegudes.
Igualtat entre expressions algebraiques	
Elements d'una igualtat	Dues expressions algebraiques, denominades *membres.*
	Un signe igual, = , interposat entre ambdues.
Tipus d'igualtats	Certa: si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra pot convertir-se en la de la dreta, aplicant les propietats de les operacions. Per exemple: $a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$
	Falsa: si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra no es pot convertir en la de la dreta. Per exemple: $4a - 5\,b + 2 = 4a - 5\,b + 7$.
Equacions	
Definició	Igualtats entre expressions algebraiques, especialment aquelles la falsedat o certesa de les quals no es pot establir a priori.
Solució d'una equació	Valors numèrics que transformen l'equació en una igualtat entre expressions numèriques vertaderes. Per exemple, si se substitueixen les incògnites de $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ per 2 en el cas de la x , i per 1 en el cas de la y, obtindrem, $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, i ambdós membres resulten 3.
Equacions equivalents	Equacions que tenen exactament les mateixes solucions.

Propietats de les expressions algebraiques	
Propietats de la suma	
Propietat commutativa	El resultat de sumar dos nombres en qualsevol ordre és sempre el mateix: $a + b = b + a$.
Propietat associativa	Si se sumen tres nombres qualssevol, es poden agrupar com es vulgui: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
Element neutre de la suma	L'element neutre de la suma de nombres és el 0, ja que si se suma aquest nombre a qualsevol altre nombre, el resultat és el mateix nombre: $a + 0 = a$.
Element oposat	L'element oposat de c és $–c$, ja que $c + (–c) = 0$.
Propietats de la multiplicació	
Propietat commutativa	Dos nombres es poden multiplicar en qualsevol ordre, i el resultat sempre és el mateix: $a \cdot b = b \cdot a$.
Propietat associativa	Si es multipliquen tres nombres qualssevol, es poden agrupar com es vulgui, perquè el resultat sempre és el mateix: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
Element neutre de la multiplicació	L'element neutre de la multiplicació és l'1, ja que si es multiplica qualsevol nombre per 1, el resultat sempre és el mateix nombre inicial: $a \cdot 1 = a$.
Element invers	L'element invers d'un nombre qualsevol (que no sigui 0) és aquell nombre que multiplicat amb aquest dóna 1 (l'element neutre de la multiplicació): l'element invers de c és $(1/c)$, ja que $c \cdot (1/c) = 1$.
Propietat distributiva de la suma respecte del producte	
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.	
La resta i la divisió	
La resta	Les propietats de la resta són semblants a les de la suma: només s'ha de recordar que la resta és la suma amb l'oposat: $a – b = a + (–b)$
La divisió	Les propietats de la divisió són semblants a les de la multiplicació; només s'ha de recordar que la divisió és una multiplicació per l'invers (essent $b \neq 0$): $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$
L'aplicació de les propietats	
Utilitat	S'utilitzen per a simplificar expressions algebraiques.
Exemple	Aplicant les propietats de les operacions, es pot arribar a la conclusió que: $a – 4b – 2a + 5a – b$ és igual a $4a – 5b$

Què és una expressió algebraica i quina és la seva utilitat?

Una expressió algebraica conté nombres, lletres i signes d'operació. Les lletres d'una expressió algebraica s'han de tractar com si fossin nombres, i per això es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, seguint les mateixes regles que els nombres. Les expressions algebraiques permeten expressar operacions entre quantitats desconegudes, substituint el valor desconegut per una lletra.

Igual que una expressió numèrica, una expressió algebraica conté nombres i signes d'operació entre ells. Ara bé, una expressió algebraica també introdueix lletres, que operen entre si o amb altres nombres. Un exemple d'expressió algebraica és:

$$a - 23 \cdot c + 5 \cdot d - 7 \cdot a \cdot y$$

Les lletres d'una expressió algebraica s'han de tractar com si fossin nombres: es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, complint, com veurem, les mateixes propietats de les operacions entre nombres.

Les expressions algebraiques es poden usar en problemes reals, en els quals es desconeix el valor d'algun element. Així, per exemple, si una persona va a comprar i adquireix 3 kg de llimones a 1,09 € el kg, i 2 kg de patates a 0,78 € el kg, per a calcular el valor de la compra, és evident que s'ha de fer:

$$3 \cdot 1{,}09 + 2 \cdot 0{,}78$$

Ara bé, si no es coneix els kg de llimones, ni els kg de patates, es pot associar cada valor a una lletra (sempre que sigui possible, relacionada amb el nom; per exemple, l per a les llimones, i p per a les patates); el valor de la compra seria igual a:

$$3 \cdot l + 2 \cdot p$$

Aquesta expressió algebraica permet calcular el valor de la compra en el moment en què es coneguin els preus de les llimones i de les patates, substituint les dues lletres pels seus valors reals. Normalment, en multiplicar un nombre per una lletra no es posa el signe de multiplicació, sinó que se sobreentén que es tracta d'un producte, de manera que l'expressió algebraica anterior també es pot escriure com:

$$2l + 3p$$

Les lletres d'una expressió algebraica també es poden substituir per nombres. Per exemple, en l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ es pot substituir la lletra x pel valor 3, i la lletra y, pel valor 4. En aquest cas, l'expressió algebraica es transforma en:

$$4 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{3} - 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{4} + 6$$

El valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ quan la x és 3 i y és 4, és igual a $4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6$, és a dir, és igual a 10. En definitiva, un valor numèric d'una expressió algebraica es troba substituint les seves lletres per nombres i trobant el seu resultat. És evident que el valor numèric d'una expressió algebraica depèn dels valors concrets que rebin les lletres. Així, per exemple, l'expressió algebraica anterior, $4x - 2y + 6$

quan $x = 5$ i $y = 2$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$

quan $x = -3$ i $y = -1$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) + 6 = -4$

quan $x = -2$ i $y = 5$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 6 = -12$

Quins són els elements bàsics i les propietats de les expressions algebraiques?

> Els sumands d'una expressió algebraica es denominen *termes* i cada lletra es denomina *variable*. Una expressió algebraica es pot convertir en una d'equivalent aplicant les propietats de les operacions entre lletres i nombres, que són les mateixes que les propietats de les operacions entre nombres reals.

Una expressió algebraica està formada per diverses sumes (és sabut que les restes són sumes amb l'oposat) de certs productes mixtos (o, fins i tot, divisions, encara que, de moment, no es faran servir divisions amb denominadors que continguin lletres) de nombres i lletres. Cadascun dels sumands es denomina *terme*. Per exemple:

$$a - 3c + 2d - 5ax$$

té 4 termes: a, $-3c$, $2d$ i, l'últim, $-5ax$, i les variables són a, c, d, x. Com es pot observar, els signes de multiplicació, · o ×, es poden eliminar entre variables o entre nombres i variables.

Les propietats de la suma i la multiplicació de nombres i lletres són les propietats conegudes de les operacions entre nombres reals:

- Element neutre de la suma: el 0 es l'element neutre de la suma perquè sumat a qualsevol altre símbol o nombre no el modifica:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

- Element neutre del producte: l'1 és l'element neutre del producte perquè, multiplicat a qualsevol altre símbol o nombre, no el modifica:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- $-a$ és l'oposat de a perquè, sumats el resultat, és l'element neutre de la suma:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

- $1/a$ és l'invers de (essent $a \neq 0$) perquè el seu producte és l'element neutre del producte:

$$a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1.$$

La resta és l'operació que consisteix a sumar l'oposat:

$$a - \mathrm{b} = a + (-b)$$

- La divisió és l'operació que consisteix a multiplicar per l'invers (essent $b \neq 0$):

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

- Commutativa de la suma. La suma de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa:

$$a + b = b + a.$$

- Associativa de la suma. La suma de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin les diferents sumes:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

- Commutativa del producte. El producte de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

- Associativa del producte. El producte de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin els diferents productes:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Distributiva del producte respecte de la suma. Un producte d'un element per una suma es pot descompondre com la suma dels productes de l'element per cadascun dels sumands:

$$a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c.$$

Com s'apliquen les propietats per a simplificar una expressió algebraica?

> La simplificació d'una expressió algebraica consisteix en la seva reducció al mínim nombre de termes possible, utilitzant les propietats de les operacions en expressions algebraiques. Encara que les propietats es poden aplicar en ordre diferent, el resultat final sol ser molt semblant.

Amb la finalitat de simplificar una expressió algebraica de certa longitud, s'han d'aplicar les propietats de la suma, resta, multiplicació i divisió. La simplificació consisteix en la conversió de l'expressió original en una altra que hi sigui equivalent, però amb el mínim nombre de termes possible. Vegem-ho amb un exemple; s'ha de simplificar:

$$a - 4b - 3a + 5a - b$$

Encara que la manera de simplificar no és única (les propietats es poden aplicar en un altre ordre), generalment, el resultat final és molt semblant:

1) Es resol la suma $-3a + 5a$, utilitzant la propietat distributiva:

$-3a + 5a$ és igual a $((-3) + 5) \cdot a$ igual a $2a$.

Per tant,

$a - 4b - 3a + 5a - b$ és igual a $a - 4b + 2a - b$

2) Per la propietat commutativa, podem agrupar els termes amb a i els termes amb b:

$a - 4b + 2a - b$ és igual a $a + 2a - 4b - b$

3) Element neutre de la suma, per la qual $a = 1 \cdot a$:

$a - 4b + 2a - b$ és igual a $1a + 2a - 4b - 1b$

4) Per la propietat distributiva aplicada dues vegades, una als termes amb a i altra als termes amb b:

$1a + 2a - 4b - 1b$ és igual a $(1+2) \cdot a + (-4-1) \cdot b$

simplificant una mica més,

$1a + 2a - 4b - 1b$ és igual a $3a - 5b$

En definitiva, $a - 4b - 3a + 5a - b$ és equivalent a $3a - 5b$

Aquesta última expressió, com que és més breu que l'anterior, en facilita la manipulació. Per tant, és recomanable simplificar tota expressió algebraica, de la mateixa manera que se simplifica una fracció que no és irreductible o es troba el resultat d'una expressió numèrica.

Què són les igualtats entre expressions numèriques i les igualtats entre expressions algebraiques, i com es pot saber si són certes o falses?

> Una igualtat entre expressions numèriques està formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, i poden ser certes o falses. Una igualtat entre expressions algebraiques està formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, i poden ser certes o falses, però moltes d'elles no són ni certes ni falses.

Una igualtat entre expressions numèriques està formada per dues expressions numèriques, denominades *membres de la igualtat*, i un signe d'igualtat (=) interposat entre ambdues. Les igualtats poden ser certes o falses:

- Una igualtat numèrica és certa si el resultat del membre de l'esquerra és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple:

$$3 \cdot 4 - 5 = 38 - 15 \cdot 2 - 1$$

ja que tant el resultat de la dreta, com el de l'esquerra són 7. En aquest cas, es diu que ambdues expressions numèriques són iguals.

- Una igualtat numèrica és falsa si el resultat del membre de l'esquerra no és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple, és falsa aquesta igualtat:

$$4 \cdot (-2) + 8 = 3 - 7 \cdot 11.$$

ja que el resultat de l'esquerra és 0, mentre que el resultat de la dreta és -74.

De manera semblant a una igualtat numèrica, una igualtat entre expressions algebraiques està formada per dues expressions algebraiques, denominades *membres de la igualtat*, i un signe d'igualtat (=) interposat entre ambdues. Les igualtats algebraiques poden també ser certes o falses:

- Una igualtat algebraica és certa si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra es pot convertir en la de la dreta aplicant-hi les propietats de les operacions. Per exemple:

$$a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$$

és una igualtat certa perquè $a - 4b - 2a + 5a - b$ es pot transformar en $4a - 5b$, usant les propietats de les operacions.

- Una igualtat algebraica és falsa si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra no es pot convertir en la de la dreta. Per exemple:

$$3a - 5b + 2 = 3a - 5b + 7.$$

és una igualtat falsa perquè $3a - 5b + 2$ no pot mai resultar $3a - 5b + 7$

Ara bé, hi ha igualtats algebraiques que no són ni certes ni falses. Per exemple:

$$2a - 5b - 4 = 3x + y$$

en aquest cas, no es pot afirmar que l'expressió de la dreta es pugui transformar en la de l'esquerra, ni tampoc que això sigui impossible. Aquest tipus d'igualtats són les que pròpiament poden denominar-se *equacions.*

Què és una equació i què és una solució d'una equació?

> Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar *equació*, encara que les igualtats entre expressions algebraiques més interessants són aquelles la falsedat o certesa de les quals no es pot establir a priori. La solució d'una equació es compon d'aquells nombres que, substituint les incògnites, permeten transformar l'equació en una igualtat numèrica certa.

Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar *equació.* En aquest cas, les lletres es denominen *incògnites*. Així, per exemple, són equacions:

$$4a - b + c = 3a - 6b + 7$$

$$2x + 2y + 8 = 2x + 7$$

En el primer cas, les incògnites són a , b i c; en el segon cas, x i y. Cada un dels sumands de cadascun dels membres es denomina *terme*; el nombre que multiplica cada terme es denomina *coeficient*; un terme que no conté cap incògnita es denomina *terme numèric* o *terme independent.*
Les incògnites de cada membre d'una equació es poden substituir per valors numèrics. Per exemple, en l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ poden substituir-se la x per 1, i la y per 5:

$$2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} + 4 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{5} - 5 = 4 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} - 5 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{5}$$

D'aquesta manera, l'equació es transforma en una igualtat entre expressions numèriques. En aquest cas, la igualtat numèrica resultant és falsa perquè el membre de l'esquerra resulta 17, mentre que el de la dreta resulta –21.
Aquest procés també es denomina *substitució de les incògnites d'una equació per nombres* i, com s'ha vist, pot donar lloc a una igualtat numèrica certa o falsa.
Quan substituïm les incògnites d'una equació per certs valors, les igualtats numèriques resultants poden ser:

- Falses, com en l'últim exemple.

- Certes. Per exemple, si se substitueixen les incògnites de $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$, per 2 en el cas de la x, i per 1 en el cas de la y, obtindrem:

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1.$$

i ambdós membres resulten 3. Així, doncs, es tracta d'una igualtat numèrica certa. En aquest cas es diu que s'ha trobat una solució de l'equació. Així, aquesta solució de l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ es compon del canvi de la x per 2, i de la y per 1; dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de l'equació anterior. S'ha de tenir en compte que:

- Una solució d'una equació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.

- Una equació pot tenir més d'una solució. Per exemple, en el cas de l'equació anterior, $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$, una altra solució podria ser $x = 11$ i $y = 3$, ja que $2 \cdot 11 + 4 \cdot 3 - 5 = 4 \cdot 11 - 5 \cdot 3$.

Què són les equacions equivalents, i com es poden trobar equacions equivalents d'una altra?

> Dues (o més) equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions. Tot i que no és sempre senzill determinar si dues equacions són equivalents, es pot trobar de manera senzilla l'equació equivalent d'una altra; només cal sumar, restar, multiplicar o dividir ambdós membres d'aquesta equació per un mateix nombre. Aquesta manipulació d'una equació permet trobar-ne les solucions.

Dues equacions que tenen les mateixes solucions es denominen *equivalents*. Per exemple, les equacions:

$$7x - 3 = 6x - 4 \qquad\qquad 14x - 6 = 12x - 8.$$

són equivalents, ja que l'única solució en ambdós casos és $x = -1$. Vegem-ho:

$7 \cdot (-1) -3 = 6 \cdot (-1) - 4$ el resultat en ambdós membres és -10.

$14 \cdot (-1) - 6 = 12 \cdot (-1) - 8$ el resultat en ambdós membres és -20.

Per tant, $x = -1$ resol ambdues equacions, cosa que confirma que són equacions equivalents.

No sempre resulta fàcil trobar un procediment per a determinar si dues equacions són equivalents. En tot cas, és interessant saber com es pot transformar una equació per a obtenir-ne una altra que sigui equivalent, perquè és una de les manipulacions que permeten trobar solucions d'una equació. Aquests són els procediments usuals:

- Sumant o restant a ambdós membres el mateix nombre.

Per exemple, si a l'equació $7x - 3 = 6x - 4$ se li resta 2 a banda i banda, l'equació resultant és:

$$7x - 3 \mathbf{- 2} = 6x - 4 \mathbf{- 2.}$$

s'obté:

$$7x - 5 = 6x - 6.$$

i es pot comprovar fàcilment que la solució en ambdós casos és $x = -1$, per la qual cosa es pot afirmar que $7x - 3 = 6x - 4$ i $7x - 5 = 6x - 6$ són equacions equivalents.

- Multiplicant o dividint ambdós membres pel mateix nombre.

Per exemple, si els membres de l'equació $7x - 3 = 6x - 4$ es multipliquen per 3 s'obté:

$$3 \cdot (7x - 3) = 3 \cdot (6x - 4)$$

és a dir:

$$21x - 9 = 18x - 12$$

i es pot comprovar de manera fàcil que ambdues equacions tenen per solució $x = -1$. És a dir, $7x - 3 = 6x - 4$ i $21x - 9 = 18x - 12$ són equacions equivalents.

És evident que restant (o dividint) ambdós membres d'una equació amb el mateix nombre, s'obtindrà una equació equivalent a la primera. Per exemple, si es resta 5 a ambdós membres de l'equació $7x - 3 = 6x - 4$, s'obté:

$$7x - 3 - 5 = 6x - 4 - 5$$

$$7x - 8 = 6x - 9$$

Així, doncs, $7x - 3 = 6x - 4$ i $7x - 8 = 6x - 9$ són equacions equivalents.

De la mateixa manera, si ambdós membres de l'equació $8x - 4 = 6x - 10$ es divideixen entre 2, l'equació resultant és equivalent:

$$\frac{8x-4}{2} = \frac{6x-10}{2}$$

$$4x - 2 = 3x - 5$$

És a dir, $4x - 2 = 3x - 5$ és equivalent de $8x - 4 = 6x - 10$.

En què consisteix la resolució d'una equació?

> La resolució d'una equació consisteix en la recerca de totes les solucions d'una equació. La dificultat en la resolució depèn de molts factors, entre ells: el nombre d'incògnites i el grau de l'equació. De vegades, només és possible trobar una aproximació d'alguna de les solucions; en aquest cas es diu que s'ha trobat una *solució numèrica* de l'equació.

La recerca de les solucions d'una equació es denomina *resolució d'una equació*, i sol ser un problema matemàtic no sempre fàcil d'abordar. En tot cas, un cert tipus d'equacions, amb unes característiques molt concretes, tenen una resolució relativament senzilla i metòdica. Les característiques que determinen la dificultat en la resolució d'una equació són:

- El nombre d'incògnites de l'equació; com més petit és el nombre d'incògnites, més senzilla en resulta la resolució. Així, les més usuals tenen 1, 2 o, com a molt, 3 incògnites, encara que si no es diu explícitament el contrari, el terme *equació* designa les equacions amb un sola incògnita.

- El grau de l'equació: cada terme d'una equació té diverses incògnites multiplicant-se; aquest nombre és el *grau* del terme. Per exemple, el terme $2xy^2$ té 3 incògnites multiplicant-se (una "x" i dues "y"); per tant, el seu grau és 3. El grau d'una equació és el màxim grau dels termes que formen l'equació. Així, per exemple, el grau de

$$3xy - 2a + 5x^2y^2 = x + 11a^2x$$

és igual a 4, ja que el terme amb més incògnites és $5x^2y^2$, i en té 4 (dues x, i dues y). Es pot dir, en general, que com més petit és el grau d'una equació, més senzill és resoldre-la.

La complexitat d'una equació pot impedir-ne la resolució exacta. En aquests casos es pot intentar la resolució numèrica, és a dir, la resolució amb valors aproximats. Per exemple, l'equació $x^3 - 3x + 2 = x - 5$ no és una equació senzilla de resoldre de manera exacta. Una solució numèrica d'aquesta equació pot ser $x = -2{,}5891$, ja que substituint en l'equació s'obté:

$$(-2{,}5891)^3 - 3(-2{,}5891) + 2 = (-2{,}5891) - 5$$

$$-7{,}5886 \approx -7{,}5891$$

és a dir, els resultats són molt pròxims. Per això, es tracta d'una solució numèrica.

La recerca de solucions numèriques d'una equació és un dels problemes matemàtics que ha experimentat un gran avanç, a causa de la utilització cada vegada més generalitzada de potents ordinadors que permeten fer una gran quantitat de càlculs en poc temps.

Equacions de primer i segon grau

Les equacions de primer i segon grau

<table>
<tr><th colspan="6">Equacions de primer grau amb una incògnita</th></tr>
<tr><td colspan="6">Exemple</td></tr>
<tr><td colspan="6">$3x - 5 = x + 5$ és una equació de primer grau amb una incògnita:</td></tr>
<tr><td colspan="2">és una equació perquè és una igualtat entre expressions algebraiques.</td><td colspan="2">té una incògnita, que és la x.</td><td colspan="2">és de primer grau perquè la incògnita x no es multiplica mai per cap altra incògnita, inclosa ella mateixa.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Elements d’una equació</td></tr>
<tr><td colspan="2">Terme</td><td colspan="4">Cadascun dels sumands de l’equació.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coeficient de la incògnita</td><td colspan="4">El nombre que multiplica a la incògnita.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Terme numèric</td><td colspan="4">Terme que no conté incògnita.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Resolució de $3x - 5 = x + 5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Agrupar termes numèrics</td><td colspan="3">$3x = x + 5 + 5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Agrupar termes amb incògnita</td><td colspan="3">$3x - x = 10$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Eliminar el coeficient de la incògnita</td><td colspan="3">$x = 10/2 = 5$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Forma normal d’una equació de primer grau amb una incògnita</td></tr>
<tr><td colspan="6">Equació equivalent el membre de la dreta de la qual és zero, i el de l’esquerra està completament simplificat. Exemple: la forma normal de $3x - 5 = 2x + 4$ és $x - 9 = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Solució d’una equació de primer grau en forma normal</td></tr>
<tr><td colspan="6">Si $ax + b = 0$ és l’equació en forma normal, la solució és $x = -b/a$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">No existeix</td><td colspan="4">Si el coeficient de la incògnita és igual a 0, i el terme numèric no és 0: $a = 0$, $b \neq 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Existeix</td><td colspan="4">Si el coeficient de la incògnita és diferent de 0: $a \neq 0$, existeix una sola $x = b/a$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Si $a = 0$ i $b = 0$, qualsevol nombre és solució de l’equació.</td></tr>
</table>

Les equacions de segon grau amb una incògnita

Concepte	Tenen una única incògnita, un terme de grau 2 i altres termes de grau menor.	L'equació $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ és una equació de segon grau amb una incògnita.
	La forma normal d'una equació de segon grau: • El membre de la dreta és 0. • El membre de l'esquerra té un terme de grau 2, i termes de grau menor.	La forma normal de l'equació anterior és: $x^2 + 3x + 2 = 0$
Elements d'una equació de segon grau en forma normal	Terme: cadascun dels sumands del membre de l'esquerra.	Els termes de l'equació anterior són: x^2, $3x$ i 2.
	Coeficient de grau 2: nombre que multiplica el terme de grau 2.	El coeficient del terme de grau 2 és 1.
	Coeficient de grau 1: nombre que multiplica el terme de grau 1.	El coeficient del terme de grau és 3.
	Terme independent: nombre que no multiplica la incògnita.	El terme independent és 2.

La resolució d'una equació de segon grau

La fórmula per a la resolució de l'equació en forma normal

Elements de la fórmula	El coeficient del terme de grau 2 es denomina *a*	$a = 1$
	El coeficient del terme de grau 1 es denomina *b*.	$b = 3$
	El terme independent es denomina *c*.	$c = 2$
La fórmula	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ el signe ± (més-menys) permet abreujar l'expressió de les dues solucions possibles.	$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$ és a dir, les solucions són –1 i –2.
	El discriminant és $\Delta = b^2 - 4ac$	El discriminant és $3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Nombre de solucions d'una equació de segon grau

Si el discriminant és positiu, l'equació té dues solucions.	L'equació $2x^2 + 3x - 4 = 0$ té dues solucions, ja que $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41$ és positiu.
Si el discriminant és 0 , l'equació té una única solució, denominada *solució doble.*	L'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.
Si el discriminant és negatiu, l'equació no té cap solució real.	L'equació $3x^2 - 4x + 5 = 0$ no té cap solució, ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -46$ és negatiu.

Què és una equació de primer grau, quantes solucions pot tenir i de quin tipus són?

> Una equació de primer grau amb una incògnita és una equació amb una única incògnita que apareix amb exponent 1. Una equació de primer grau té, en general, una única solució que és un nombre real.

Com és sabut, una equació de primer grau, o lineal, amb una incògnita és una equació amb una única incògnita que apareix amb exponent 1. Per exemple, una equació de primer grau (amb una incògnita) és:

$$3x - 2 = 5x + 6$$

Pel que fa al tipus de solució, si n'hi ha, pot ser un nombre natural, enter, racional o real. Així, per exemple:

$x = -1$ és la solució de l'equació $1 - x = 2x + 4$

$x = 3/4$ és la solució de l'equació $2 - 3x = x - 1$

Pel que fa a les solucions, una equació lineal amb una incògnita pot:

- No tenir cap solució. Per exemple, $5x - 7 = 5x + 12$ no té solució. Aquests casos són igualtats algebraiques falses.
- Tenir solució. En aquest cas es poden donar dues possibilitats:
  - Qualsevol nombre és solució de l'equació. Per exemple, l'equació $5x - 3 = 5x - 3$ té com a solució qualsevol nombre. Es tracta, en aquests casos, d'igualtats algebraiques certes.
  - Hi ha una única solució. Per exemple, l'equació $2x - 1 = 3x + 4$ només té una solució, que és $x = -5$.

La major part d'equacions de primer grau i, és clar, les més interessants, són d'aquest últim tipus. La resolució d'una equació de primer grau s'haurà assolit quan es trobi aquesta única solució.

Què s'ha de fer abans de resoldre una equació de primer grau amb una incògnita?

> Abans de resoldre una equació, aquesta s'ha de simplificar al màxim, agrupant en cada membre els termes. Si l'equació conté denominadors, és molt recomanable buscar una equació equivalent que no en tingui.

Abans de començar a resoldre una equació, s'ha de simplificar al màxim, és a dir, s'ha de reduir cada membre a una expressió amb un únic terme numèric, i un únic terme de grau 1. Per exemple, si s'ha de resoldre l'equació:

$$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$$

en primer lloc, s'han de simplificar ambdós membres: el de l'esquerra quedaria com a $2x + 2$; el de la dreta, $8 + 5x$. Així, doncs, l'equació es convertiria en:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

En els casos en què l'equació conté nombres fraccionaris, convé (tot i que no és imprescindible), o bé utilitzar els nombres decimals equivalents, o bé transformar l'equació en una altra d'equivalent que no contingui denominadors. Per exemple, per a eliminar el denominador de l'equació $\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$, es pot seguir aquest procediment:

1. Es busca el mcm dels denominadors. En el cas de l'exemple, mcm(5,3) = 15.
2. S'escriu el mateix denominador en tots els termes, dividint el mcm entre el denominador que tenen (si no en tenen, és sabut que aquest és igual a 1) i

multiplicant el resultat pel numerador.
En l'exemple, l'equació anterior s'escriuria:

$$\frac{9x}{15}-\frac{10}{15}=\frac{60x}{15}-\frac{5}{15} \text{ , és a dir, } \frac{9x-10}{15}=\frac{60x-5}{15}$$

3. S'elimina el denominador d'ambdós membres, (multiplicant-los per aquest mateix denominador). D'aquesta manera, queda una equació equivalent sense denominadors.
En l'exemple, es multipliquen els dos membres per 15:

$$15\cdot\frac{9x-10}{15}=15\cdot\frac{60x-5}{15} \text{, per tant, } 9x-10=60x-5$$

aquesta última ja és una equació sense denominadors.

Quins són els passos de la resolució d'una equació de primer grau?

> Els passos per a la resolució d'una equació de primer grau són, fonamentalment, tres: l'agrupació de termes numèrics, l'agrupació de termes de grau 1 i l'eliminació del coeficient de la incògnita.

La resolució d'una equació de primer grau consta de diversos passos. Aquests passos es fan amb l'objectiu de convertir l'equació inicial en una equació equivalent, però més senzilla de resoldre. Si aquest procés es repeteix, al final s'obtindrà una equació de resolució immediata. Com que totes les equacions són equivalents, la solució obtinguda també ho serà de l'equació plantejada inicialment.

- El primer pas de la resolució d'una equació de primer grau consisteix a agrupar tots els termes numèrics que hi apareixen. Normalment, se solen agrupar en el membre de la dreta. D'aquesta manera, només quedarà un terme numèric en l'equació.

El procediment és senzill: s'ha de restar a ambdós membres el terme numèric de l'esquerra, de manera que l'equació resultant serà equivalent de la inicial. Agafem un exemple anterior:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

el terme numèric de l'esquerra és 2; el restem en ambdós membres:

$$2x + 2 \mathbf{- 2} = 8 + 5x \mathbf{- 2.}$$

que, una vegada simplificada, es transforma en:

$$2x = 6 + 5x$$

una equació més senzilla que la inicial perquè el membre de l'esquerra no té terme numèric. En tot cas, és una equació equivalent a $2x + 2 = 8 + 5x$.

> De vegades, aquest pas se'l coneix amb l'expressió *passar el terme numèric a l'altre membre, restant*. Això és així perquè sembla que aquesta sigui la transformació que es fa:
>
> $2x + 2 = 8 + 5x - 2.$
>
> Encara que aquesta afirmació sigui falsa, és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas; en tot cas, és convenient no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

- El segon pas de la resolució consisteix a agrupar els termes amb incògnita. Habitualment, s'agrupen els termes amb incògnita en el membre de l'esquerra.

El procés és similar al que agrupa el terme numèric: s'ha de restar a banda i banda el terme de grau 1 del membre de la dreta. D'aquesta manera s'obtindrà una equació equivalent més senzilla. En l'exemple, el terme de grau 1 del membre de la dreta de l'equació $2x = 6 + 5x$ és $5x$. Es resta, doncs, a ambdós membres:

$$2x \mathbf{- 5x} = 6 + 5x \mathbf{- 5x}$$

> De vegades, aquest pas es coneix com *passar el terme de grau 1 a l'altre membre, restant*. Això és així perquè aparentment aquest és el procés que se segueix:
>
> $2x - 5x = 6 + 5x$
>
> Encara que aquesta afirmació no sigui certa, és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas; en qualsevol cas, és convenient no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

que es pot simplificar així:

$$-3x = 6.$$

En aquest pas es pot esbrinar si l'equació té solució o no en té:

- Si el coeficient de la incògnita és el mateix en tots dos membres:
  - No hi ha solució si el terme numèric no és 0. Per exemple, en l'equació:

    $$3x = 3x - 2$$

    després de fer aquest pas quedaria:

    $$0 = -2$$

    igualtat falsa i, per tant, l'equació no té solució.
  - En canvi, si el terme numèric és 0, qualsevol nombre és solució de l'equació. Per exemple, en l'equació:

    $$8x = 8x$$

    és senzill adonar-se que qualsevol nombre que substitueixi la x és solució de l'equació perquè es tracta d'una igualtat algebraica certa.
- En cas contrari, l'equació té una única solució.

- L'últim pas de la resolució d'una equació de primer grau consisteix a "eliminar" el coeficients de la incògnita, perquè aquesta quedi sola o aïllada en el membre de l'esquerra.

> Aquest últim pas també se sol descriure com *passar el coeficient de la x a l'altre membre*. Això és així perquè, aparentment, aquest és el procés que se segueix:
>
> $$-3 \; x = \frac{6}{-3}$$
>
> Aquesta afirmació és, evidentment, incorrecta; en qualsevol cas, és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas (encara que és convenient no oblidar l'autèntic procés que té lloc).

El procediment és, també, senzill: es tracta de dividir ambdós membres de l'equació entre el coeficient del terme de grau 1 del membre de l'esquerra. Per exemple, en el cas anterior, el coeficient de grau 1 del membre de l'esquerra de l'equació $-3x = 6$ és -3. Si dividim ambdós membres entre aquest nombre el resultat és:

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{6}{-3}$$

és a dir,

$$x = -2$$

és evident, doncs, que la solució de l'equació plantejada inicialment és -2, ja que les equacions intermèdies que s'han anat obtenint són totes elles equivalents:

$$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$$

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

$$2x = 6 + 5x$$

$$-3x = 6$$

$$x = -2.$$

la comprovació és ben senzilla: només cal substituir la x de l'equació inicial per -2:

$$4 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot (-2) - 1 = 10 + 6 \cdot (-2) - 2 - (-2)$$

en tots dos membres el resultat és -2.

Així, doncs, el procés de resolució d'una equació de primer grau consisteix, fonamentalment, a aïllar la incògnita en un dels membres de l'equació; en l'altre membre apareix la solució de l'equació.

Què significa aïllar la incògnita d'una equació de primer grau?

> El procés pel qual la incògnita d'una equació de primer grau (o de grau més gran) queda en solitari en un dels membres s'anomena *aïllar la incògnita de l'equació*; aquest procés és a la base de la resolució d'una equació de primer grau.

El procés de solució d'una equació de primer grau (però, també, de grau superior) es pot denominar aïllar la incògnita de l'equació, i consta de tres passos principals, una vegada simplificats els membres de l'equació. Per exemple, si es vol resoldre l'equació $2x - 4 = 14 - 4x$, s'ha de procedir així:

1. S'agrupen els termes numèrics:

$$2x - 4 - (-4) = 14 - 4x - (-4)$$

és a dir

$$2x = 18 - 4x$$

2. S'agrupen els termes de grau 1:

$$2x - (-4x) = 18 - 4x - (-4x)$$

és a dir

$$6x = 18$$

3. S'elimina el coeficient de la x:

$$\frac{6x}{6} = \frac{18}{6}$$

és a dir

$$x = 3$$

La solució, després d'aïllar la incògnita, és $x = 3$.

Existeix una fórmula per a trobar la solució d'una equació de primer grau?

> La manera més senzilla de trobar la solució d'una equació de primer grau és transformar-la en una equació del tipus $ax + b = 0$ ($a \neq 0$), ja que la fórmula de la solució d'aquesta equació és $x = -b/a$.

La solució d'una equació de primer grau es pot obtenir, també, a partir d'una fórmula senzilla, que es dedueix dels passos proporcionats anteriorment. Per a això, en primer lloc, s'ha de convertir en una equació equivalent, el membre de la dreta de la qual sigui 0. Per exemple, l'equació, $4x - 3 = 2x + 5$ és equivalent de $2x - 8 = 0$. La solució d'aquesta equació, evidentment, és el terme numèric canviat de signe, dividit entre el coeficient de la incògnita; en l'exemple, la solució és $x = 8/2 = 4$.

Per a generalitzar aquest fet, una equació de primer grau es pot escriure sempre d'aquesta manera, anomenada *forma normal*:

$$ax + b = 0$$

De manera que a és el coeficient de la incògnita (que no pot ser 0), b és el terme numèric i, evidentment, x és la incògnita. D'aquesta manera, la solució d'una equació d'aquest tipus és:

$$x = -\,b/a.$$

Per exemple,

la solució de l'equació	$3x - 5 = 0$	és	$x = 5/3$
la solució de l'equació	$2x + 5 = 0$	és	$x = -5/2$
la solució de l'equació	$-3x - 1/2 = 0$	és	$x = -1/6$

Com s'expressa una equació de segon grau amb una incògnita en forma normal?

> Per a trobar la forma normal d'una equació de segon grau s'ha de transformar en una equació equivalent del tipus $ax^2 + bx + c = 0$, essent mcd(a , b, c) = 1.

Una equació de segon grau amb una incògnita ha de contenir termes de segon grau, a més de termes numèrics i termes de primer grau. Per exemple, són equacions de segon grau:

$$3x^2 + 6x - 4 = 2x + 5$$
$$2x^2 - 4x + 5 = 3x^2 - 5x + 4.$$

Per a trobar la solució d'una equació de segon grau, aquesta s'ha d'expressar, primer, en forma normal. Per a trobar una forma normal d'una equació de segon grau, el membre de la dreta ha de ser igual a 0; també és convenient que el coeficient de grau 2 sigui positiu (en tot cas, això no és imprescindible). Així, per exemple, la forma normal de $x^2 + 4x - 5 = 3x^2 - 6x + 7$ és:

$$x^2 + 4x - 5 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$$

i, simplificant,

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0$$

Si es vol que el coeficient de la x^2 no sigui negatiu, només s'han de multiplicar ambdós membres per -1, amb la qual cosa obtindrem una equació equivalent:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

També es pot simplificar més dividint tots els coeficients pel mcd de tots ells. En aquest cas, el mcd(2, −10,12) = 2. Per tant, els coeficients de l'equació anterior es poden dividir entre 2:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Quines són les equacions de segon grau fàcils de resoldre?

> Resulten fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau el coeficient de grau 1 de les quals és 0, o bé és 0 el terme independent. Una equació de segon grau sense terme independent, és a dir, del tipus $ax^2 + bx = 0$, té com a solució el 0 i un altre nombre, $-b/a$. Les solucions d'una equació de segon grau del tipus $ax^2 + c = 0$ són $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, sempre que $-c/a$ sigui un nombre positiu.

Són fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau el coeficient de grau 1 de les quals és 0, o bé, és 0 el terme independent. Per exemple:

- $3x^2 - x = 0$ és una equació de segon grau sense terme independent. Per a resoldre-la tan sols és necessari observar que es pot extreure una x de factor comú:

  $$3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$$

  Per tant, la primera equació pot transformar-se en:

  $$x(3x - 1) = 0$$

  Es tracta d'un producte de nombres, x i $3x - 1$, que ha de ser 0. Per tant, algun d'ells ha de ser 0, és a dir:

  $$\begin{cases} x = 0 \\ \text{o be} \\ 3x - 1 = 0 \quad \text{és a dir, } x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

  Així, doncs, l'equació de segon grau $3x^2 - x = 0$ té com a solucions el 0 i

1/3. En general, tota equació de segon grau sense terme independent, és a dir, del tipus $ax^2 + bx = 0$, té com a solució el 0 i un altre nombre, $-b/a$.

- $2x^2 - 18 = 0$ és una equació de segon grau sense terme de grau 1. En aquest cas, s'ha d'aïllar la x^2, com si es tractés d'una equació de primer grau:

  $$x^2 = 18/2 = 9$$

  és a dir, les solucions són aquells nombres el quadrat dels quals sigui 9. És a dir, les solucions són 3 i -3 o, dit d'una altra manera, utilitzant el símbol $\pm$, les solucions són $x = \pm 3$.

  En general, les solucions d'una equació de segon grau del tipus $ax^2 + c = 0$ són $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, sempre que $-\frac{c}{a}$ sigui un nombre positiu (ja que no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui igual a un nombre negatiu).

Com es resol una equació de segon grau?

> Hi ha una fórmula per a trobar totes les solucions d'una equació de segon grau expressada en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$:
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
>
> el símbol $\pm$ indica que s'han de distingir dos casos: un en què es fa servir el + i l'altre, en el qual s'utilitza el $-$.

De manera general, una equació de segon grau en forma normal es pot escriure així:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

essent x la incògnita, a el coeficient de grau 2 (sempre diferent de 0), b el coeficient de grau 1 i c, el terme numèric. Les solucions d'aquesta equació es poden trobar d'aquesta manera:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ i } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalment s'utilitza aquesta fórmula general per a donar les solucions d'una equació de segon grau conjuntament:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en la qual el símbol $\pm$ significa que s'han de distingir dos casos: un en el qual s'utilitza el + i un altre en el qual s'utilitza el $-$, tal com es pot comprovar en les fórmules anteriors.

Així, per exemple, les solucions de l'equació $2x^2 - 10x + 12 = 0$ són, segons aquesta fórmula:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

és a dir, les solucions són $x = 3$ i $x = 2$, com es pot comprovar fàcilment.

Vegem que aquesta fórmula és correcta per a qualsevol equació de segon grau. Només cal substituir els valors en l'equació general. Per exemple: substituïm $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $ax^2 + bx + c = 0$:

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c=$$
$$=a\left(\frac{b^2+b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}\right)+b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+c=$$
$$=\frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c=$$
$$=\frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{2ac}{2a}=$$
$$=\frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}+2ac}{2a}=\frac{0}{2a}=0$$

En el cas de $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la comprovació és molt semblant.

Quantes solucions té una equació de segon grau?

> Una equació de segon grau en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$, té, pel cap alt, dues solucions. El nombre de solucions es pot determinar a partir del valor discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: si és positiu, té dues solucions; si és negatiu, cap, i si és 0, una única solució, denominada *solució doble.*

L'estudi de l'arrel quadrada que es troba en la fórmula de la solució d'una equació de segon grau proporciona el nombre de solucions de l'equació. L'expressió continguda dintre de l'arrel quadrada de la solució se l'anomena *discriminant*, i s'indica amb la lletra grega delta majúscula, Δ. Així, doncs, el discriminant de la solució d'una equació de segon grau és: $\Delta = b^2 - 4ac$.
Aquest element permetrà establir el nombre de solucions de qualsevol equació de segon grau:

- Si el discriminant és positiu, es pot assegurar que l'equació té dues solucions diferents, que s'obtenen aplicant la fórmula. Per exemple, l'equació $x^2 - 3x + 2 = 0$ té dues solucions perquè

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Les seves solucions són, aplicant la fórmula, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$, és a dir, són $x = 1$, $x = 2$.

- Si el discriminant és 0, es pot assegurar que l'equació té una única solució, denominada *solució doble*, que s'obté aplicant la fórmula. Per exemple, l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució perquè

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

En aquest cas, la solució és $x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$, és a dir, $x = 2$.

- Si el discriminant és negatiu, es pot assegurar que l'equació no té cap solució. Per exemple, l'equació $2x^2 - 3x + 5x = 0$ no té cap solució, ja que:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0.$$

En aquest cas, és impossible aplicar la fórmula perquè no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

Què són les equacions de tipus quadràtic i com es resolen?

> Una equació de tipus quadràtic és aquella que, en forma normal, té terme independent, un terme de grau qualsevol, i un altre terme el grau del qual és el doble de l'anterior. La resolució d'aquest tipus d'equacions és semblant a la d'una equació de segon grau, ja que l'expressió de l'equació és similar.

Hi ha equacions de grau major que dos que es poden resoldre amb l'ajuda de la fórmula per a les equacions de segon grau. Es tracta d'equacions que, en forma normal, tenen com a molt tres termes: el terme numèric, un terme de qualsevol grau, i altre terme de grau doble a l'anterior. Per exemple, equacions de tipus quadràtic són:

$$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0 \qquad 3x^{10} + x^5 - 15 = 0$$

Per a resoldre aquest tipus d'equacions només cal adonar-se que es poden reescriure d'aquesta altra forma:

$$4(x^4)^2 + 5x^4 + 10 = 0 \qquad 3(x^5)^2 + x^5 - 15 = 0$$

Observant aquestes equacions, es pot comprovar la seva gran semblança amb una equació de segon grau. L'única diferència és que se substitueix la incògnita per una potència d'aquesta incògnita. En tot cas, la fórmula ha de ser molt semblant a la fórmula de l'equació de segon grau.

El cas més senzill d'equació de tipus quadràtic és la denominada *equació biquadrada*, equació de quart grau que, en forma normal, només té els termes de grau 4, 2 i el terme independent. Per exemple:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

és una equació biquadrada. Reescrivint aquesta equació de manera que s'assembli a una equació de 2n grau, queda:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Si considerem que la incògnita d'aquesta equació és x^2, llavors la solució ve donada per:

$$x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2}$$

Per tant, $x^2 = 4$, o bé, $x^2 = 9$. Falta, ara, descobrir el valor de la x: en el primer cas, $x = \pm\sqrt{4}$, mentre que en el segon cas, $x = \pm\sqrt{9}$. És a dir, les solucions de l'equació biquadrada són 2, –2, 3 i –3, com es pot comprovar de manera senzilla. Es pot concloure que una equació biquadrada pot tenir des de cap fins a 4 solucions.

La resta d'equacions de tipus quadràtic es poden resoldre de manera semblant. Per exemple, $3x^8 - 6x^4 - 9 = 0$ es transforma en $3(x^4)^2 - 6x^4 - 9 = 0$, les solucions de la qual són de la forma:

$$x^4 = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3}$$ és a dir, $x^4 = 3$, o bé, $x^4 = -1$.

Per tant, en el primer cas, $x = \pm\sqrt[4]{3}$, mentre que en el segon cas, no hi ha solució, ja que no existeix cap nombre que elevat a 4 resulti –1. En definitiva, las solucions de l'equació anterior són $+\sqrt[4]{3}$ i $-\sqrt[4]{3}$.

En el cas de les equacions de tipus quadràtic, com a màxim tindran un nombre de solucions igual al grau de l'equació.

Què és una inequació i què és una solució d'una inequació?

> Una inequació és una desigualtat entre expressions algebraiques que, de manera semblant a l'equació, pot tenir solucions, complint aquestes que en substituir-les en la inequació, la desigualtat numèrica resultant és certa.

Una inequació és una desigualtat (el signe de la qual pot ser $<$, $>$, $\leq$ i $\geq$) entre expressions algebraiques. Per exemple, $3x - a < 2x - 1$ és una inequació. Com en el cas de les equacions, las incògnites de cada membre d'una inequació es poden substituir, també, per valors numèrics. Per exemple, en la inequació $2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$ es poden substituir la x per1, i la y, per 5:

$$2\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ x}}{1}+4\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ y}}{5}-5\geq 4\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ x}}{1}-5\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ y}}{5}$$

D'aquesta manera, la inequació es transforma en una desigualtat entre expressions numèriques. En cas que sigui certa, es diu que s'ha trobat una solució de la inequació. Així, una solució de la inequació $2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$ consisteix a substituir la x per 2 i la y per 1; dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de la inequació anterior. S'ha de tenir en compte que:

- Una solució d'una inequació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.
- Una inequació pot tenir més d'una solució. Per exemple, en el cas de la inequació anterior, $2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$, altra solució podria ser $x = 1$ i $y = 3$, ja que $2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5 \geq 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3$.

Dues inequacions que tenen les mateixes solucions es denominen *equivalents*. Es pot trobar una inequació equivalent a una altra utilitzant procediments similars als coneguts per a les equacions:

- Sumant o restant a ambdós membres el mateix nombre.
- Multiplicant o dividint ambdós membres pel mateix nombre (diferent de 0). En aquest cas, cal destacar que si el factor pel qual es multipliquen (o es divideixen) ambdós membres és negatiu, llavors el signe de la desigualtat canvia d'orientació (és a dir, $<$ es transforma en $>$, i $>$ es transforma en $<$). Per exemple, una inequació equivalent a l'equació $3x + 4 < 2 - x$, es pot obtenir multiplicant ambdós membres per –2, i és:

$-2 \cdot (3x + 4) > -2 \cdot (2 - x)$

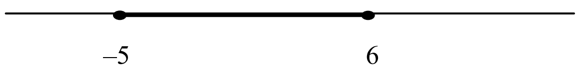
és a dir, $-6x - 8 > -4 + 2x$.

Això és així perquè és sabut que en multiplicar (o dividir) ambdós membres d'una desigualtat per un nombre negatiu, la desigualtat ha de canviar la seva orientació.

Què és un interval?

> Un interval és un segment de la recta real formada per un conjunt de nombres que són contigus, i és molt útil per a expressar la solució d'una inequació.

Un interval és el conjunt de tots els nombres més petits (o iguals) que un nombre donat, i més grans (o iguals) que un altre. Aquests dos nombres són els extrems de l'interval. Per exemple, els nombres compresos entre el –5 i el 6 formen un interval, els extrems del qual són el –5 i el 6. Aquest interval es pot representar en la recta real d'aquesta manera:



- En cada interval s'ha d'indicar si algun dels extrems està inclòs en l'interval en qüestió: si un extrem pertany a l'interval es denomina *interval tancat per aquest extrem* (i es denota amb un claudàtor); si un extrem no pertany a l'interval es denomina interval *obert per aquest extrem* (i es denota amb un parèntesi). Per exemple, l'interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta, d'extrems –5 i 6, s'escriu (–5,6], i la seva representació és (el punt ple indica que aquest valor pertany a l'interval, un punt blanc o la punta d'una fletxa indica que el valor no hi pertany):

De vegades, s'ha de representar un interval que té un extrem, però no l'altre; es fa servir el símbol ∞ (amb signe + o –), que es llegeix "infinit", per a expressar-lo: per exemple, tots els nombres reals fins el 5, el 5 inclòs, conformen l'interval $(-\infty, 5]$; tots els nombres més grans que –3, el –3 no inclòs, es representen amb l'interval $(-3, +\infty)$.

Com es resolen les inequacions de primer i segon grau?

> Per a resoldre inequacions de primer i segon grau amb una incògnita, primer s'han de resoldre les equacions associades, assenyalar les solucions en la recta real, i decidir quins intervals d'aquesta recta resolen l'equació en qüestió.

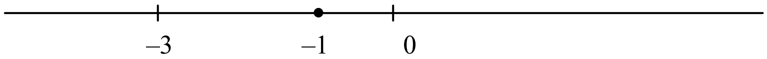
Per a resoldre una inequació de primer grau s'han de seguir aquests passos:

1) Es resol l'equació associada a la inequació lineal. L'equació associada a una inequació és aquella que s'obté canviant el signe de desigualtat pel signe igual. Per exemple, si es vol resoldre $2x + 5 \geq 2 - x$, hem de resoldre, en primer lloc, $2x + 5 = 2 - x$. És fàcil comprovar que la solució és $x = -1$. Així, aquesta solució divideix la recta real en tres zones: $(-\infty, -1)$, -1 i $(-1, +\infty)$. Els passos següents volen conèixer quines d'aquestes tres zones pertanyen a la solució de la inequació.

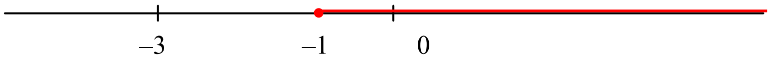
2) Es tria un nombre que es trobi dintre d'aquestes zones. En l'exemple, es poden triar aquests dos valors: –3 i 0.

3) Se substitueixen els valors anteriors (el de la solució de l'equació associada, i els del pas 2) a la inequació, i es comprova quin d'ells és solució. Per exemple:

- Si $x = –1$, la desigualtat resultant és certa: $2 \cdot (–1) + 5 \geq 2 – (–1)$ és cert.
- Si $x = –3$, la desigualtat resultant és falsa: $2 \cdot (–3) + 5 \geq 2 – (–3)$ és fals.
- Si $x = 0$, la desigualtat resultant és certa: $2 \cdot 0 + 5 \geq 2 – 0$ és cert.



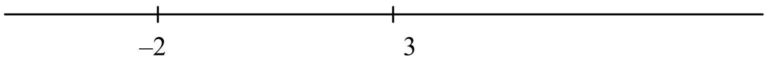
4) La solució de la inequació està formada pels nombres que es troben en la mateixa zona que les solucions del pas anterior. En l'exemple, les zones de solució són: –1 i $(-1,+\infty)$. És a dir, la solució és $[-1,+\infty)$.



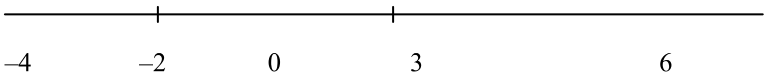
També es poden resoldre de manera similar inequacions de segon grau. Heus-ne aquí els passos:

1) Es resol l'equació associada a la inequació de 2n. grau. Per exemple, si la inequació és $2x^2 – 2x – 2 \leq x^2 – x + 4$, l'equació associada és $2x^2 – 2x – 2 = x^2 – x + 4$. Les seves solucions són $x = 3$, $x = –2$.

2) Es marquen en la recta real les solucions anteriors, que divideixen la recta real en diverses zones:



3) Se selecciona un nombre (qualsevol) de cadascuna de les zones:



4) Es comprova quin d'ells és una solució de la inequació:

–4	no és solució de	$2x^2 – 2x – 2 \leq x^2 – x + 4$
–2	és solució de	$2x^2 – 2x – 2 \leq x^2 – x + 4$
0	és solució de	$2x^2 – 2x – 2 \leq x^2 – x + 4$
3	és solució de	$2x^2 – 2x – 2 \leq x^2 – x + 4$
6	no és solució de	$2x^2 – 2x – 2 \leq x^2 – x + 4$.

5) La solució és igual a la reunió de totes les zones del pas anterior en les quals el nombre escollit era solució. Així, en l'exemple, la solució és l'interval $[–2,3]$.

En el cas de la inequació $2x^2 – 2x – 2 > x^2 – x + 4$, la seva solució estaria formada per tots els nombres de $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$. El símbol $\cup$ és el símbol de la unió de conjunts i indica que cal reunir tots els nombres d'un interval amb els de l'altre.

Sistemes d’equacions

Sistemes d’equacions

Resolució d’un sistema de dues equacions lineals	
Un sistema de dues equacions lineals és un conjunt de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna, representades per les mateixes lletres.	Exemple: $\begin{cases} 3x-6y=5 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$
La forma normal de un sistema d’equacions: els termes amb incògnita en el membre de l’esquerra i els termes numèrics, en el de la dreta.	
Una solució d’un sistema de dues equacions lineals és un parell de nombres que, substitueits per les incògnites de cadascuna de les equacions, converteixen el sistema en un parell d’igualtats certes.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ té la solució $x=2$ i $y=1$, ja que: $\begin{cases} 2+1=3 \\ 2\cdot 2-1=3 \end{cases}$
La resolució d’un sistema de equacions lineals és el procés de recerca de solucions del sistema.	

Els mètodes de resolució

El mètode de substitució

El procediment	Exemple: $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 2x+y=4 \end{cases}$
1. Es tria una de les dues equacions.	$2x + y = 4$
2. S’aïlla una de les incògnites de l’equació.	$y = 4 - 2x$
3. Se substitueix el valor de la incògnita en l’altra equació.	$4x - 2 \cdot \mathbf{(4 - 2x)} = 8$
4. Es resol l’equació resultant.	$4x - 8 + 4x = 8 \quad 8x - 8 = 8$ $8x - 8 + 8 = 8 + 8$ $8x = 16$ $8x/8 = 16/8$ $x = 2$
5. Se substitueix aquesta incògnita en l’equació del pas 2, pel valor trobat.	$y = 4 - 2 \cdot \mathbf{2}$ $y = 0$
	La solució és: $x = 2$ i $y = 0$
S’ha de comprovar la solució.	$4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8$, i $2 \cdot 2 + 0 = 4$

El mètode d’igualació

El procediment	Exemple: $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 2x+y=4 \end{cases}$
1. S’aïlla la mateixa incògnita en totes dues equacions.	$y=\dfrac{4x-8}{2}$ $y = 4 - 2x$
2. S’igualen les dues expressions resultants.	$\dfrac{4x-8}{2}=4-2x$
3. Es resol l’equació resultant.	$\dfrac{4x-8}{2}=4-2x$ mcm(2,1) = 2 $4x - 8 = 8 - 4x$ $4x + 4x = 8 + 8$ $8x = 16$ $x = 2$
4. Es substitueix la incògnita de qualsevol de les equacions del sistema del pas 1 pel valor trobat.	$y = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ per tant, $y = 0$
	La solució és: $x = 2$ i $y = 0$
5. S’ha de comprovar la solució.	$4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8$ i $2 \cdot 2 + 0 = 4$

Mètode de reducció

El procediment	Exemple: $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 2x+y=4 \end{cases}$
1. Es tria una de les dues incògnites.	es tria la y
2. Es multipliquen els dos membres de la primera equació pel coeficient de la incògnita escollida en la segona equació, i els dos membres de la segona equació pel coeficient de la incògnita escollida en la primera equació.	$1 \cdot (4x - 2y = 8)$ $-2 \cdot (2x + y = 4)$ per tant, $4x - 2y = 8$ $-4x - 2y = -8$
3. Es resten les dues equacions resultants.	$\begin{array}{rl} & 4x - 2y = 8 \\ - & \underline{-4x - 2y = -8} \\ & 8x \quad = 16 \end{array}$
4. Es resol l'equació resultant.	$x = 2$
5. Se substitueix el valor de la incògnita trobada en qualsevol de les equacions del sistema.	se substitueix $x = 2$ en l'equació $2x + y = 4$: $2 \cdot 2 + y = 4$
6. Es resol l'equació resultant.	$4 + y = 4$ $y = 0$
	La solució és: $x = 2$ i $y = 0$
S'ha de comprovar la solució.	$4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8$, $2 \cdot 2 + 0 = 4$

Resolució d'un sistema de diverses equacions lineals pel mètode de Gauss

1. Operant adequadament amb la primera equació, s'ha d'eliminar la primera incògnita de les altres equacions.	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-5y-2z=-2 \\ 3x+4y+z=8 \end{cases}$ se transforma en $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -7y-4z=-2 \\ y-2z=8 \end{cases}$
2. Operant adequadament amb la segona equació del nou sistema, s'ha d'eliminar la segona incògnita de les equacions següents.	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -7y-4z=-2 \\ y-2z=8 \end{cases}$ se transforma en $\xrightarrow[2^a+7\cdot 3^a]{}$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -7y-4z=-2 \\ -18z=54 \end{cases}$
3. Es fa la mateixa operació fins a exhaurir les equacions obtenint un sistema esglaonat.	
4 . Es resol l'última equació i se substitueixen *cap* enrere els valors.	$18z = 54$; $z = -54/18 = -3$ $-7y - 4 \cdot (-3) = -2$, $y = 2$ $x + 2 - 3 = 0$ $\quad x = 1$

Nombre de solucions d'un sistema

- El sistema no té cap solució quan apareix una fila amb tots els coeficients iguals a zero i amb la constant diferent de zero. Es diu que el sistema és *incompatible.*
- El sistema té solució en cas contrari i s'anomena *sistema compatible*, i pot ser:
  - Compatible determinat (la solució és única): si el nombre d'equacions resultants en el sistema esglaonat és igual al nombre d'incògnites.
  - Compatible indeterminat (infinites solucions): si el nombre d'equacions en el sistema esglaonat és menor que el nombre d'incògnites.

Què és un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites i quines són les seves solucions?

> Un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites és un grup de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna, les mateixes en tots dos casos. Una solució d'un sistema d'aquest tipus és un parell de valors que, en substituir les incògnites, condueix a igualtats numèriques certes.

Un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites és un grup de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna, representades amb les mateixes lletres. Per exemple, aquest és un sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Com es pot observar, per a indicar que es tracta d'un sistema d'equacions amb dues incògnites, i no de dues equacions independents, les dues equacions van encapçalades per una clau, {, que les agrupa.

És molt comú escriure les equacions de forma senzilla: totes les incògnites s'han de trobar en el membre de l'esquerra, mentre que tots els nombres s'han de trobar en el membre de la dreta. Si les equacions del sistema no estan expressades d'aquesta manera, convé transformar-les en d'altres d'equivalents que compleixin aquestes condicions.

Resoldre un sistema d'equacions significa trobar les solucions del sistema, és a dir, aquells nombres que, intercanviats amb les incògnites, transformin les equacions en igualtats numèriques certes. Cal destacar que els mateixos nombres han de substituir les incògnites en ambdues equacions. Per exemple, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

té com a solució $x = 5$ i $y = 3$, ja que

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 5 + 4 \cdot 3 = 17 \end{cases}$$

S'ha d'insistir que una solució d'un sistema amb dues incògnites ha de constar de dos nombres, un per a cada incògnita. En general, la major part de sistemes d'equacions tenen una única solució, però es poden donar altres casos:

- Un sistema amb moltíssimes solucions, per exemple $\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$, que té aquestes (i moltes altres) solucions: $x = 4$ i $y = 3$; $x = 2$ i $y = 4$; $x = 0$ i $y = 5$; etc.

- Un sistema sense solucions, per exemple $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$. En aquest cas, és fàcil comprovar que no és possible que la mateixa expressió pugui resultar igual a 8, en un cas, i igual a 1, en l'altre cas.

Per trobar la solució de sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites hi ha una sèrie de mètodes de resolució.

En què consisteix el mètode de substitució?

> El mètode de substitució consisteix a aïllar una de les incògnites d'una de les dues equacions i substituir el seu valor en l'altra equació. Una vegada resolta aquesta última (que només tindrà una única solució), es resol l'altra equació introduint aquest valor.

Consisteix a aïllar una de les incògnites en una de les dues equacions i *substituir* el seu valor en l'altra equació. Per exemple, per a resoldre el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de substitució, s'han de seguir aquests passos:

1. Es tria una de les equacions, per exemple, $x + 4y = -2$.
2. S'aïlla una de les incògnites d'aquesta equació. Per exemple, es pot aïllar la x, de la manera següent:
   $x + 4y - 4y = -2 - 4y$
   $x = -2 - 4y$
3. Se substitueix la incògnita anterior (la x) de l'altra equació ($2x - 3y = 7$) pel valor que hem trobat en aïllar ($-2 - 4y$). És a dir:
   $2(-2 - 4y) - 3y = 7$
4. Es resol aquesta equació de primer grau amb una incògnita. En l'exemple, la solució és $y = -1$.
5. Se substitueix aquest valor de la x en una de les dues equacions del sistema. Obtindrem una altra equació de primer grau amb una incògnita, que hauríem de resoldre. Per exemple, si se substitueix $x = -1$ en l'equació $x + 4y = -2$, l'equació resultant és $x + 4 \cdot (-1) = -2$, la solució de la qual és $x = 2$.

En definitiva, la solució del sistema és $x = 2$ i $y = -1$. Sempre és recomanable comprovar que realment aquests valors resolen el sistema d'equacions. Vegem-ho: $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$ és una igualtat certa; $2 + 4 \cdot (-1) = -2$ també és una igualtat certa. Així, doncs, $x = 2$ i $y = -1$ és la solució del sistema anterior.

En què consisteix el mètode d'igualació?

> El mètode d'igualació consisteix a aïllar la mateixa incògnita d'ambdues equacions i igualar els resultats obtinguts. Una vegada resolta aquesta equació, se'n pot substituir el valor en una de les equacions inicials i resoldre-la per a trobar l'altre valor.

El mètode d'igualació consisteix a aïllar la mateixa incògnita en ambdues equacions del sistema. A continuació, s'han d'"igualar" les dues expressions que resulten d'aïllar aquesta incògnita. Per exemple, si es vol resoldre el sistema anterior:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de igualació, s'han de seguir aquests passos:

2) S'aïlla la mateixa incògnita en ambdues equacions; en aquest cas, la x:

$$x = \frac{7 + 3y}{2} \qquad x = -2 - 4y$$

3) S'igualen les expressions que resulten d'aïllar la incògnita:

$$\frac{7 + 3y}{2} = -2 - 4y$$

4) Es resol aquesta equació de primer grau amb una incògnita. En l'exemple, la solució és $y = -1$, ja que
   $7 + 3y = 2(-2 - 4y)$
   $7 + 3y = - 4 - 8y$
   $3y = -4 - 8y - 7$
   $3y = -11 - 8y$
   $3y + 8y = -11$
   $11y = -11$
   $y = -1$

5) Se substitueix el valor d'aquesta incògnita en qualsevol de les equacions del sistema, i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita resultant. En l'exemple, substituïm la y de la segona equació per -1:

   $$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

   la solució d'aquesta equació és $x = 2$.

Així, doncs, la solució del sistema és, com sabíem, $x = 2$ i $y = -1$. Això confirma que el mètode que s'utilitza per a resoldre un sistema d'equacions no pot influir en la solució del sistema.

En què consisteix el mètode de reducció?

> El mètode de reducció consisteix a multiplicar convenientment ambdues equacions de manera que una vegada restades, desaparegui una de les incògnites. Una vegada resolta l'equació resultant, es pot substituir aquest valor en una de les equacions inicials i resoldre-la per a obtenir la solució general.

El mètode de reducció consisteix a multiplicar convenientment les dues equacions del sistema per un nombre, de manera que en restar les equacions resultants, es "redueixi" el nombre d'incògnites, de dues a una. Per exemple, si volem resoldre el mateix sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de reducció, s'han de seguir aquests passos:

1. Es tria una de les incògnites, per exemple la x.
2. Es multiplica cada equació (és a dir, els membres de cada equació) per un nombre, convenientment triat, de manera que les equacions resultants tinguin el terme amb la incògnita triada idèntic. La forma més senzilla consisteix a multiplicar els membres de la primera equació pel coeficient de la incògnita escollida en la segona equació, i els dos membres de la segona equació pel coeficient de la incògnita escollida en la primera equació. Per exemple, es multiplica $2x - 3y = 7$ per 1, ja que és el coeficient de la x en l'equació $x + 4y = -2$, i es multiplica $x + 4y = -2$ per 2, ja que és el coeficient de la x en l'equació $2x - 3y = 7$, amb la qual cosa s'obtenen les equacions:

   $$2x - 3y = 7$$
   $$2x + 8y = -4$$

   que tenen el mateix terme en x.

3. Es resten ambdues equacions resultants, membre a membre. En el nostre exemple:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 7 \\ \underline{-\,2x + 8y = -4} \\ -11y = 11 \end{array}$$

4. Es resol l'equació de primer grau resultant. En l'exemple, la solució de $-11y = 11$ és $y = -1$.

5. Se substitueix el valor d'aquesta incògnita en qualsevol de les equacions del sistema, i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita resultant. En l'exemple, substituïm la i de la segona equació per –1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

La solució d'aquesta equació és $x = 2$.

Com es podia esperar, també en aquest cas la solució del sistema continua essent la mateixa.

Com es resol un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites?

> La resolució d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites es basa en la resolució pel mètode de reducció. Consisteix a eliminar adequadament i progressivament incògnites de cadascuna de les equacions per a obtenir una equació amb una sola incògnita. A partir del valor d'aquesta incògnita, s'aniran trobant els valors de la resta d'incògnites.

La solució d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites consta de tres nombres que, substituïts per les incògnites corresponents, permeten resoldre el sistema. Per exemple, $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$ són solució del sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

ja que:

$$\begin{cases} 1 + 2 + (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = -2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-3) = 8 \end{cases}$$

Per a resoldre un sistema d'aquest tipus, s'ha d'utilitzar un mètode semblant al de reducció, operant de la manera següent:

1. Operant adequadament amb la primera equació, s'ha d'eliminar la primera incògnita de les dues equacions següents:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases} \text{ es transforma en } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases}$$

multiplicant la primera equació per 2 i restant-la de la segona s'obté, efectivament, $-7y - 4z = -2$; multiplicant la primera equació per 3 i restant-la de la tercera s'obté, efectivament, $y - 2z = 8$. Evidentment, ambdós sistemes són equivalents.

2. Operant adequadament amb la segona equació del nou sistema, s'ha d'eliminar la segona incògnita de la tercera equació:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases} \text{ es transforma en } \xrightarrow[2.^a + 7 \cdot 3.^a]{} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ -18z = 54 \end{cases}$$

Per a trobar la nova 3a. equació, s'ha multiplicat la tercera equació per 7, i s'ha sumat a la segona (és a dir, 2a. + 7 · 3a.). Observem que en l'última equació queda ara una sola incògnita.

3. Resolem l'última equació $-18z = 54$; $z = -54/18 = -3$.
4. Resolem la segona equació de l'últim sistema, substituint la z pel valor trobat -3

$$-7y - 4 \cdot (-3) = -2$$

En aquest cas, $y = 2$.

5. Finalment, substituïm els valors trobats de la y i la z en la primera equació, i trobem la x.

$$x + 2 - 3 = 0$$

En aquest cas, $x = 1$.

Aquest mètode es pot generalitzar per a sistemes de qualsevol nombre d'equacions lineals i incògnites, i aleshores es denomina *mètode de Gauss.*

Com es transforma un sistema d'equacions lineals pel mètode de Gauss?

> La transformació d'un sistema d'equacions lineals pel mètode de Gauss és molt semblant a la transformació de sistemes de tres equacions lineals amb tres incògnites; consisteix a eliminar adequadament i progressivament incògnites de cadascuna de les equacions per a obtenir una última equació amb el mínim nombre d'incògnites possible.

Un sistema de m equacions i n incògnites (que denominarem $x_1, x_2 \ldots x_n$), amb termes independents $b_1 \ldots b_n$, denominats també *constants,* i essent $m > 0$ i $n > 0$, té la forma següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Com en la resta de sistemes, una solució d'aquest sistema és un n-tupla (és a dir, una col·lecció de n nombres), que en substituir convenientment en aquest sistema $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, resol totes les equacions simultàniament. És evident que algun dels coeficients de cada incògnita ha de ser diferent de 0 (en cas contrari, aquesta incògnita seria supèrflua). Altres consideracions útils per a aplicar el mètode de Gauss són:

- Dues equacions qualssevol són intercanviables.
- Una equació qualsevol del sistema es pot multiplicar (en ambdós membres) per una constant diferent de zero.
- Una equació qualsevol del sistema es pot reemplaçar per l'equació que resulta de sumar a aquesta mateixa equació qualsevol altra equació del sistema, la qual a més es pot multiplicar per qualsevol nombre.

Aquestes tres operacions elementals se solen denominar: intercanviar equacions, reescalar (és a dir, multiplicar per un nombre) i pivotar.

En cada una de les files del sistema lineal, la primera incògnita que apareix amb un coeficient diferent de zero es denomina *incògnita inicial de la fila*. Es diu que un sistema està en forma esglaonada si la incògnita inicial en cada fila (òbviament, excepte en la primera) es troba a la dreta de la incògnita inicial de la fila que la precedeix, de la manera següent (per a simplificar, en aquest cas, tenim el mateix nombre d'equacions que d'incògnites, $m = n$):

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + \dots + a_{1(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\
0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + \dots + a_{2(n-1)}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\
0 + 0 + a_{33}x_3 + \dots + \dots + a_{3(n-1)}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3 \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + \dots\dots + \dots\dots = \,.. \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + \dots\dots + \dots\dots = \,.. \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1} \\
0 + 0 + 0 + \dots + \dots + 0 + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}$$

El mètode de Gauss consisteix a utilitzar les tres operacions elementals entre equacions (intercanviar, reescalar i pivotar) per a trobar un sistema equivalent en forma esglaonada. Per a aconseguir-ho, es comença repassant tots els coeficients de x_1 (a_{11}, a_{21} ... a_{m1}), fins a trobar el primer coeficient que sigui diferent de zero. Aquest coeficient podria ser el mateix a_{11}. Si no és el primer, s'intercanvia l'equació amb la primera que tingui aquest terme. Considerem que un nou sistema té com coeficient a_{11} un nombre diferent de 0.

A continuació, mitjançant les operacions de reescalar i pivotar es fa que tots els coeficients que estiguin sota aquest nou a_{11} siguin zero. Així, si en l'equació que ocupa la fila k-èsima el seu primer coeficient a_{k1} és diferent de zero, es pivota multiplicant la primera fila per a_{k1}/a_{11}, i restant el resultat a la fila k-èsima. El resultat serà la nova fila k-èsima. El nou sistema serà:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \quad & a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
& \dots \\
& \dots \\
& a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m
\end{aligned}$$

Una vegada eliminats tots els coeficients de la primera incògnita, excepte el de la primera equació, es repeteix el mateix procés amb els coeficients de la segona incògnita, x_2, a partir de la segona equació.

A continuació, es fa el mateix procés amb la tercera incògnita, x_3, a partir de la tercera equació; i així successivament fins a arribar a l'última equació. Una vegada arribat al final del procés, el nombre d'equacions que no són del tipus 0 = 0 és igual a un cert nombre que denominarem r, essent $r \leq m$.

Com es pot conèixer el nombre de solucions d'un sistema d'equacions lineals transformat pel mètode de Gauss i com es troben?

> Una vegada simplificat al màxim el sistema d'equacions inicial pel mètode de Gauss, es pot saber si té o no solucions examinant les equacions resultants. Si un sistema d'equacions té solucions, es diu que és *compatible*; si no en té, es diu que és *incompatible.*

Una vegada finalitzat el procediment de Gauss, el sistema resultant s'haurà de trobar en una d'aquestes situacions:

- Que aparegui una fila amb tots els coeficients iguals a zero i amb la constant diferent de zero. En aquest cas el sistema no té cap solució; també es diu que el sistema és *incompatible.*

- Que no aparegui cap equació amb zeros, o que totes les files amb coeficients iguals a zero tinguin també constants iguals a zero (en aquest cas totes aquestes files són supèrflues i es poden eliminar). Si això és així, el sistema té solució: es diu en aquest cas que el sistema és *compatible*, i pot ser:
    - Compatible determinat (la solució és única): si el nombre r d'equacions resultants en el sistema esglaonat és igual a n.

- Compatible indeterminat (infinites solucions): si el nombre r d'equacions in el sistema esglaonat és menor que n.

Vegem com són les solucions en el cas de sistemes compatibles:
Cas 1: $r = n$
El sistema resultant en forma esglaonada, després d'utilitzar el mètode de Gauss, serà de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + \ldots + a_{1(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + \ldots + a_{2(n-1)}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0 + 0 + a_{33}x_3 + \ldots + \ldots + a_{3(n-1)}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3 \\ 0 + 0 + 0 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots \\ 0 + 0 + 0 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots \\ 0 + 0 + 0 + \ldots + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1} \\ 0 + 0 + 0 + \ldots + \ldots + 0 + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Per a trobar la solució única d'aquest sistema s'utilitza l'anomenada "substitució cap enrere" (un procés molt semblant s'ha fet en els sistemes de tres equacions lineals):

1. S'aïlla x_n, de l'última equació: $x_n = b_n/a_{nn}$.
2. Se substitueix aquest valor en l'equació anterior, i es troba el valor de x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

3. Se segueix el mateix procediment de substitució *cap* enrere, fins que s'han trobat els valors per a totes les incògnites.

Cas 2: $r < n$
El sistema d'equacions quedaria de la manera següent:

$$r < n \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots = b_2 \\ 0 + 0 + \ldots\ldots + \ldots = \\ 0 + 0 + \ldots\ldots + \ldots = \\ \\ 0 + 0 + \ldots\ldots + \ldots + a_{rn}x_r + a_{r(n+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Aquest sistema es pot reduir a un sistema amb tantes incògnites com files. Amb aquesta finalitat es passen totes les incògnites a partir de x_{r+1} a l'altre membre (un total de $n - r$ incògnites), de manera que quedin les r primeres incògnites en el membre esquerre de les equacions. Les $n - r$ incògnites del membre de la dreta de les equacions es tractaran com si fossin valors coneguts (com els nombres b_i). D'aquesta manera, s'obté un sistema amb r equacions i r incògnites que, com és sabut, es resol amb el procés de substitució cap enrere.
Ara bé, s'obtindrà la solució per a les r primeres incògnites, que dependran del valor que tinguin les $n - r$ incògnites restants. Per això mateix, aquest tipus de sistemes té més d'una solució (de fet, té infinites solucions).

Com s'aplica el mètode de Gauss en un sistema d'equacions lineals compatible determinat?

> Un sistema és compatible determinat quan, una vegada transformat pel mètode de Gauss en un sistema esglaonat, el nombre d'incògnites resultant és igual al nombre d'equacions. Per a resoldre'l s'ha de fer servir la "substitució cap enrere".

Vegem com es resol el sistema següent pel mètode de Gauss:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

S'observa que la primera incògnita inicial és la *x* en la primera equació, ja que el seu coeficient és diferent de 0 (és 1). Pivotant en aquest element s'obté:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{2.^a - 2 \cdot 1.^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

ja només la primera equació té incògnita *x*; per tant, es passa a la incògnita *y*. La primera incògnita inicial que és *y* es troba a la 3a. equació (ja que a la 2a. equació no hi ha incògnita *y*). Així, doncs, s'han d'intercanviar les files:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{2.^a - 2 \cdot 1.^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{intercanvi } 2.^a/3.^a}$$

$$\xrightarrow{\text{intercanvi } 2.^a/3.^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

D'aquesta manera ja no hi ha més incògnites *y*; per tant, s'ha de passar a la incògnita següent, la *z*. La incògnita inicial de la 3a. equació és *z*; per tant, es pot mantenir a la seva posició, i servirà de pivot per a eliminar la incògnita *z* de l'última equació:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{2.^a - 2 \cdot 1.^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{intercanvi } 2.^a/3.^a}$$

$$\xrightarrow{\text{intercanvi } 2.^a/3.^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{4.^a - 2 \cdot 3.^a} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

S'ha arribat ja a l'última equació, i la situació és d'igual nombre d'incògnites que d'equacions. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat. S'aplica la substitució cap enrere a l'últim sistema per a resoldre'l: de l'última equació es dedueix que $w = 1$. Se substitueix aquest valor en l'equació anterior i es resol:

$$z + 2 \cdot 1 = 4 \quad \rightarrow \quad z = 4 - 2 = 2$$

Ara, se substitueixen $z = 2$ i $w = 1$ en l'equació anterior:

$$y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

Finalment, se substitueixen $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$:

$$x - (-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Per tant, la solució del sistema és: $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$.

Com s'aplica el mètode de Gauss en un sistema d'equacions lineals compatible indeterminat?

> Un sistema és compatible indeterminat quan, una vegada transformat pel mètode de Gauss en un sistema esglaonat, el nombre d'incògnites resultant és més gran que el nombre d'equacions. Per a resoldre'l, s'ha de modificar lleugerament el sistema i, posteriorment, utilitzar la "substitució cap enrere".

Vegem como es resol el sistema següent pel mètode de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases}$$

Per a obtenir la forma esglaonada es fa el següent:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow{3.^a - 3\cdot 1.^a} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ -3y + 3z - 3w = 3 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow[4.^a + 2.^a]{3.^a + 3\cdot 2.^a}$$

$$\xrightarrow[4.^a + 2.^a]{3.^a + 3\cdot 2.^a} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Eliminem les dues igualtats 0 = 0, ja que són supèrflues. El sistema esglaonat és:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \end{cases}$$

En aquest cas, $n = 4$ i $r = 2$; per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat. Per a poder utilitzar el procediment de substitució cap enrere, hi ha d'haver tantes incògnites com equacions; per això, movem les dues incògnites restants al membre de la dreta:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z + w \\ y = -1 + z - w \end{cases}$$

Ara ja podem resoldre el sistema. L'última equació ens dóna el valor de la y,

$$y = -1 + z - w$$

Si substituïm cap enrere el valor de la y en la primera equació:

$$x - 1 + z - w = 1 - z + w \quad \rightarrow \quad x = 2 - 2z + 2w$$

Així, les solucions són d'aquest tipus:

$$x = 2 - 2z + 2w$$
$$y = -1 + z - w$$

z i w poden ser qualsevol nombre. Per exemple, si $z = 0$ i $w = 0$, llavors $x = 2$ i $y = -1$. Per tant, una solució del sistema és: $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 0$.
Una altra solució es pot aconseguir fent $z = 1$ i $w = -2$; en aquest cas, $x = 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -4$ i $y = -1 + 1 - (-2) = 2$. És a dir, una altra solució del sistema és: $x = -4$, $y = 2$, $z = 1$, $w = -2$.
Així, doncs. per a cada parell de valors qualssevol z, w, podem aconseguir una solució del sistema. Es a dir, el sistema té infinites solucions.

Què és un sistema d'inequacions lineals amb una incògnita i com es resol?

> Un sistema d'inequacions lineals amb una incògnita està format per un conjunt d'inequacions lineals. Una solució d'un sistema d'aquest tipus és aquella que resol totes les equacions, i per a trobar-la cal resoldre cadascuna de les inequacions i buscar totes les solucions comunes.

Un sistema d'inequacions lineals amb una única incògnita està format per diverses inequacions lineals i limitat per una clau que indica precisament que es tracta d'un sistema, i no d'equacions independents. Per exemple, un sistema d'inequacions podria ser:

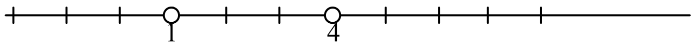
$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

Un nombre és solució d'un sistema d'inequacions d'aquest tipus si és solució de totes les inequacions que formen el sistema. Per exemple, $x = 3$ és una solució del sistema d'inequacions:

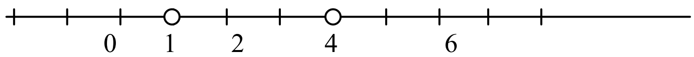
$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

ja que $3 \cdot 3 + 4 \leq 2 \cdot 3 + 8$ i, a més, $2 \cdot 3 - 1 > 2$.
El procediment per a trobar les solucions d'un sistema d'inequacions és molt semblant al de resolució d'una única inequació lineal. Els passos són els següents:

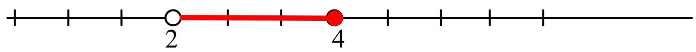
1. Es resolen les equacions associades a les inequacions del sistema. En l'exemple anterior, la solució de $3x + 4 = 2x + 8$ és $x = 4$; i la solució de $2x - 1 = x$ és $x = 1$.
2. Es marquen en la recta real les solucions anteriors; en l'exemple:



3. Se selecciona un nombre de cadascuna de les parts en les quals queda dividida la recta pels nombres anteriors. En l'exemple, es poden escollir els nombres 0, 2 i 6:



4. Es comprova quins d'aquests nombres són solució del sistema d'inequacions. En l'exemple, s'han de provar el 0, 1, 2, 4 i 6. És fàcil comprovar que únicament són solució del sistema el 2 i el 4.
5. Finalment, les solucions del sistema són els nombres que es troben en el mateix interval de la recta anterior que els punts de l'apartat 4. En l'exemple, els nombres que són solució del sistema es troben en la secció acolorida d'aquesta recta real:



Per tant, les solucions del sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

són tots els nombres més grans que 1 i menors o iguals a 4, o sigui, tots els nombres, x, que compleixen $1 < x \leq 4$. En forma d'interval, la solució s'expressaria de la manera següent: (1,4].

Què és un sistema d'inequacions de segon grau amb una incògnita i com es resol?

> Un sistema d'inequacions de segon grau amb una incògnita està format per diverses inequacions que poden ser tant de primer grau com de segon grau. Una solució d'un sistema d'aquest tipus, com el de qualsevol sistema d'inequacions, és aquella que resol totes les equacions, i per a trobar-la cal resoldre cadascuna de les inequacions i buscar totes les solucions comunes.

Un sistema d'inequacions de segon grau amb una única incògnita està format per diverses inequacions lineals o de segon grau i limitat per una clau. Per exemple, un sistema d'inequacions de 2n grau podria ser:

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

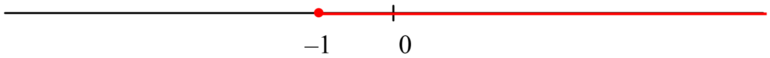
Un nombre és solució d'un sistema d'inequacions d'aquest tipus si és solució de totes les inequacions que formen el sistema. Per exemple, x = 1/2 és una solució del sistema d'inequacions, ja que:

$$\begin{cases} 2\cdot(-\frac{1}{2})+5 \geq 2-(-\frac{1}{2}) \\ 2\cdot(-\frac{1}{2})^2 - 2\cdot(-\frac{1}{2}) - 2 \leq (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) + 4 \end{cases}$$

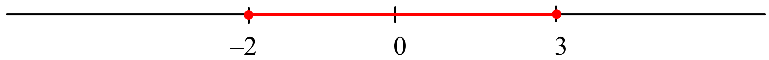
Un procediment per a trobar les solucions d'un sistema d'inequacions de segon grau és molt semblant al de resolució de sistema d'inequacions lineals. També es pot resoldre cada inequació a part i, després, buscar les zones comunes:

1. Es resolen les dues inequacions per separat.

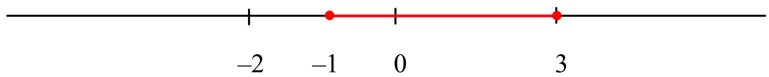
   a. La solució de $2x + 5 \geq 2 - x$ és $[-1,+\infty)$.



   b. La solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ és l'interval [–2,3].



2. Es busca la zona comuna de la solució d'ambdues inequacions, que és [–1,3]:



Per tant, les solucions del sistema d'equacions de segon grau:

$$\begin{cases} 2x+5 \geq 2-x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

són tots els nombres més grans o iguals a –1 i menors o iguals a 3, o sigui, tots els nombres, x, que compleixin $-1 \leq x \leq 3$. En forma d'interval, la solució s'expressaria de la manera següent: [–1,3].

Els polinomis

Els polinomis

Un polinomi és una expressió algebraica amb una única lletra, anomenada variable.
Exemple: $9x^6 - 3x^4 + x - 6$ polinomi de variable x

Elements d'un polinomi

- Els termes: cadascun dels sumands.
  Exemple: termes $9x^6$, $-3x^4$, x, -6
- El grau d'un terme es l'exponent de la variable en aquest terme.
  Exemple: grau de $9x^6$: 6
  grau de $-3x^4$: 4
- El terme independent és el terme de grau 0 (no té variable).
  Exemple: terme independent: -6
- El coeficient de un terme: número que multiplica la variable.
  Exemple: coeficient de $9x^6$: 9
  coeficient de x: 1

Operacions amb polinomis

Suma

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ 4x & -\ 6 \\ + & 5x^4 & -\ 2x^3 & -\ 5x^2 & -\ 3x & +\ 16 \\ \hline & 5x^4 & & -\ 8x^2 & +\ x & +\ 10 \end{array}$$

Resta

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ 4x & -\ 6 \\ - & (5x^4 & -\ 2x^3 & -\ 5x^2 & -\ 3x & +\ 16) \\ \hline & -5x^4 & +\ 4x^3 & +\ 2x^2 & +\ 7x & -\ 22 \end{array}$$

Multiplicació

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 2x^4 & -\ 7x^3 & & +\ 5x & -\ 8 \\ & & \times & & x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\ \hline & & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\ & -14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x & \\ 2x^6 & -\ 7x^5 & & +5x^3 & -\ 8x^2 & & \\ \hline 2x^6 & -21x^5 & +53x^4 & -\ 9x^3 & -\ 43x^2 & +\ 66x & -16 \end{array}$$

Divisió

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & -\ 27x^3 & +\ 15x^2 & & -\ 48 & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{6-6} -6x^4 & +\ 9x^3 & -\ 12x^2 & & & 3x^2 - 9x - 12 \\ \cline{1-3} & -18x^3 & +\ 3x^2 & & & \\ & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4} & & -24x & +\ 36x & -48 & \\ & & +24x & -36x & +\ 48 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Descomposició de polinomis

La descomposició d'un polinomi consisteix a expressar-lo en forma de producte d'altres polinomis el grau dels quals sigui menor. Per exemple:

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48 = (2x^2 - 3x + 4)(3x^2 - 9x - 12)$$

El polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ es descompon en el producte de $2x^2 - 3x + 4$ per $3x^2 - 9x - 12$.

Eina per a la descomposició: regla de Ruffini.
Permet dividir un polinomi entre un altre de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1.
Per exemple, dividir $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 2$:

	5	−4	5	−1
2		10	12	34
	5	6	17	33

així, el resultat és: $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = (5x^2 + 6x + 17)(x - 2) + 33$

Arrel d'un polinomi

Si $p(x)$ és un polinomi, i a és un nombre,

el valor numèric del polinomi $p(x)$ quan $x = a$ és $p(a)$
Exemple: si $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ $\quad p(1) = 5 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$.

Teorema de el residu: el quocient entre el polinomi $p(x)$ i $x - a$ és $p(a)$
Exemple: si $p(x) = x^2 - 1$, el quocient de $p(x)$ entre $x - 3$ és $p(3) = 8$.

Com trobar una arrel d'un polinomi?
a és una arrel del polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$. En aquest cas, $p(x) = q(x) \cdot (x - a)$.
Exemple: si $p(x) = x^2 - 1$ $\quad$ 1 és una arrel de $p(x)$ perquè $p(1) = 0$
en aquest cas $p(x) = (x + 1)(x - 1)$

Fraccions algebraiques

Una fracció algebraica és una fracció entre polinomis.

Equivalència de fraccions algebraiques:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{si } a(x) \cdot q(x) = b(x) \cdot p(x)$$

Operacions:
Suma i resta: com en el cas dels nombres fraccionaris, han de reduir-se les fraccions al mateix denominador, utilitzant el mcm de la descomposició dels denominadors. Quan el denominador és el mateix, poden sumar-se directament els numeradors.

Multiplicació i divisió: se segueixen les mateixes regles que en la multiplicació i divisió de nombres fraccionaris.

Què és un polinomi i quins són els seus elements?

> Un polinomi és una expressió algebraica amb una única lletra anomenada variable. Un polinomi amb un sol terme es denomina monomi, mentre que un binomi és un polinomi amb dos termes. Els elements bàsics d'un polinomi són els termes, cadascun dels quals té un coeficient i el seu grau.

Un polinomi d'una sola variable o, per a abreujar, simplement, un polinomi, és una expressió algebraica amb una única lletra, anomenada variable. Els termes d'aquesta expressió són el producte d'un nombre per una potència positiva de la variable, excepte en el cas d'un terme, que només consta d'un nombre, i que es denomina terme independent. Per exemple, són polinomis amb variable *a* els següents:

$$3a - 42a^3 + 5a - 2a + 2$$
$$5a - 56a^2 + a - 17$$

Un polinomi amb un sol terme es denomina monomi. Per exemple, $-13b^4$, $5b^{23}$, $-7b^2$ són monomis de variable *b*. Un binomi és un polinomi amb dos termes. Per exemple, $3c^3 - 5c$ és un binomi de variable *c*.
Els elements d'un polinomi (i, en general, de qualsevol expressió algebraica) es denominen termes. Altres elements importants d'un polinomi són:

- El grau d'un terme és l'exponent de la variable en aquest terme. El grau del polinomi és el grau del terme de grau màxim. Així, hi ha polinomis de grau 0, de primer grau, de segon grau, etc. Generalment, s'escriuen els termes d'un polinomi de major a menor grau.
- El terme independent, en el qual no apareix la variable, és el terme de grau 0
- El coeficient d'un terme és el nombre que multiplica la variable en aquest terme. La resta del terme es denomina part literal.

Per exemple, si el polinomi és $9x^6 - 3x^4 + x - 6$:

- El terme de grau 6 és igual a $9x^6$.
  El terme de grau 4 és igual a $-3x^4$.
  El terme de grau 1 és igual a x.
  El terme independent és igual a -6 .
  Els termes corresponents als graus que no apareixen són iguals a 0.
- El coeficient del terme de grau 6 és 9, la seva part literal és x^6.
  El coeficient del terme de grau 4 (o, per a abreujar, coeficient de grau 4) és -3, la seva part literal, x^4.
  El coeficient del terme de grau 1 (o, per a abreujar, el coeficient de grau 1) és 1, la seva part literal, x.
  Els coeficients dels altres termes són 0.
- El grau del polinomi és 6.

La variable més usada per a l'expressió de polinomis és la *x*; això només és un costum i no ha de considerar-se una obligació.

Com es realitzen les operacions entre monomis?

> Per a entendre com se sumen, resten, multipliquen o divideixen dos polinomis, és imprescindible conèixer les operacions entre monomis. La suma (o resta) de monomis consisteix en la suma (o resta) de coeficients en monomis del mateix grau, i en el binomi format per la suma (o resta) d'ambdós si no tenen el mateix grau. El producte de monomis és altre monomi el coeficient del qual és el producte de coeficients i el grau del qual és la suma de graus. El quocient de monomis és altre monomi el coeficient del qual és el quocient de coeficients i el grau dels quals és la diferència de graus.

És important conèixer com es realitzen les operacions entre monomis perquè serveixen de base per a estudiar les operacions entre polinomis:

- La suma i la resta

La suma (o resta) de dos monomis de grau diferent és un binomi. Per exemple, la suma dels monomis $3x^4$ i $2x$, és igual al binomi $3x^4 + 2x$.
La suma (o resta) de dos monomis del mateix grau és un altre monomi amb idèntic grau, i amb coeficient igual a la suma (o resta) dels coeficients. Per exemple, la suma de $5x^3$ i $2x^3$ és igual al monomi $7x^3$.

- El producte

El producte de dos monomis és un altre monomi el coeficient del qual és el producte de coeficients, i el grau dels quals és la suma de graus d'ambdós monomis. Per exemple, el producte dels monomis $4x^3$ i $-5x^2$ és el monomi: $4x^3 \cdot (-5x^2) = -20x^5$.

- El quocient

El quocient de dos monomis és un altre monomi el coeficient del qual és el quocient de coeficients, i el seu grau és la diferència de graus d'ambdós monomis. El grau del numerador no pot ser inferior al grau del denominador. Per exemple, el quocient dels monomis $8x^4$ i $2x^3$ és el monomi: $8x^4/2x^3 = 4x$.

Com es realitza la suma i la resta de polinomis?

> La suma (o resta) de dos polinomis és igual al polinomi resultant de la suma (o resta) dels termes el grau dels quals sigui el mateix. Normalment, per a realitzar aquestes operacions se situen els polinomis un sobre l'altre, amb els termes del mateix grau en columna, i el polinomi resultant es calcula sota els dos polinomis, separat per una línia horitzontal.

La suma (o resta) de dos polinomis és igual al polinomi resultant de la suma (o resta) dels termes el grau dels quals sigui el mateix. Per exemple, per a sumar $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ i $5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16$, s'han de sumar els termes amb el mateix grau:

	primer polinomi	segon polinomi	suma
grau 4	0	$5x^4$	$5x^4$
grau 3	$2x^3$	$-2x^3$	0
grau 2	$-3x^2$	$-5x^2$	$-8x^2$
grau 1	$4x$	$-3x$	x
grau 0	-6	16	10

Per tant , el resultat és:
$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6) + (5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16) = 5x^4 - 8x^2 + x + 10$
Normalment, una suma s'expressa amb els polinomis un sobre l'altre, posant en columna els elements del mateix grau, i el resultat a continuació, de la següent manera:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & -\,3x^2 & +\,4x & -\,6 \\ + & 5x^4 & -\,2x^3 & -\,5x^2 & -\,3x & +\,16 \\ \hline & 5x^4 & & -\,8x^2 & +\,x & +\,10 \end{array}$$

Per a la resta es fa exactament el mateix. Si es resten els polinomis anteriors, s'obté:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & -\,3x^2 & +\,4x & -\,6 \\ - & (5x^4 & -\,2x^3 & -\,5x^2 & -\,3x & +\,16) \\ \hline & -5x^4 & +\,4x^3 & +\,2x^2 & +\,7x & -\,22 \end{array}$$

Però és millor canviar el signe dels termes del segon polinomi i sumar:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 \\ \underline{+ \quad 5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16} \\ -5x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 22 \end{array}$$

és a dir:

$(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6) - (5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16) = -5x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 22.$

Com es realitza la multiplicació de polinomis?

> La multiplicació de dos polinomis és igual a la suma de tots els productes de cadascun dels termes del primer polinomi, per cadascun dels termes del segon polinomi. En el moment de realitzar el producte és recomanable que tots els termes del mateix grau quedin en una mateixa columna.

La multiplicació de dos polinomis és igual a la suma de tots els productes de cadascun dels termes del primer polinomi, per cadascun dels termes del segon polinomi. Normalment, el nombre d'operacions que han de realitzar-se és molt gran. Per això, és convenient realitzar la multiplicació de forma ordenada: es posen els dos polinomis, un sobre l'altre, i es multiplica cada terme del segon polinomi, per tots els del primer, posant el resultat a la següent fila. A més, como en el cas de la suma, és recomanable que tots els termes del mateix grau quedin en una mateixa columna. Finalment, se sumen els termes de cada columna.
Vegem primer un exemple de multiplicació d'un polinomi per un monomi: en aquest cas es multiplica el monomi per cada terme del polinomi, sumant-se els resultats. Calculem el producte del polinomi $7x^4-5x^2+3x-8$ pel monomi $2x^3$:

$$\begin{array}{lllll} & 7x^4 & -\ 5x^2 & +\ 3x & -\ 8 \\ \times & & & & 2x^3 \\ \hline & 14x^7 & -10x^5 & +\ 6x^4 & -16x^3 \end{array}$$

Com es pot observar, és convenient deixar un buit on faltin termes.

Per a realitzar un producte de dos polinomis qualssevol, s'ha de repetir el que hem fet en el cas anterior amb cadascun dels termes del polinomi que multiplica, sumant al final els resultats. Multipliquem els polinomis $2x^4-7x^3+5x-8$ i x^2-7x+2. En primer lloc, col·loquem un polinomi sobre un altre:

$$
\begin{array}{rrrrr}
2x^4 & -\ 7x^3 & & +\ \ 5x & -\ 8 \\
\times & & x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\
\hline
\end{array}
$$

Comencem ara multiplicant el primer polinomi per $+2$

$$
\begin{array}{rrrrr}
2x^4 & -\ 7x^3 & & +\ \ 5x & -\ 8 \\
\times & & x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\
\hline
4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16
\end{array}
$$

Una vegada que hem multiplicat per $+2$, seguim multiplicant pel següent terme, $-7x$, col·locant els resultats en la línia següent, de manera que els termes d'igual grau estiguin en columna.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -\ 7x^3 & & +\ \ 5x & -\ 8 \\
 & \times & & x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\
\cline{2-6}
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
-14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x &
\end{array}
$$

Ara continuem multiplicant pel terme x^2

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 2x^4 & -\ 7x^3 & & +\ \ 5x & -\ 8 \\
 & & \times & & x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\
\cline{3-7}
 & & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
 & -14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x & \\
2x^6 & -7x^5 & & +5x^3 & -8x^2 & &
\end{array}
$$

Ja només ens queda sumar els resultats obtinguts pas a pas.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 2x^4 & -\ 7x^3 & & + & -\ 8 \\
 & & & & & 5x & \\
 & & \times & & x^2 & -\ 7x & +\ 2 \\
\cline{3-7}
 & & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
 & -14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x & \\
2x^6 & -\ 7x^5 & & +5x^3 & -\ 8x^2 & & \\
\hline
2x^6 & -21x^5 & +53x^4 & -\ \ 9x^3 & -43x^2 & +66x & -16
\end{array}
$$

Com es realitza la divisió de polinomis?

> El procés per a dividir polinomis és molt semblat a la divisió de nombres, canviant les xifres d'un nombre pels termes d'un polinomi. Per a dividir dos polinomis s'ha de començar dividint el terme de major grau del dividend entre el terme de major grau del divisor. El resultat se situa en el lloc del quocient. A continuació, es multiplica aquest terme del quocient pel divisor; aquest producte es resta del dividend. I així, successivament, fins a arribar al terme independent del dividend.

Per a dividir dos polinomis s'ha de començar dividint el terme de major grau del dividend entre el terme de major grau del divisor. El resultat se situa en el lloc del quocient. A continuació, es multiplica aquest terme del quocient pel divisor; aquest producte es resta del dividend (el procés és molt semblat a la divisió de nombres, canviant les xifres d'un nombre per termes d'un polinomi). Per exemple, per a dividir $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ entre $2x^2 - 3x + 4$, el primer pas consisteix a dividir el de major grau del dividend ($6x^4$), entre el terme de major grau del divisor ($2x^2$); en aquest cas, $6x^4/2x^2 = 3x^2$. Posteriorment, ha de multiplicar-se el divisor per aquest terme, $(2x^2 - 3x + 4) \cdot 3x^2 = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2$, i restar-lo al dividend. Així, doncs, aquests primers passos s'expressarien així:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2 - 3x + 4 \\
\cline{6-6}
\underline{-6x^4} & \underline{+9x^3} & \underline{-12x^2} & & & 3x^2 \\
& -18x^3 & +3x^2 & & &
\end{array}
$$

Després de realitzar la resta, es baixa el terme següent del dividend (en aquest cas, 0), i es divideix amb el mateix procediment el que ha quedat, entre el dividend. La divisió completa seria la següent:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2 - 3x + 4 \\
\cline{6-6}
\underline{-6x^4} & \underline{+9x^3} & \underline{-12x^2} & & & 3x^2 - 9x - 12 \\
& -18x^3 & +3x^2 & & & \\
& \underline{+18x^3} & \underline{-27x^2} & \underline{+36x} & & \\
& & -24x & +36x & -48 & \\
& & \underline{+24x} & \underline{-36x} & \underline{+48} & \\
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Aquesta divisió és exacta perquè residu és 0. Així, doncs:

$$\frac{6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48}{2x^2 - 3x + 4} = 3x^2 - 9x - 12\,x$$

En aquest cas es diu que el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ és divisible entre el polinomi $2x^2 - 3x + 4$. De la mateixa manera, pot dir-se que $2x^2 - 3x + 4$ és múltiple de $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$. Una altra forma d'expressar-ho: el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ es descompon en els polinomis $2x^2 - 3x + 4$ i $3x^2 - 9x - 12$, és a dir, el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ és el producte dels polinomis $2x^2 - 3x + 4$ i $3x^2 - 9x - 12$

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48 = (2x^2 - 3x + 4)(3x^2 - 9x - 12)$$

També és possible que el residu no sigui 0. Per exemple:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & +3x & -48 & 2x^2 - 3x + 4 \\
\cline{6-6}
\underline{-6x^4} & \underline{+9x^3} & \underline{-12x^2} & & & 3x^2 - 9x - 12 \\
& -18x^3 & +3x^2 & +3x & & \\
& \underline{+18x^3} & \underline{-27x^2} & \underline{+36x} & & \\
& & -24x & +39x & -48 & \\
& & \underline{+24x} & \underline{-36x} & \underline{+48} & \\
& & & +3x & &
\end{array}
$$

En aquest cas, pot aplicar-se la fórmula en la que el dividend (D) és igual al divisor (d) pel quocient (c) més el residu (r):

$$D = d \cdot c + r$$

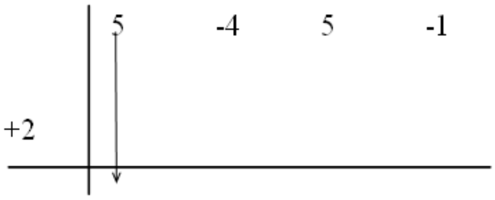
En l'exemple, el dividend és $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$, el divisor és $2x^2 - 3x + 4$, el quocient, $3x^2 - 9x - 12$ i el residu, $3x$. Així, doncs:

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48 = (2x^2 - 3x + 4)(3x^2 - 9x - 12) + 3x$$

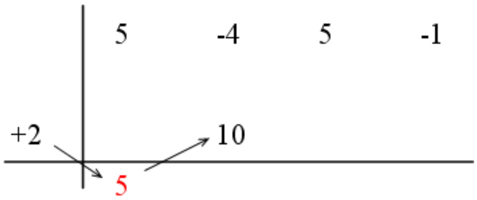
En què consisteix la regla de Ruffini?

> La regla de Ruffini és una manera senzilla i ràpida de realitzar la divisió d'un polinomi quan el divisor és un polinomi de grau 1, el coeficient de grau 1 del qual és 1. Aquesta regla permet fer la divisió utilitzant únicament els coeficients d'ambdós polinomis.

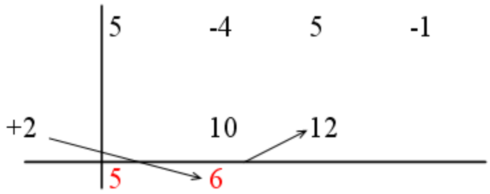
La regla de Ruffini permet realitzar la divisió d'un polinomi quan el divisor és un polinomi de grau 1, el coeficient de grau 1 del qual és 1. Aquesta regla utilitza solament els coeficients dels polinomis implicats. Per a fer-la, se situen els coeficients del dividend, de major a menor (i posant 0 si és necessari en els termes que no existeixin), en la part superior; es dibuixen dos segments perpendiculars en creu, en la part inferior de la figura; se situa el terme independent del divisor, canviat de signe, entre els dos segments, de la següent manera:



Es baixa el primer coeficient i es multiplica pel terme independents canviat de signe, i se situa el resultat sota el següent coeficient:



Se sumen els dos nombres de la mateixa columna, i es torna a multiplicar pel terme independent canviat de signe:



En definitiva, la divisió per Ruffini de $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 2$, s'expressaria de la següent manera:

	5	−4	5	−1
2.		10	12	34
	5	6	17	33

Finalment, a partir de l'última fila de nombres, pot extreure's el quocient i la resta. La resta és l'últim nombre (33), mentre que el quocient de la divisió és un polinomi els coeficients del qual són la resta dels nombres d'aquesta fila, posats de major a menor grau; és a dir, el quocient és $5x^2 + 6x + 17$. En definitiva,

$$5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = (5x^2 + 6x + 17)(x - 2) + 33$$

Què és el valor numèric d'un polinomi i l'arrel d'un polinomi, i quina és la seva utilitat per a la descomposició de polinomis?

> El valor numèric d'un polinomi és el resultat de substituir la variable del polinomi per un nombre. Si el valor numèric d'un polinomi és 0 per a cert nombre, es diu que aquest nombre és una arrel del polinomi. Un polinomi amb arrels pot descompondre's, entre d'altres, en polinomis de grau 1. En qualsevol cas, cada polinomi té un nombre d'arrels que no supera el seu grau.

Els polinomis solen designar-se amb una lletra (així s'evita expressar tot el polinomi cada vegada que s'ha de citar). Aquesta lletra va acompanyada de la variable, posada entre parèntesi (que no s'han de confondre amb els parèntesis que tanquen operacions). Per exemple, el polinomi $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ pot denominar-se p(x): la p representa el nom del polinomi, i la x entre parèntesi indica la variable del polinomi. És a dir:

$$p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

El valor numèric d'un polinomi és el qual s'obté al substituir la seva variable per un nombre determinat. Per exemple, si substituïm la x del polinomi p(x) per 1, el valor numèric serà:

$$p(1) = 5 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$$

És a dir, el valor numèric del polinomi p(x), quan x és igual a 1, és 5; dit d'una altra manera més breu: p(1) = 5. Podem calcular altres valors numèrics d'aquest polinomi:

$p(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 1 = -1$ valor numèric de p(x) quan x és 0.

$p(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -15$ valor numèric de $p(x)$ quan x és -1.
Per a trobar el residu de la divisió de polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 amb el coeficient de grau 1 igual a 1, es pot recórrer al valor numèric del dividend. El teorema del residu permet calcular aquest residu: el residu d'una divisió d'aquest tipus és igual al valor numèric d'aquest polinomi quan la seva variable és igual al terme independent del divisor, canviat de signe.
Per exemple, el residu de la divisió de $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 2$ és igual al valor numèric de $p(x)$ quan la x és igual a 2, és a dir, el residu és $p(2)$. Vegem que això és així:

$$p(2) = 5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 33$$

com ja s'havia obtingut amb la divisió per Ruffini.
Un altre exemple: el residu de la divisió de $q(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 1$ entre $x + 1$ és igual al valor numèric de $q(x)$ quan la x és igual a -1, és a dir, $q(-1) = 3 \cdot (-1)^5 - 4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) -1 = 3$
Així, doncs, és fàcil esbrinar si un polinomi és divisible per un altre de grau 1, amb coeficient de grau 1 igual a 1: si el valor numèric del polinomi quan x és igual al terme independent del divisor, canviat de signe, és igual a 0, llavors, es pot assegurar que és divisible. En cas contrari no ho serà. Per exemple, $p(x) = x^2 - 1$ és divisible entre $x + 1$, ja que $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. És fàcil comprovar-lo, ja que la divisió és exacta:

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$$

En aquest cas, doncs, pot dir-se que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. És a dir, el teorema de el residu ajuda a descompondre un polinomi en termes de grau 1, quan això sigui possible.
Donat un polinomi qualsevol, $p(x)$, es diu que el nombre a és una **arrel** d'aquest polinomi, o que és un zero del polinomi, si es compleix que $p(a) = 0$; també es diu que a anul·la el polinomi. Per exemple, el polinomi $p(x) = x^2 - 1$ té arrels 1 i -1 perquè:

$$p(1) = 1^2 - 1 = 0$$
$$p(-1) = (-1)^2 - 1) = 0.$$

Utilitzant el teorema de el residu, és fàcil observar que si a és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors $p(x)$ pot descompondre's de la següent forma:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a)$$

sent $q(x)$ un polinomi d'un grau menor que $p(x)$. En l'exemple, $p(x) = x^2 - 1$

$$p(x) = (x - 1)(x - (-1)) = (x - 1)(x + 1)$$

És evident que qualsevol polinomi té, com a molt, un nombre d'arrels igual al seu grau.
La descomposició d'un polinomi permet calcular el mcm (mínim comú múltiple) i mcd (màxim comú divisor) de dos o més polinomis, de manera semblant al càlcul del mcm i mcd de diferents nombres. Per exemple:

$$\text{mcd}(x^2 - 1 , x^2 - 2x + 1) = x - 1$$
$$\text{mcm}(x^2 - 1 , x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^2(x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

ja que:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Què és una fracció algebraica i com s'operen?

> Una fracció algebraica és una fracció entre polinomis. Com en el cas de les fraccions entre nombres, es pot definir el concepte de fracció equivalent, es poden simplificar fraccions algebraiques i es poden realitzar operacions entre fraccions algebraiques (suma, resta, multiplicació i divisió) de manera semblant.

Una fracció algebraica és una fracció entre polinomis. De la mateixa manera que s'han definit fraccions equivalents, també poden definir-se les fraccions algebraiques equivalents. Si $a(x)$, $b(x)$, $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis,

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{si} \quad a(x) \cdot q(x) = b(x) \cdot p(x)$$

Per exemple, $\dfrac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^4+x^3-5x^2+x-6} = \dfrac{2x^2-2}{x^3+3x^2+x+3}$, perquè

$$\left(2x^3-4x^2-2x+4\right)\left(x^3+3x^2+x+3\right)=\left(x^4+x^3-5x^2+x-6\right)\left(2x^2-2\right)=$$
$$=2x^6+2x^5-12x^4-2x^2-2x+12$$

Com en el cas dels nombres fraccionaris, és fàcil adonar-se d'aquestes propietats:

- Al multiplicar numerador i denominador per un mateix polinomi, la fracció resultant és equivalent.
- Al dividir de manera exacta numerador i denominador per un mateix polinomi, la fracció resultant és equivalent. Aquest procés es denomina simplificació. Per exemple, podem descompondre numerador i denominador de:

$$\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+x-6}$$

de la següent manera:

$$x^3-2x^2+4x-8=(x-2)(x^2+4)$$
$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

per tant,

$$\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+x-6}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\frac{x^2+4}{x+3}$$

Per a realitzar la multiplicació i divisió de fraccions algebraiques se segueixen les mateixes regles senzilles que per a la multiplicació i divisió de nombres fraccionaris. Per exemple:

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}\times\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{\left(3x-2\right)\left(7x+1\right)}{\left(2x^2+3\right)\left(2x+2\right)}=\frac{21x^2-11x-2}{4x^3+4x^2+6x+6}$$

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}:\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{3x-2}{2x^2+3}\times\frac{2x+2}{7x+1}$$

De la mateixa manera, si dues fraccions algebraiques han de sumar-se (o restar-se), el procés és el mateix que per a la suma (resta) de fraccions numèriques: se sumen (resten) els numeradors, i es deixa el mateix denominador. Per exemple:

$$\frac{3x-2}{4x^2-x+1}-\frac{2x+6}{4x^2-x+1}=\frac{3x-2-(2x+6)}{4x^2-x+1}=\frac{x-8}{4x^2-x+1}$$

Per a sumar (restar) fraccions algebraiques amb denominador diferent, han de transformar-se abans en fraccions equivalents amb el mateix denominador. Per fer-ho, es calcula el mcm (mínim comú múltiple) dels polinomis que es troben en el denominador. Per exemple, per sumar aquestes fraccions:

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2}$$

s'ha de buscar el mcm dels denominadors

mcm(x^2+5x+6 , x^2+3x+2) = $(x+2)(x+3)(x+1)=x^3+6x^2+11x+6$

Per tant:

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}=\frac{(3x-4)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(3x-4)(x+1)}{(x+2)(x+3)(x+1)}$$

$$\frac{5x-2}{x^2+3x+2}=\frac{(5x-2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{(5x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+1)}$$

Així, doncs, la suma és:

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2}=\frac{(3x-4)(x+1)}{(x+2)(x+3)(x+1)}+\frac{(5x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+1)}=$$

$$\frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}+\frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{8x^2+12x-10}{x^3+6x^2+11x+6}$$

Matrius i determinants

Matrius i determinants

Matrius
Una matriu és un grup de nombres organitzats en files i columnes, limitats per parèntesis:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{columnes} \quad \begin{array}{ccccc} \overset{1}{\downarrow} & \overset{2}{\downarrow} & \overset{3}{\downarrow} & & \overset{n}{\downarrow} \end{array} & \text{Files} \\
A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \\ \leftarrow m \end{array}
\end{array} \qquad \text{dimensió } m\times n$$

Un element d'una matriu s'expressa de forma general:

a_{ij} $\quad$ *i* indica la fila, *j* indica la columna

Matrius importants

- La matriu quadrada: matriu de dimensió $n\times n$.
- La matriu diagonal: els seus elements són 0, excepte els de la diagonal.
- La matriu identitat I_n: matriu diagonal en la qual tots els elements de la diagonal són 1.
- La matriu transposada d'una matriu A, A^T , és la matriu que resulta de canviar filles per columnes de la matriu A.

Operacions amb matrius:

- Suma i resta

si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de dimensió $m\times n$:

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

- Multiplicació per escalar

si *r* és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és:

$r\cdot A = r\cdot(a_{ij}) = (r\cdot a_{ij})$

- Multiplicació

Si $A = (a_{ij})$ és una matriu $m\times n$ i $B = (b_{ij})$ és una matriu $n\times r$, la matriu producte de A per B, $P = (p_{ij}) = A \times B$, és una matriu $m\times r$, i els seus elements es calculen de la manera següent:

$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \ldots a_{in}b_{nj}$

Si el producte de dues matrius quadrades de dimensió $n\times n$, A i B, és igual a I_n

$$A \times B = B \times A = I_n$$

llavors es diu que B és la matriu inversa de A, i es denota per $B = A^{-1}$

Per exemple, la matriu inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determinants

El determinant d'una matriu quadrada és un nombre que, entre d'altres aplicacions, és molt útil per a saber si una matriu té inversa i per a calcular-la. Per a indicar que s'està calculant el determinant d'una matriu, els elements d'aquesta s'han de posar entre dos segments verticals.

- Càlcul del determinant

Matriu 1×1: igual al nombre que compon la matriu.
Matriu 2×2: igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements.
Matriu 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Matriu 4×4: càlcul de forma recursiva, a partir de matrius 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}$$

essent α_{ij} el menor complementari de a_{ij}, és a dir, el determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna *j* del determinant.

Càlcul de la inversa d'una matriu

Una matriu quadrada $n\times n$ es pot invertir sempre que la seva determinant no sigui 0.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A')^T$$

essent A' la matriu d'adjunts dels elements de la matriu A. Un adjunt d'un element a_{ij} de la matriu A se denota a_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ essent α_{ij} el menor complementari de a_{ij}

Resolució de sistemes amb matrius

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \xrightarrow{\text{es pot escriure}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X = B$$

- El sistema té solució si rang(A) = rang(A^*)
  - Si rang(A) = *n* la solució és única: $X = \overline{A}^{-1}\cdot\overline{B}$, essent $\overline{A}$ un menor d'ordre *n* de la matriu A que el seu determinant no és 0 i $\overline{B}$ les files de B que coincideixin amb les files del menor d'ordre *n* escollit.
  - Si rang(A) < *n* el sistema té infinites solucions.
- El sistema no té solució si rang(A) ≠ rang(A^*).
- També es poden utilitzar matrius per a resoldre un sistema pel mètode de Gauss.

Què és una matriu i quins són els seus elements?

> Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en files i columnes, i tancats entre un parèntesi. Els elements de la matriu de designen a partir de la posició que hi ocupen (fila i columna), i la forma general de denominar una matriu és amb una lletra minúscula amb subíndexs *ij* (*i* per a les files, *j* per a les columnes), tancat entre parèntesis: (a_{ij}).

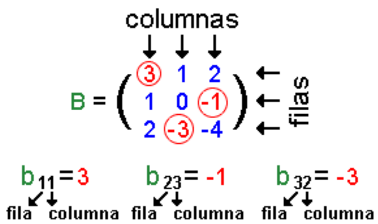
Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en files i columnes, i tancats entre dos parèntesis. Aquests són alguns exemples de matrius:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

En forma general, una matriu s'escriu de la manera següent:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'element de la fila *i* i columna *j* de la matriu A se representa com a_{ij}. Per exemple, en la matriu següent B, es poden determinar alguns dels elements:



La forma general de designar una matriu utilitza una lletra minúscula amb subíndexs *ij* (*i* per a les files, *j* per a les columnes), tancat entre parèntesis: (a_{ij}); també es pot utilitzar la mateixa lletra en majúscules, sense subíndexs:

$$A = (a_{ij})$$

Si una matriu té *m* files i *n* columnes, es diu que té dimensió $m \times n$. Així, per exemple, la matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

té dimensió 2×4.

Dues matrius són iguals sempre que tots els seus elements siguin iguals i ocupin les mateixes posicions; és a dir

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \qquad \text{si } a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{per a qualssevol } i, j$$

Algunes matrius especials són:

- La matriu quadrada: la que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, de dimensió $n \times n$. La diagonal d'una matriu està formada per aquells elements la fila i la columna dels quals tenen el mateix nombre, és a dir, a_{11}, a_{22}, a_{33} …
- La matriu diagonal: la matriu quadrada els elements de la qual són 0 excepte els de la diagonal.
- La matriu identitat: matriu diagonal en la qual tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió $n \times n$ s'indica amb I_n.
- La matriu transposada d'una matriu A, denominada A^T , és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu A. Per exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

es pot observar que, per exemple, la primera fila d'A, (–1 3 5), coincideix amb la primera columna de la transposada. Es pot comprovar que això passa en tots els parells files/columnes.

Com es fa la suma i resta de matrius, i la multiplicació per un nombre?

> Dues de les operacions principals entre matrius són la suma (resta) de matrius, i el producte d'una matriu per un nombre, denominat també *escalar*. Dues matrius es poden sumar o restar quan les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupin la mateixa posició. El producte d'una matriu per un nombre sempre es pot fer, i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre.

Dues matrius es poden sumar o restar únicament si les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupen la mateixa posició, i el resultat de la qual s'haurà de posar en la matriu suma, en la mateixa posició. És a dir, si A = (a_{ij}) i B = (b_{ij}) són matrius de dimensió $m \times n$, llavors

la suma és A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})

la resta és A – B = (a_{ij}) – (b_{ij}) = (a_{ij} – b_{ij})

Alguns exemples poden ajudar a entendre aquestes operacions. Es consideren aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, es pot assegurar que no es poden sumar ni restar A i C, ni tampoc B i C, perquè no tenen la mateixa dimensió. En canvi es poden fer la suma i la resta d'A i B, de la manera següent:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 & -3-3 \\ 2+2 & 1+0 & -2-1 \\ -1+3 & 3+4 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

es pot comprovar que la suma de l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A, se suma amb l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat que ocupa la mateixa posició en la matriu suma 2 + 1 = 3. Així es fa la suma amb tots els parells d'elements de les matrius A i B.

De manera semblant es fa la resta d'ambdues matrius:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, en lloc de sumar, es resten els elements de la segona matriu als elements de la primera. Per exemple, a l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A, se li resta l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat ocupa la mateixa posició en la matriu resta: 2 – 1 = 1.

Les propietats de la suma de matrius són molt semblants a les propietats de la suma de nombres, tenint en compte que sempre han de ser matrius de la mateixa dimensió:

- Commutativa: A + B = B + A
- Associativa: A + B + C = A + (B + C) = (A + B)+ C

- Element neutre: hi ha una matriu, denominada *element neutre*, que sumada a qualsevol altra matriu de la mateixa dimensió, A, té com a resultat sempre A. A; aquesta matriu es denomina 0_{mn} o *matriu nul·la*, és a dir, la matriu de dimensió $m \times n$ que té totes les seves posicions ocupades per 0. Per exemple, la matriu 0_{22} és igual

$$0_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tota matriu té un element oposat, que sumat amb l'original resulta l'element neutre. L'element neutre d'A es denomina −A. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ja que

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producte d'una matriu per un nombre sempre es pot fer, i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre. És a dir, si *r* és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

Per exemple, continuant amb la mateixa matriu A dels exemples anteriors:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Per a dividir una matriu per un nombre s'ha de multiplicar aquesta matriu per l'invers del nombre.

Com es fa el producte de matrius?

> El producte de dues matrius solament es pot fer en el cas que el nombre de columnes de la primera matriu coincideixi amb el nombre de files de la segona matriu. Si això és així, el producte d'ambdues matrius és una altra matriu que té el mateix nombre de files que la primera matriu, i el mateix nombre de columnes que la segona matriu. Per a trobar un element de la matriu producte, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila corresponent de la primera matriu pels elements de la columna corresponent de la segona matriu; a continuació s'han de sumar tots aquests productes.

Per a multiplicar dues matrius, A i B, per a obtenir A × B, s'ha de comprovar que el nombre de columnes de la matriu A coincideixi amb el nombre de files de la matriu B. És a dir, si A és una matriu de dimensió $m \times n$, només es pot multiplicar per la matriu B si aquesta té dimensió $n \times r$. En el cas que això sigui així, la matriu producte, P = A × B, té dimensió $m \times r$, és a dir, el mateix nombre de files que la matriu A, i el mateix nombre de columnes que la matriu B. Per a trobar l'element p_{ij}, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila i de la matriu A, pels elements de la columna *j* de la matriu B. Finalment, p_{ij} és la suma de tots aquests productes. Un exemple il·lustrarà aquest procediment:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, podem observar que A × B es pot fer perquè A té 3 columnes i B té 3 files; la matriu resultant tindrà 4 files (igual que A) i 2 columnes (igual que B). En canvi, B × A no es pot fer, perquè B té 2 columnes, mentre que A té 4 files.

Per a trobar l'element p_{11} (en vermell) de la matriu producte, P = A × B, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila 1 de la matriu A (en verd), amb els elements de la columna 1 de la matriu B (en blau):

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir, $p_{11} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3.$

per a trobar p_{12}, s'ha de multiplicar la fila 1 per la columna 2:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$p_{12} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7.$$

i així successivament fins a trobar el producte

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, es pot dir en general que si A = (a_{ij}) és una matriu $m \times n$ i B = (b_{ij}) és una matriu $n \times r$, la matriu producte d'A per B, P = (p_{ij}) = A × B, és una matriu $m \times r$, i els seus elements es calculen de la manera següent:

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \ldots a_{in}b_{nj}$$

El producte de matrius té les següents propietats:

- Associativa: A × B × C = A × (B × C) = (A × B) × C
- L'element neutre del producte de matrius quadrades és la matriu identitat, I_n. És a dir, si A és una matriu quadrada $n \times n$, A × I_n = I_n × A = A.
- De vegades (encara que no sempre), hi ha matrius quadrades que tenen element invers. Aquesta matriu, quan existeix, es denomina *inversa*; també es diu que la matriu A és *invertible*. La matriu inversa d'una matriu quadrada de dimensió $n \times n$ A, s'indica $A^{-}1$, i compleix:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

- En general, el producte de matrius NO és commutatiu. És a dir, si A i B són dues matrius, quan es poden fer els productes A × B i B × A, generalment:

$$A \times B \neq B \times A$$

encara que algunes vegades, molt poques, podria ser igual.

Què és el determinant d'una matriu quadrada i quina és la seva utilitat?

> El determinant d'una matriu quadrada és un nombre. Per a trobar-lo s'han de fer una sèrie d'operacions amb els elements de la matriu. El determinant d'una matriu és molt útil per a esbrinar si una matriu té inversa i és de gran ajuda en el càlcul de la inversa de la matriu, sempre que aquesta es pugui invertir.

Per a cada matriu quadrada es pot definir un nombre que és de gran ajuda, entre altres coses, per a determinar si aquesta matriu és invertible, i en cas afirmatiu, també és imprescindible per al càlcul de la inversa d'aquesta matriu. Aquest nombre es denomina *determinant de la matriu.*

Per a indicar el determinant d'una matriu, els elements d'aquesta s'han de posar entre dos segments verticals, i no entre parèntesis. Per exemple, el determinant de la matriu A s'indica com segueix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{el seu determinant s'inidica així}]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

també es pot indicar d'aquesta altra manera: det(A).

Es definirà el determinant de manera recursiva, és a dir, primer per a matrius de dimensió 1×1, a continuació per a matrius de dimensió 2×2, i així successivament.

El determinant d'una matriu 1×1 és igual al nombre que compon la matriu. Per exemple,

si A = (3) det(A) = |3| = 3

El determinant d'una matriu 2×2 és igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements. Per exemple,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6$$

El determinant d'una matriu 3×3 es calcula sumant aquests tres productes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

i restant aquests tres productes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

És a dir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

per exemple, en l'exemple anterior, el determinant d'A és igual a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1(-2) \cdot 3 = -14$$

Per a calcular el determinant de matrius de dimensió 4×4, s'ha de descompondre el determinant de la manera següent:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

és a dir, es tracta de multiplicar cada element de la primera columna pel determinant de la matriu 3×3 que resulta d'eliminar la fila i la columna corresponent a aquest element; a més, s'han d'alternar els signes, començant sempre pel signe +. Per exemple, l'element a_{11} s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 1 i la columna 1, és a dir,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \xrightarrow{\text{se elimina fila 1, columna 1}} \begin{matrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

l'element a_{21}, aquesta vegada canviat de signe, s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 2 i la columna 1, és a dir:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \xrightarrow{\text{se elimina fila 2, columna 1}} \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & & \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

i d'aquesta manera amb tots els elements de la primera columna. Al determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j se l'anomena *menor complementari de l'element* a_{ij}, i s'indica α_{ij} (α, alfa, és la primera lletra de l'alfabet grec). Per exemple, en el cas de la matriu 4×4 anterior, el menor complementari d'a_{31} és

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Així, doncs, l'expressió que calcula el determinant 4×4 es pot simplificar encara més:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}.$$

per exemple, es pot calcular aquest determinant seguint la fórmula anterior:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Per a calcular el determinant de qualsevol matriu quadrada se segueix el mateix procediment: es multiplica cada element de la primera columna pel seu menor complementari; a més, s'han d'alternar els signes, començant sempre pel signe +. És a dir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} \dots + (-1)^{n+1} a_{n1}\alpha_{n1}.$$

El càlcul del determinant es pot fer amb qualsevol columna (o fila) de la matriu (amb un petit canvi de signe en les columnes parells); s'ha utilitzat tan sols la primera columna per a simplificar l'explicació.

Quan es pot invertir una matriu quadrada i com es fa?

> Una matriu quadrada es pot invertir sempre que la seva determinant no sigui 0. Per a trobar la inversa d'una matriu que compleixi aquesta condició, s'ha de calcular la seva matriu d'adjunts, transposar-la i, finalment, dividir el resultat entre el determinant de la matriu inicial.

Una matriu quadrada $n \times n$ es pot invertir sempre que la seva determinant no sigui 0. Per a trobar la inversa d'una matriu s'ha de definir, primer, el concepte d'*adjunt d'un element de la matriu*: l'adjunt de l'element a_{ij} de la matriu A, s'indica amb A_{ij}, i es defineix de la manera següent:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij} \qquad \text{essent } \alpha_{ij} \text{ el menor complementari de }_{ij}$$

Es pot observar que si $i+j$ és un nombre parell, $A_{ij} = \alpha_{ij}$; en canvi, si $i+j$ és un nombre senar, $A_{ij} = -\alpha_{ij}$. És a dir, el signe que s'ha d'anteposar al menor complementari per a obtenir l'element corresponent adjunt es regeix per la matriu de signes següent:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \cdots & \\ + & - & + & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & + \end{pmatrix}$$

Per exemple, l'adjunt de l'element a_{34} és $A_{34} = (-1)^{3+4}\alpha_{34} = -\alpha_{34}$.

La matriu formada per tots els adjunts dels elements de la matriu A s'anomena matriu d'adjunts d'A, i s'indica amb A'.

Una vegada trobada la matriu d'adjunts d'A, és molt senzill trobar la matriu inversa d'A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A')^T$$

Dit d'una altra manera, la matriu inversa d'A és la matriu d'adjunts, transposada i dividida entre el valor del determinant d'A. És evident que, com ja s'ha dit, el determinant d'A ha de ser diferent de 0; en cas contrari, la fórmula no es pot aplicar.

Per exemple, si la inversa d' $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, es calcula així:

sabem que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -14$

calculem la matriu d'adjunts i la seva transposada:

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -11 & -2 & -5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A')^T = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa d'A és:

$$A^{-1} = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

cosa que es pot comprovar fàcilment:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = I_n$$

De la mateixa manera es pot comprovar fàcilment que $A^{-1} \cdot A = I_n$.

Com es poden fer servir les matrius per a determinar si un sistema d'equacions lineals té solució?

> Un sistema d'equacions lineals es pot expressar en forma matricial. Per a saber si el sistema té solucions i quantes en té, s'han de conèixer els conceptes de menor d'ordre k d'una matriu, el rang de la matriu i de la matriu ampliada. Si una matriu i la seva ampliada tenen el mateix rang, el sistema té solució; en cas contrari, el sistema no té solució.

Un sistema d'equacions lineals com el següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es pot expressar en forma matricial de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que es denomina *equació matricial*, del tipus A·X = B, essent X una matriu $n \times 1$ d'elements desconeguts.

Per a conèixer el nombre de solucions d'un sistema matricial s'han d'introduir alguns conceptes: menor d'ordre k, rang d'una matriu i matriu ampliada d'un sistema matricial.

- Donada una matriu A, si se seleccionen k files i k columnes d'aquesta matriu, i es calcula el determinant d'aquestes k files i k columnes, a aquest determinant se l'anomena *menor d'ordre k* de la matriu A. En cas que s'escullin totes les files excepte una, i totes les columnes excepte una, com és sabut, ens trobem davant un menor complementari. Vegem-ne un exemple:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant files 1,2} \\ \text{i columnes 2,3}}]{\text{menor d'ordre 2}} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

- El rang d'una matriu és l'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0. L'ordre d'una matriu A s'indica rang(A). Per a trobar-lo, s'han de calcular menors d'ordre màxim, per si n'hi hagués algun de diferent de 0; si no és així, es calculen tots els menors d'ordre una unitat menor, per si n'hi hagués algun de diferent de 0. I així successivament. L'ordre del primer menor diferent de 0 serà el rang de la matriu. Per exemple, en el cas de la matriu anterior; s'observa que el determinant és 0 (és a dir, el menor d'ordre 4 és 0), així, s'ha de comprovar si hi ha algun menor d'ordre 3 que no sigui 0:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant fila 1} \\ \text{i columna 1}}]{\text{menor d'ordre 3}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

per tant, aquesta matriu té rang 3, perquè un dels seus menors d'ordre 3 no és 0.

- La matriu ampliada d'un sistema matricial A·X = B és la matriu formada per la matriu A més la columna B; generalment, aquestes dues parts de la matriu ampliada se separen per una línia. Normalment, la matriu ampliada s'indica A^* . En el sistema matricial inicial, la matriu ampliada és:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Donat un sistema matricial A·X = B, essent A una matriu $m \times n$:

- El sistema té solució en els casos que el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada són iguals:

$$\text{rang(A)} = \text{rang}(A^*)$$

i es poden donar els casos següents:

- Si rang(A) = $n = m$ la solució és única, és a dir, hi ha una única matriu $n \times 1$ que compleix que A·X = B.
- Si rang(A) < n la solució no és única; de fet, en aquestes condicions, el sistema té infinites solucions.

- El sistema no té solució si el rang de la matriu A, i el de la matriu ampliada són diferents, és a dir, si

$$\text{rang(A)} \neq \text{rang(A}^*)$$

per exemple, el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ \quad y - z + w = -1 \\ 3x \quad + 6z - 6w = 6 \\ \quad -y + z - w = 1 \end{cases} \text{ equival a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en aquest cas, rang(A) = rang(A*) = 2 < n = 4. Per tant, aquest sistema té infinites solucions (com es pot comprovar en el tema dedicat a sistemes d'equacions).

Com es troben les solucions d'un sistema expressat matricialment?

> Les solucions d'un sistema matricial es troben transformant el sistema inicial en un altre la matriu principal del qual sigui quadrada i de determinant diferent de 0. A partir d'aquest sistema, i usant la inversa d'aquesta última matriu és relativament senzill trobar les solucions del sistema.

Si el sistema matricial A·X = B té solució única (és a dir, es compleix que rang(A) = rang(A*) = n = m), es tria un menor d'ordre n de la matriu A el determinant del qual no sigui 0 (i se l'anomena $\overline{A}$) i es trien les files de B que coincideixin amb les files del menor d'ordre n escollit (a aquestes files s'anomenen $\overline{B}$). Per a resoldre el sistema A·X = B, n'hi ha prou amb resoldre $\overline{A} \cdot X = \overline{B}$. Ara bé, com que $\overline{A}$ és una matriu quadrada el seu determinant de la qual no és 0, existeix la seva inversa. Per tant, podem fer multiplicar a banda i banda per $\overline{A}^{-1}$:

$$\overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} \cdot X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

Sabem que $\overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} = I_n$, per tant, la solució del sistema és:

$$X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

Per exemple, la solució del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \text{ equivalent a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és única perquè rang(A) = rang(A*) = 3. Per a resoldre'l s'ha d'escollir un menor d'ordre 3 que no sigui 0 (per exemple, les tres primeres files)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ i la solució del sistema és } X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$.

En el cas que el rang(A) = rang(A*) = r < n, s'ha de fer el mateix; però una vegada escollit el menor d'ordre r, s'ha de transformar el sistema d'equacions inicial, de

manera que les incògnites que no corresponguin amb una columna del menor anterior, s'han de situar a l'altre costat del signe igual. Així s'obtindrà un sistema amb r incògnites, que es podrà expressar en forma matricial. Així, també la B contindrà alguna de les incògnites. Ara ja es podrà resoldre el nou sistema de la mateixa forma (perquè es tracta d'un sistema amb r incògnites, la matriu de la qual té rang r). S'ha d'assenyalar que la solució, en aquest cas, vindrà donada en termes d'algunes de les incògnites, per la qual cosa no serà una solució única.
Per exemple, el sistema

$$\begin{cases} x+y+z-w=1 \\ y-z+w=-1 \\ 3x+6z-6w=6 \\ -y+z-w=1 \end{cases} \text{ que equival a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en aquest cas, rang(A) = rang(A^*) = 2 < 4. Per tant, primer s'ha de modificar el sistema original:

$$\begin{cases} x+y+z-w=1 \\ y-z+w=-1 \\ 3x+6z-6w=6 \\ -y+z-w=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y=1-z+w \\ y=-1+z-w \\ 3x=6-6z+6w \\ -y=1-z+w \end{cases}$$

que en forma matricial s'expressa així:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \\ 6-6z+6w \\ 1-z+w \end{pmatrix}$$

si escollim un menor de rang 2 obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \end{pmatrix}$$

per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z+2w \\ -1+z-w \end{pmatrix}$$

podem donar el valor que vulguem a z i w, i per cadascun d'aquests tindrem una solució del sistema.

Com es fan servir les matrius per a agilitar el mètode de Gauss?

> Es pot reescriure el mètode de Gauss par a la resolució d'equacions, utilitzant només la matriu ampliada del sistema, sense necessitat d'escriure repetidament les incògnites.

Es pot utilitzar el mètode de Gauss par a la resolució d'equacions transformant només la matriu ampliada, sense necessitat d'escriure repetidament les incògnites. Així, per exemple, per a resoldre aquest sistema:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y+z+2w=4 \\ y+w=0 \\ 2z+w=5 \end{cases}$$

els passos a seguir utilitzant Gauss serien:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\,y & & & =0\\ 2x & -\,2y & +\,z & +\,2w & =4\\ & y & & +\,w & =0\\ & & 2z & +\,w & =5 \end{array}\right. \xrightarrow{2^a-2\cdot 1^a} \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\,y & & & =0\\ & & z & +\,2w & =4\\ & y & & +\,w & =0\\ & & 2z & +\,w & =5 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a}$$

$$\xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a} \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\,y & & & =0\\ & y & & +\,w & =0\\ & & z & +\,2w & =4\\ & & 2z & +\,w & =5 \end{array}\right. \xrightarrow{4^a-2\cdot 3^a} \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\,y & & & =0\\ & y & & +\,w & =0\\ & & z & +\,2w & =4\\ & & & -3w & =-3 \end{array}\right.$$

i a continuació s'usa la substitució cap a enrere.

Aquests passos es poden escriure matricialment, utilitzant la matriu ampliada:

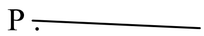
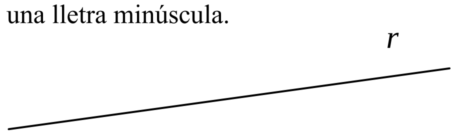
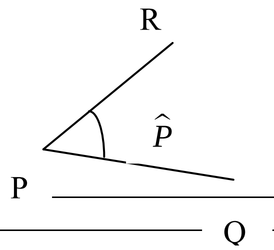
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0\\ 2 & -2 & 1 & 2 & 4\\ & 1 & & 1 & 0\\ & & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a-2\cdot 1^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0\\ & & 1 & 2 & 4\\ & 1 & & 1 & 0\\ & & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a}$$

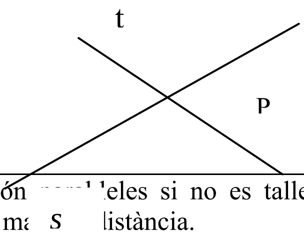
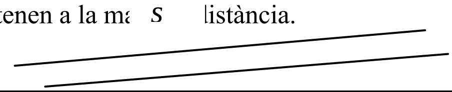
$$\xrightarrow{\text{intercanvi } 2^a/3^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0\\ & 1 & & 1 & 0\\ & & 1 & 2 & 4\\ & & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{4^a-2\cdot 3^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & & & 0\\ & 1 & & 1 & 0\\ & & 1 & 2 & 4\\ & & & -3 & -3 \end{array}\right)$$

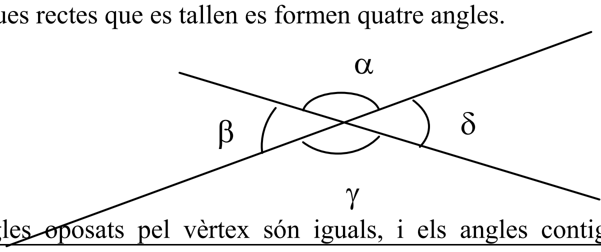
i, a continuació, s'aplica la substitució cap a enrere. D'aquesta manera se simplifica bastant l'expressió de la resolució.

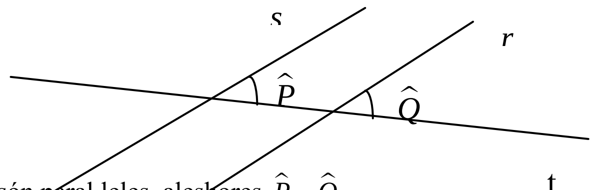
Elements de la geometria plana

Elements de la geometria plana

Els elements bàsics de la geometria plana	
El punt	El **punt** és l'element mínim del pla. Els altres elements geomètrics estan formats per punts. Habitualment, el punt es designa amb una lletra majúscula. . P
El segment	Un **segment entre dos punts P i Q** és la línia més curta que uneix P i Q. S'anomena segment PQ. P i Q són els **extrems** de el segment.  El **punt mig** d'un segment és el . del segment que es troba a la mateixa distància dels seus dos extrems.
La recta	A l'estendre un segment pels seus extrems sense límit, s'obté una **recta**. Habitualment, una recta es designa amb una lletra minúscula. 
L'angle	Un **angle** és l'obertura entre dos segments units per un extrem. Un angle es designa, habitualment, amb el nom de l'extrem en el que es forma, coronat pel símbol ^. 
	Principals angles
	L'angle nul, que mesura 0º. L'angle recte, que mesura 90º. L'angle pla, que mesura 180º. L'angle complet, que mesura 360º.
	Tipus principals d'angles
	L'angle agut, menor que 90º. L'angle obtús, major que 90º. L'angle convex, menor que 180º. L'angle còncau, major que 180º. Dos angles complementaris sumen 90º. Dos angles suplementaris sumen 180º.

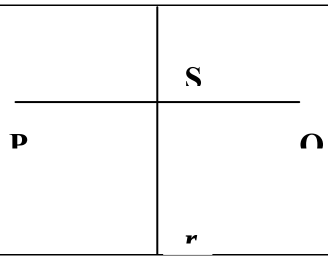
La posició de dues rectes	
Intersecció de rectes	Dues rectes s'intersequen o tallen si tenen algun punt en comú. Aquest punt s'anomena punt d'intersecció. 
Rectes paral·leles	Dues rectes són paral·leles si no es tallen mai, és a dir, sempre es mantenen a la mateixa distància. 

Els angles entre rectes que es tallen	
Definicions	Entre dues rectes que es tallen es formen quatre angles.  Els angles oposats pel vèrtex són iguals, i els angles contigus són

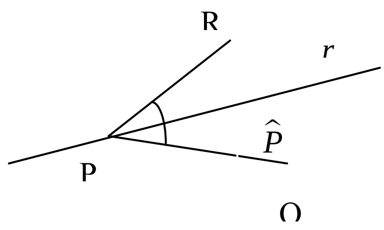
	suplementaris. Dues rectes són perpendiculars si un dels angles que formen entre elles és recte (de 90º).
Angles i rectes paral·leles	 Si r i s són paral·leles, aleshores $\hat{P} = \hat{Q}$

La mediatriu i la bisectriu

La mediatriu d'un segment és la recta perpendicular al segment que passa pel seu punt mig.

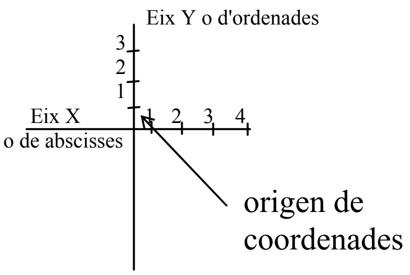


La bisectriu d'un angle és la recta que el divideix en dues parts iguals.



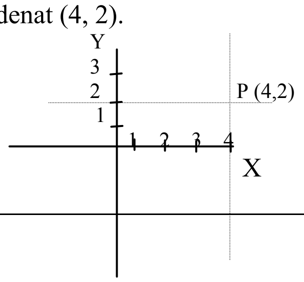
La representació dels punts del pla

- Sistema de representació cartesià



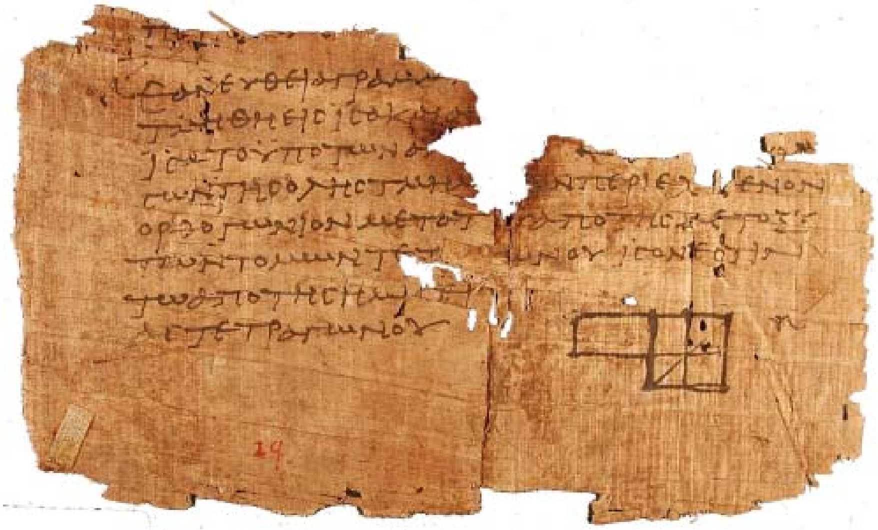
- Representació d'un punt, expressat com un parell ordenat (x,y)

Es representa el punt P, que és igual al parell ordenat (4, 2).



La geometria en la història

La geometria és una de les disciplines matemàtiques més antigues, desenvolupada amb gran intensitat pels grecs antics (Euclides, Arquimedes, Apol·loni de Perga, etc.). En qualsevol cas, alguns historiadors deien que cal buscar el seu origen a Egipte: les crescudes periòdiques del Nil desfeien els límits dels camps de cultiu instal·lats al seu pas. Aquest fet anual va afavorir l'estudi de la forma i la grandària d'aquests terrenys per a poder reproduir-los una vegada finalitzada la crescuda del riu.
Encara que no és probable que aquest sigui el veritable origen de la geometria, mostra clarament l'objecte d'estudi de la geometria: la forma i la grandària dels objectes. Aquesta disciplina és molt útil, a part de per a l'agricultura, en l'estudi de l'univers, en l'arquitectura, en el disseny industrial, etc. En aquest capítol ens centrarem en l'estudi de la geometria plana, és a dir, la qual s'ocupa dels objectes situats sobre un pla (que hauríem d'imaginar com un immens paper, de gran extensió).
En la il·lustració pot veure's un fragment d'un rotllo de papir dels primers anys de l'era actual. Es va trobar entre 1896-7, entre piles de deixalles de la ciutat antiga de Oxirinc, prop de la actual llogaret de Behnesa (a uns 150 km de distància de El Caire, riu amunt) per l'expedició de B. P. Grenfell i A. S. Hunt de la Universitat de Oxford (ara està guardat en la Universitat de Pennsilvanià). Oxirinc era en aquella època un poblat de colons grecs, un romanent de la conquesta del 330 d. de C. d'Alexandre Magne. Es creu que Euclides mateix va viure i va ensenyar a Alexandria al voltant de 300 a . C.
El fragment conté l'enunciat, en grec, de la Proposició 5 del llibre II dels *Elements* de Euclides. No hi ha resta de la demostració d'aquesta proposició. Les paraules no estan separades unes d'unes altres, pràctica normal en els manuscrits grecs del període.



La seva traducció diria així: "Si una línia recta es talla en dos segments iguals i dos segments desiguals, llavors el rectangle format pels segments desiguals més el quadrat de costat igual a la distància entre els punts, és igual al quadrat de costat la meitat de tota la línia". Dit d'altra manera, pot ser interpretat en termes algebraics de la següent forma:

$$ab + (a - b)^2/4 = (a + b)^2/4.$$

Quins són els elements bàsics del pla?

> Els elements bàsics del pla són els punts, els segments i els angles. L'element mínim del pla és el punt. Un segment és la línia més curta entre dos punts. Finalment, un angle és l'obertura que es forma entre dos segments que coincideixen en un punt.

L'element mínim del pla és el punt. Pot imaginar-se com la marca que deixa un llapis a l'impactar sobre un paper només amb la punta. El pla està ple de punts i qualsevol objecte pla està format per un grup d'aquests punts. Per a diferenciar un punt d'un altre, aquests solen denominar-se amb lletres majúscules. Per exemple, la següent il·lustració conté els punts A i B:

. A

. B

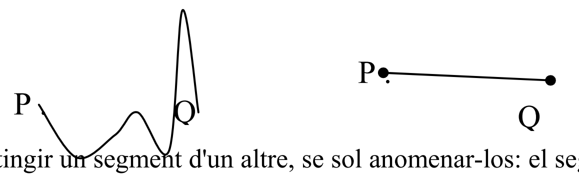
El punt mig entre dos punts P i Q és aquell que es troba a la mateixa distància de P que de Q. Per exemple, S és el punt mig de P i Q.

P .

. S

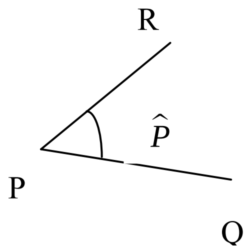
. Q

Un segment entre dos punts, P i Q, és la línia més curta que s'inicia a P i acaba a Q. En aquesta il·lustració, només la línia de la dreta és un segment. Els punts que limiten el segment es denominen extrems. Tal com pot observar-se en la imatge, han de marcar-se tant la línia, com els seus extrems per a representar correctament un segment. De vegades, per a simplificar, no es marquen els extrems si queda suficientment clar que es tracta d'un segment (perquè es troben les lletres dels punts).



Per a distingir un segment d'un altre, se sol anomenar-los: el segment d'extrems P i Q s'anomena segment PQ. La distància entre P i Q és la longitud del segment PQ.
Un angle es forma a partir de dos segments que tenen un extrem comú. Aquest extrem se sol denominar vèrtex. L'amplitud d'un angle és l'obertura que hi ha entre aquests dos segments. Normalment, a l'amplitud d'un angle se l'anomena simplement angle. Una de les formes d'indicar un angle consisteix a usar la mateixa lletra que el punt on es forma, coronada amb el signe ^. Per exemple:

L'angle es forma al voltant del punt P i, per això, se l'anomena $\widehat{P}$. De vegades, els angles s'anomenen amb lletres de l'alfabet grec: $\alpha, \beta, \gamma ...$ També és possible denominar-los amb una expressió formada per les lletres dels 3 punts que formen l'angle, coronats per ^. Per exemple, l'angle anterior també podria denominar-se $\widehat{QPR}$.



Com es mesuren els elements bàsics del pla?

> El Sistema Internacional d'Unitats utilitza el metre (m) com a unitat de mesura de la distància i el radian (rad) com a unitat de mesura dels angles plans. En qualsevol cas, està molt estès l'ús del grau sexagesimal en la mesura dels angles, d'origen molt antic.

El Sistema Internacional de Mesures estableix el metre com unitat de mesura de la longitud. El símbol que la representa és una m. El sistema d'unitats del metre i les seves equivalències és el següent:

> El Sistema Internacional d'Unitats és el nom adoptat per la XI Conferència General de Pesos i Mesures (celebrada a París en 1960) per a un sistema universal, unificat i coherent d'unitats de mesura, basat en el sistema *mks* (metre–quilogram–segon). Aquest sistema es coneix com SI, inicials de Sistema Internacional. En la Conferència de 1960 es van definir els patrons per a sis unitats bàsiques o fonamentals (metre, quilogram, segon, grau, amper i la candela) i dues unitats suplementàries (radian i estereoradiant); en 1971 es va afegir una setena unitat fonamental, el mol. Les dues unitats suplementàries es van suprimir com una classe

Unitats	Símbol	Equival a Equival	a.
kilòmetre	km	1000 m	10^3 m
hectòmetre	hm	100 m	10^2 m
decàmetre	dam	10 m	10^1 m
metre	m	1 m	10^0 m
decímetre	dm	0,1 m	10^{-1} m
centímetre	cm	0,01 m	10^{-2} m
mil·límetre	mm	0,001 m	10^{-3} m

Així, doncs, el quilòmetre, el hectòmetre i el decàmetre són múltiples del metre, mentre que el decímetre, el centímetre i el mil·límetre són submúltiples del metre. La taula podria estendre's més, amb més múltiples i submúltiples del metre.

Els angles es mesuren, tradicionalment, en graus (denominats graus sexagesimals), que s'indiquen amb º, i la seva mesura pot anar de 0º a 360º. Ara bé, els angles també poden expressar-se en radians (rad) tenint en compte aquesta equivalència:

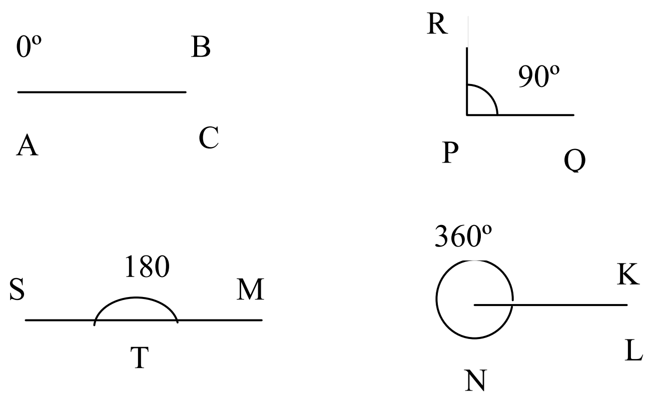
$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

és a dir, 1 rad = $180/\pi$ graus $\cong$ 57,3º. Per tant, per a transformar graus sexagesimals en radians ha de dividir-se entre $180/\pi$; en canvi, per a transformar radians en graus sexagesimals, ha de multiplicar-se per $180/\pi$. Per exemple

$$3 \text{ rad} \; \underset{\text{dividint entre } \frac{180}{\pi}}{\overset{\text{multiplicant per } \frac{180}{\pi}}{\approx}} \; 171{,}9^{\circ}$$

Alguns dels angles més comuns són:

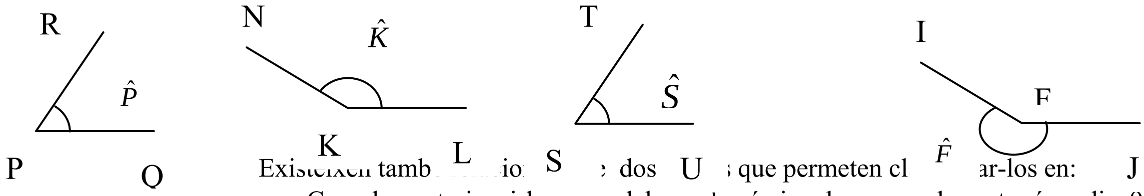
- L'angle nul, que mesura 0º o 0 rad. L'angle $\hat{A} = 0^{\circ}$
- L'angle recte, que mesura 90º o $\pi/2$ rad. L'angle $\hat{P} = 90^{\circ}$.
- L'angle pla, que mesura 180º o π rad. L'angle $\hat{T} = 180^{\circ}$.
- L'angle complet, que mesura 360º o 2π rad. L'angle $\hat{N} = 360^{\circ}$.



La principal classificació dels angles, basada en la comparació amb l'angle recte i l'angle pla, distingeix:

- Angles aguts: qualsevol angle menor que l'angle recte. Per exemple, $\hat{P} = 39^{\circ}$ és un angle agut.
- Angles obtusos: qualsevol angle major que l'angle recte. Per exemple, $\hat{K} = 120^{\circ}$ és un angle obtús.

- Angles convexos: qualsevol angle menor que l'angle pla. Per exemple, $\hat{S} = 65º$ és un angle convex.
- Angles còncaus: qualsevol angle major que l'angle pla. Per exemple, l'angle $\hat{F} = 245º$ és un angle còncau.



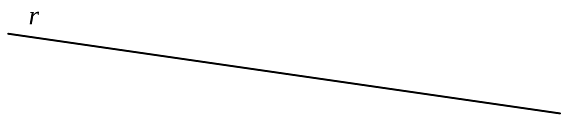
Exis[illegible] tamb[illegible] io[illegible] dos [illegible] que permeten cl[illegible]ar-los en:

- Complementaris: si la suma dels angles és igual a un angle recte, és a dir, 90º. Per exemple, 42º és el angle complementari de 48º, ja que 42º + 48º = 90º.
- Suplementaris: si la suma dels angles és igual a un angle pla, és a dir, 180º. Per exemple, 49º és l'angle suplementari de 131º, ja que 49º + 131º = 180º.

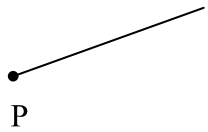
Què és una recta i quin és la seva relació amb els altres elements bàsics?

> Un altre dels elements essencials que podem trobar en el pla és la recta. Una recta pot imaginar-se com una prolongació sense fi d'un segment, per ambdós extrems. En el cas en el que només es perllongui un dels seus extrems, s'anomena semirecta. Dues rectes del pla poden o bé ser paral·leles, o bé tallar-se o intersecar-se en un únic punt. En aquest cas, entre ambdues rectes es formen 4 angles.

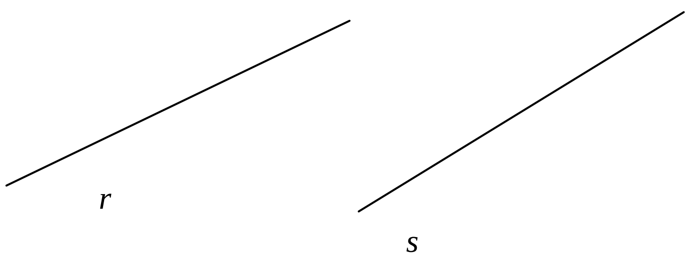
Al continuar indefinidament un segment per ambdós extrems, seguint la mateixa línia, s'obté una recta. Pot imaginar-se una recta, doncs, com un segment il·limitat i sense extrems. Normalment, una recta es designa amb una lletra minúscula, en general, una consonant. La representació d'una recta mai pot realitzar-se de forma completa perquè hauríem de sortir dels límits del paper en el que es representa. Per això, la seva representació és molt similar a la d'un segment, amb dues excepcions: no es marquen extrems i es denomina amb una sola lletra, generalment minúscula. Així, per exemple, aquesta podria ser la recta *r*:



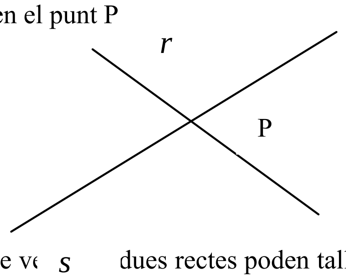
Una semirecta, a diferència d'una recta, només s'estén il·limitadament per un extrem, mentre que per l'altre té com extrem un punt. Per exemple, aquesta il·lustració podria representar una semirecta:



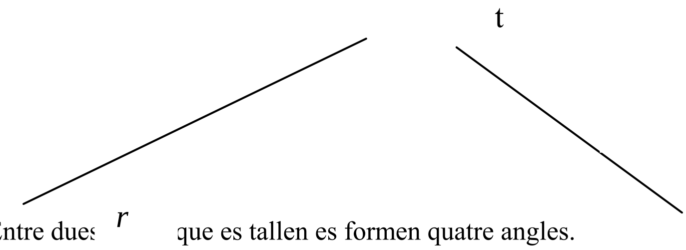
Dues rectes situades en el pla poden o bé tallar-se o intersecar-se, o bé ser paral·leles. Les rectes paral·leles són aquelles que mai es tallen, ni tan solament fora de l'àrea representada. Per exemple, *r* i *s* són rectes paral·leles:



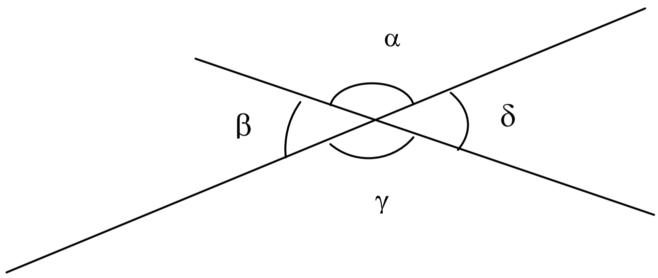
És evident que si dues rectes són paral·leles, i una d'elles és paral·lela a una tercera, l'altra recta també ha de ser paral·lela a aquesta tercera. De la mateixa manera, si una recta talla una recta, també ha de tallar a totes les rectes que són paral·leles a aquesta (encara que ho faci fora de l'àrea del dibuix).
Dues rectes poden tallar-se (o intersecar-se) en un punt, anomenat punt d'intersecció. Per exemple, el punt P de la il·lustració pertany tant a la recta *r* com a la recta *s*; per tant, *r* i *s* es tallen en el punt P



Cap destacar que, de vegades dues rectes poden tallar-se fora de l'àrea dibuixada; aon així, ha de dir-se que es tallen. Per exemple, les rectes *r* i *t* es tallen fora de l'àrea dibuixada:



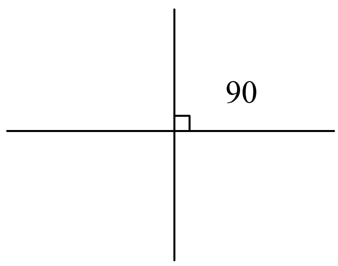
Entre dues rectes que es tallen es formen quatre angles.



Es diu que els angles α i γ són oposats pel vèrtex; de la mateixa manera, els angles β i δ són oposats pel vèrtex. En canvi, es diu que els angles α i β són contigus; de la mateixa manera, α i δ són contigus, β i γ són contigus, γ i δ són contigus. Aquests angles tenen aquestes propietats, fàcils d'observar:

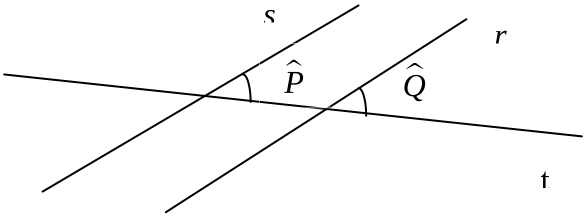
- Dos angles oposats pel vèrtex són iguals. És a dir, $\alpha = \gamma$, i $\beta = \delta$.
- Dos angles contigus són suplementaris, és a dir, sumen 180º. Per tant, $\alpha + \beta = 180º$, $\alpha + \delta = 180º$, $\beta + \gamma = 180º$, $\gamma + \delta = 180º$.

Aquestes dues propietats ens asseguren que coneixent només un dels angles de la intersecció de dues rectes, podem conèixer els altres tres de manera immediata.
Entre les rectes que es tallen, mereixen un comentari especial les quals formen un angle recte; dues rectes que compleixin aquesta propietat es denominen perpendiculars. Per exemple, aquestes rectes són perpendiculars:



Normalment, l'angle recte entre dues rectes sol indicar-se amb un petit quadrat aixecat sobre la intersecció de les rectes, tal com pot observar-se en la imatge. També

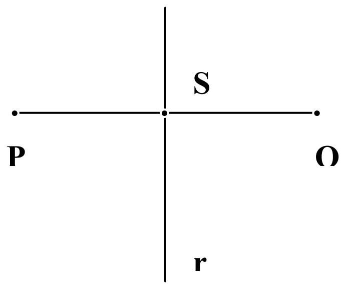
pot observar-se fàcilment que si un dels angles entre les dues rectes és de 90º, tots ells han de ser de 90º: l'oposat ha de ser de 90º; els dos contigus a l'angle recte també han de ser de 90º, ja que només aquest angle, sumat al recte, resulta 180º.
Si dues rectes, *r* i *s* , són paral·leles i una altra recta, *t*, talla a ambdues, els angles formats entre *r* i *t* són els mateixos que els formats entre *s* i *t*. Pot comprovar-se observant aquesta il·lustració que $\hat{P} = \hat{Q}$.



Què és la mediatriu d'un segment i com es construeix?

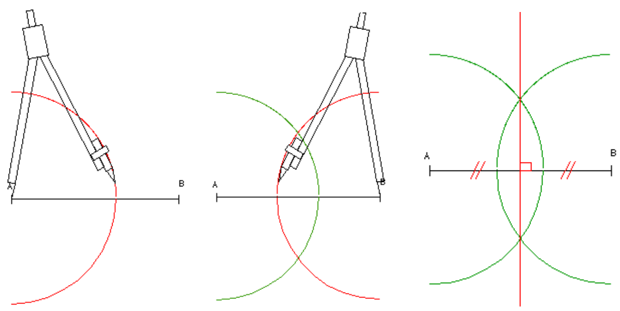
> La mediatriu d'un segment és la recta que passa pel punt mig d'aquest segment i és perpendicular al segment. Per a traçar la mediatriu d'un segment només és necessari utilitzar una regla i un compàs.

La mediatriu d'un segment PQ és la recta perpendicular a aquest segment que passa pel seu punt mig. Per exemple, la recta *r* és la mediatriu del segment PQ, ja que passa per S, que és el punt mig entre P i Q, i és perpendicular al segment PQ.



Per a dibuixar la mediatriu d'un segment, AB, utilitzant únicament una regla i un compàs, s'han de seguir aquests passos:

1. Fixar l'amplària del compàs, menor que la longitud de AB, però major que la meitat de la longitud de AB.
2. Fixar la punta del compàs en el punt A i dibuixar una circumferència.
3. Fixar la punta del compàs en el punt B i dibuixar una circumferència.
4. Traçar la recta que uneix els punts que tallen ambdues circumferències. Aquesta recta és la mediatriu del segment.



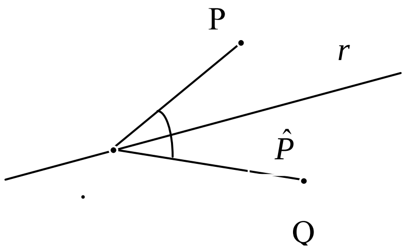
La regla i el compàs
Des de molt antic, els dos instruments bàsics per a la construcció de figures geomètriques en el pla són la regla i el compàs: la regla permet dibuixar rectes, mentre que el compàs permet unir punts que es troben a una mateixa distància d'un donat (sobre el qual es dóna suport una de les potes del compàs), és a dir, una circumferència.
En l'antiga Grècia es pensava que les figures més elegants i dignes d'estudi eren les quals podien representar-se només amb aquests instruments perquè els dibuixos resultants es consideraven perfectes: la recta i la circumferència. Ara bé, no per això van deixar de treballar amb d'altres instruments per a realitzar les seves construccions geomètriques, encara que el seu objectiu era poder realitzar-los amb regla i compàs. De fet, existeixen tres famosos problemes que van tractar de resoldre amb regla i compàs, sense cap èxit:

- La trisecció d'angles, és a dir la divisió d'un angle en tres parts.
- La quadratura del cercle, és a dir, la construcció d'un quadrat que tingués la mateixa àrea que un cercle donat.
- La duplicació del cub, és a dir, la construcció d'un cub que tingués l'àrea igual al doble d'un de donat.

Què és la bisectriu d'un angle i com es construeix?

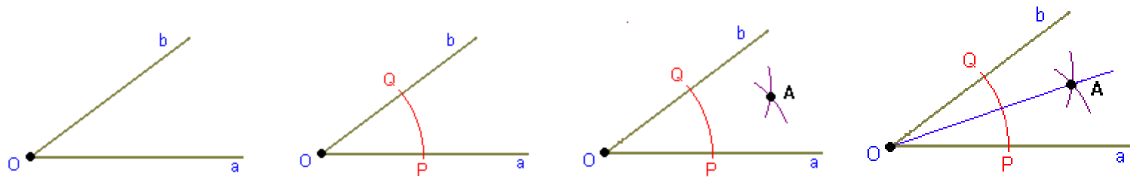
> La bisectriu d'un angle és la recta que el divideix per la meitat. Per a construir la bisectriu d'un angle només cal usar la regla i el compàs.

La bisectriu d'un angle és la recta que el divideix en dos iguals. Per exemple, en la figura, la recta *r* és la bisectriu de l'angle $\hat{O}$.



Per a construir la bisectriu d'un angle $\hat{O}$, utilitzant solament regla i compàs, s'han de seguir aquests passos:

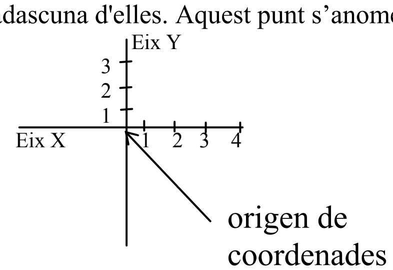
1. Fixar l'amplitud del compàs en aproximadament la meitat d'un dels segments.
2. Fixar la punta del compàs sobre l'extrem O.
3. Marcar les interseccions de la circumferència amb els segments amb les lletres Q i P.
4. Fixar el compàs sobre Q i dibuixar la part de la circumferència que es troba en l'interior de l'angle. Fer el mateix sobre P.
5. Marcar la intersecció amb la lletra A.
6. Dibuixar la recta que passa per O i per A. Aquesta recta és la bisectriu de l'angle $\hat{O}$.



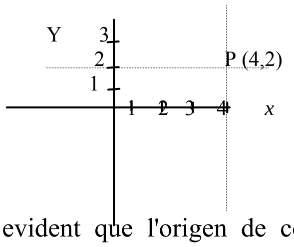
Com es representen els punts del pla utilitzant un sistema de representació cartesià?

> Els punts del pla, i qualsevol altre element construït a partir d'aquests, poden manipular-se de manera òptima utilitzant un sistema de representació cartesià. Qualsevol punt queda referenciat a aquest sistema de dos eixos, un d'abscisses o eix X, i altre d'ordenades o eix Y. D'aquesta manera, un punt pot designar-se amb un parell ordenat, (*x*,*y*), la primera coordenada de la qual correspon a l'eix X, i la segona, a l'eix Y.

Per a poder manipular de manera òptima els punts del pla, o qualsevol altre objecte del pla, és útil utilitzar un sistema de representació cartesià, que té aquestes característiques: està format per dues rectes perpendiculars, cadascuna d'elles representant la recta real, denominades eixos de coordenades cartesianes. La recta horitzontal s'anomena eix d'abscisses, o eix X, i la recta vertical, eix d'ordenades o eix Y. No és necessari que les unitats marcades en ambdós eixos siguin les mateixes. Normalment, la intersecció d'ambdues rectes es correspon amb el punt 0 de cadascuna d'elles. Aquest punt s'anomena origen de coordenades.



Per a expressar un punt del pla amb l'ajut dels eixos de coordenades, o punt coordenat, es pot seguir aquest procediment:
(1) Es traça una paral·lela a l'eix d'ordenades que passi pel punt, i es talla amb l'eix d'abscisses; el nombre resultant és la coordenada de l'eix d'abscisses, o coordenada *x*.
(2) Es traça una paral·lela a l'eix d'abscisses que passi pel punt, i es talla amb l'eix d'ordenades; el nombre resultant és la coordenada de l'eix d'ordenades, o coordenada *y*.
(3) El punt s'expressa en forma de parell ordenat, és a dir, com un parell de nombres tancats entre parèntesis i separats per una coma: el primer nombre és la coordenada *x*, el segon nombre és la coordenada *y*.
En l'exemple següent, es representa el punt P, que és igual al parell ordenat (4, 2).

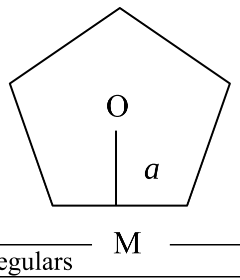


És evident que l'origen de coordenades és el punt (0,0). El pla així coordenat s'anomena, també, pla cartesià.

Les figures planes

Les figures planes

Classificació dels polígons

Per la forma dels angles interiors	convexos	Tenen tots els angles interiors convexos.
		Elements
		Costats: el seu nombre és n.
		Vèrtexs: el seu nombre és n.
		Angles: la suma total és $180 \cdot (n - 2)$
		Diagonals: segment que uneix els vèrtexs no contigus. En total, un polígon té $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonals.
	còncaus	Tenen algun angle interior còncau.
Per la regularitat dels angles	regulars 	Tenen tots els angles iguals.
		Característiques
		Tots els angles mesuren $\frac{180\cdot(n-3)}{n}$ graus.
		L'apotema
		L'apotema, a , és la distància entre el punt mig d'un costat i el centre del polígon.
	irregulars	Tots els altres.

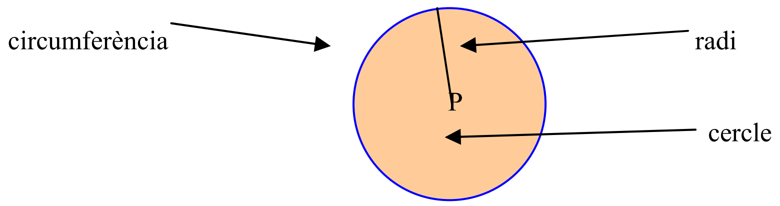
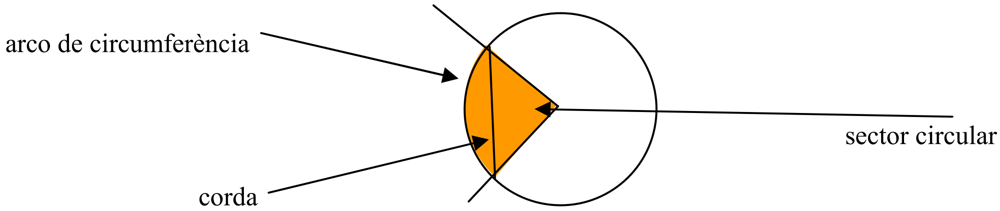
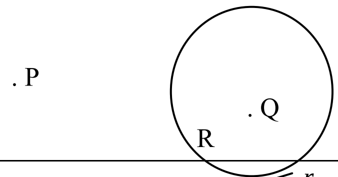
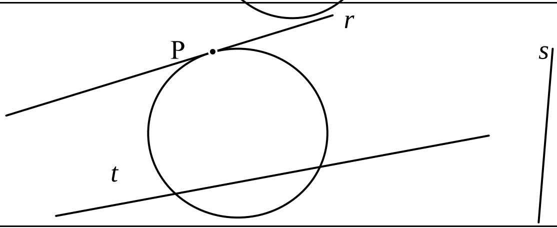
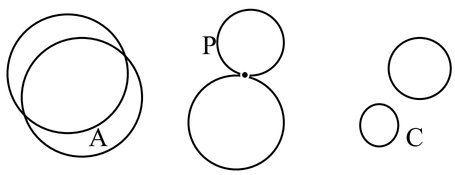
Perímetres i àrees

Els polígons regulars

El perímetre	Si n és el nombre de costats i l la seva longitud, $P = n \cdot l$
L'àrea	Si n és el nombre de costats, l la seva longitud i a el seu apotema: $$A=\frac{n\cdot l\cdot a}{2}$$

Els quadrilàters

Trapezi: si els costats són a , b, c i d: $P=a+b+c+d$	Trapezi: si b i B són les bases i h l'altura: $A=\frac{(b+B)\cdot h}{2}$
Paral·lelogram: si els costats del paral·lelogram són a i b: $P=2a+2b$ Quadrat: si el seu costat és c: $P=4c$	Paral·lelogram: si b és la base i h és l'altura: $A=b\cdot h$ Rombe: si d i D són les seves diagonals: $A=\frac{d\cdot D}{2}$ Rectangle: si a i b són els costats: $A=a\cdot b$ Quadrat: si c is el costat: $A=c^2$

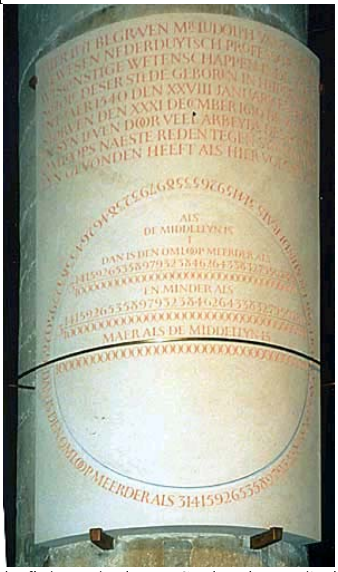
<table>
<tr><td>La circumferència</td><td>El cercle</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Una circumferència de radi r i centro P, és el conjunt de punts que es troben a una distancia r del punt P</td><td>Un cercle és la superfície tancada per una circumferència.</td></tr>
<tr><td>L'arc i la corda</td><td>El sector circular</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>La longitud d'una circumferència: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$</td><td>L'àrea d'un cercle: $A\ \pi \cdot = r^2$</td></tr>
<tr><td>La longitud d'un arc de circumferència</td><td>L'àrea d'un sector circular</td></tr>
<tr><td>La longitud d'un arc de circumferència, L_A, si l'angle α està expressat en graus sexagesimals és
$$L_A = \frac{\alpha}{360} \cdot L$$
si α està expressat en radians:
$$L_A = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot L \quad = \alpha r$$</td><td>L'àrea d'un sector circular, A_S, si l'angle α està expressat en graus sexagesimals és
$$A_S = \frac{\alpha}{360} \cdot A$$
si α està expressat en radians:
$$A_S = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A \quad = \alpha r^2/2.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">La circumferència i els altres elements del pla</td></tr>
<tr><td>
- Q és un punt interior a la circumferència.
- P és un punt exterior a la circumferència.
- R és un punt de la circumferència.
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
- t és una recta secant a una circumferència.
- r és una recta tangent a una circumferència. El punt P és el punt de tangència.
- La recta s no talla a la circumferència.
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
- Les dues circumferències de la il·lustració A són secants.
- Les dues circumferències de la il·lustració B són tangents. El punt de tangència és P
- Les dues circumferències de la il·lustració C no es tallen.
</td><td>
</td></tr>
</table>

El nombre π en la història

Ja en l'antiguitat, els matemàtics van advertir que en totes las circumferències existia una estreta relació entre la seva longitud (o perímetre) i el seu diàmetre (o el seu radi), però només des del segle XVII la relació es va convertir en un nombre i va ser identificat amb el nom π, "Pi" (utilitzant la primera lletra de *periphereia*, nom que els grecs donaven al perímetre d'un cercle), però no va ser fàcil demostrar que aquest nombre era irracional.
Al llarg de la història, l'expressió de π ha assumit moltes variacions. La Bíblia li assigna el valor 3 en el versicle Reis, 7, 23:

> També, de bronze fos, va fer una gran conquilla, coneguda pel nom de Mar, completament rodona, que tenia cinc metres de vora a borda, i dos metres i mig d'altura. Un fil de quinze metres mesurava el seu contorn

A Babilònia ho van calcular en 3 1/8; els egipcis, en $4(8/9)^2$; Siddhantas, 3,1416; Brahmagupta, 3,162277; i en l'antiga Xinesa, 3,1724.
Va ser a Grècia on l'exacta relació entre el diàmetre i el perímetre d'una circumferència va començar a considerar-se un dels enigmes que s'havien de resoldre. Arquimedes (s. III a, de C.) reuní i desenvolupà resultats d'altres matemàtics grecs, i mostrà que l'àrea d'un cercle és la meitat del producte del seu radi per la seva circumferència, i que la relació de la circumferència al diàmetre està compresa entre 223/71 = 3,14084 i 22/7 = 3,14285.
Amb el Renaixement, els treballs de mesura de la circumferència es multipliquen. Peuerbach, ajudant-se d'una taula de sinus, adopta per a π el valor 377/120 = 3,14666.... Els segles XV i XVI es destaquen pel desenvolupament de la trigonometria, sota l'impuls de Copèrnic i Kepler. Rhaeticus construeix una taula de sinus en la qual s'inclou a π amb 8 decimals exactes. Adrien Romain (1561-1615) obté 15 decimals i Ludolph de Colònia (1539-1610) arriba fins a 32. Segons el seu desig, aquests 32 decimals van ser gravats en la seva tomba, però en el seu país la posteritat ho va recompensar molt millor, doncs es va donar π al nom de "nombre de Ludolph".



Reproducció de l'epitafi de Ludoph van Ceulen, ja que l'original es va destruir.

Aviat, la proesa de Ludolph va ser eclipsada pels treballs de Snell (1580-1626) i Huyghens (1629-1655). Des d'aquest moment fins a l'actualitat, no ha fet més que augmentar el nombre de decimals que s'han trobat de π (fins a arribar al us 206.158.430.000 decimals aconseguits per Kanada el 1999). La veritat és que només quatre decimals de π donen suficient precisió per a les necessitats pràctiques. Amb 16 decimals s'obté la longitud d'una circumferència que tingui per radi la distància mitja de la Terra al Sol, amb l'únic error de l'espessor aproximat d'un cabell. Si reemplacem el Sol per la nebulosa més llunyana i el cabell pel corpuscle més petit conegut pels físics, no farien falta més de 40 decimals.
És molt més remarcable esmentar que la irracionalitat de π va ser demostrada per Légendre en 1794, i que una nova i més simple demostració de la irracionalitat de π va ser donada 1947 per I. Niven.

Què és un polígon?

> Un polígon és una figura plana i tancada per diversos segments units pels seus extrems, segments que es denominen costats del polígon. Els polígons es denominen amb el prefix grec que indica el nombre de costats, i el terme *-gon*, encara que també pot denominar-se polígon de *n* costats. Els polígons poden classificar-se en còncaus o convexos i també, en regulars i irregulars.

La paraula *polígon* està formada pel prefix grec *poli-*, que significa ‘molts', i per - *gonos*, que significa ‘angle' en grec. Així, doncs, polígon significa ‘figura amb molts angles.

Un polígon és una figura plana i tancada formada per diversos segments units, dos a dos, pels seus extrems. Cada segment es denomina costat del polígon i cada extrem que uneix dos segments es denomina vèrtex. Els polígons es denominen segons el nombre de costats (o d'angles) que tenen. Els noms utilitzen un prefix grec que indica el nombre de costats i un sufix, *-gon*, que significa ‘angle'. Per exemple, el polígon de 5 costats es denomina pentàgon perquè el prefix *penta-* significa ‘cinc' en grec; igualment, hexàgon és el polígon de 6 costats perquè *hexa-* significa ‘sis'. Aquesta taula recull alguns dels polígons més importants, a part del triangle, que es tracta en altre capítol:

Nombre d'angles (o costats)	Prefix grec	Nom del polígon
4	*tetra-*	tetràgon
5	*penta-*	pentàgon
6	*hexa-*	hexàgon
7	*hepta-*	heptàgon
8	*octa-*	octàgon
9	*ennea-*	enneàgon
10	*deca-*	decàgon
11	*hendeca-*	hendecàgon
12	*dodeca-*	dodecàgon

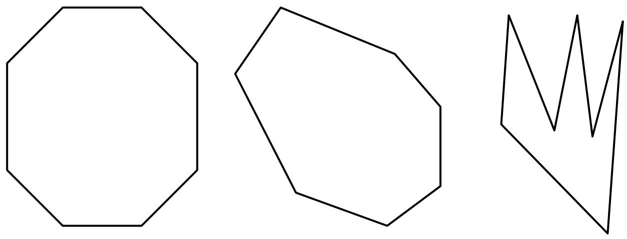
En tot cas, un polígon amb més costats sol denominar-se amb la paraula *polígon* seguida del nombre de costats: per exemple, polígon de 18 costats. En el cas del polígon de 4 costats, també pot denominar-se quadrilàter.
Els polígons poden classificar-se en:

- Polígons còncaus, que tenen algun dels seus angles interiors còncaus.
- Polígons convexos, que tenen tots els seus angles interiors convexos. En general, quan no es digui expressament el contrari, s'entendrà per polígon, un polígon convex.

Ara bé, els polígons també poden classificar-se segons la seva regularitat en:

- Polígons regulars, que tenen tots els costats i angles iguals entre si; per tant, els polígons regulars són tots convexos.

- Polígons irregulars, que són la resta dels polígons.



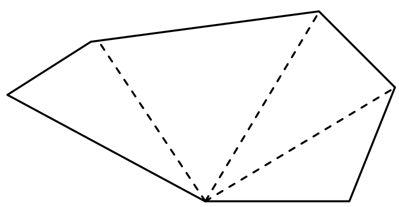
octàgon regular **octàgon irregular** **octàgon**

Quins són les característiques bàsiques d'un polígon?

> En qualsevol polígon poden distingir-se: costats, vèrtex i angles. Dos d'aquests elements són contigus si es troben un al costat de l'altre. Una diagonal d'un polígon és el segment que uneix dos vèrtex no contigus del polígon. Existeixen fórmules senzilles per a calcular la suma dels angles d'un polígon i el nombre de les seves diagonals.

Els elements essencials d'un polígon són els costats, vèrtex i angles (interiors i exteriors) d'un polígon. Es diu que dos d'aquests elements són contigus si es troben un al costat de l'altre.

Una diagonal d'un polígon és un segment que uneix dos vèrtex no contigus; en la il·lustració es poden observar totes les diagonals del polígon que poden traçar-se des del vèrtex P de l'hexàgon, que són tres. En general, en un polígon poden traçar-se des d'un punt tantes diagonals com costats, menys 3



P

Si denominem n al nombre de costats d'un polígon, acabem de veure que, des d'un vèrtex qualsevol poden traçar-se $n – 3$ diagonals. Amb aquestes diagonals, el polígon queda dividit en $n – 2$ triangles; però és sabut que la suma dels angles d'un triangle és igual a 180º; per tant, la suma dels angles d'un polígon és:

$$180(n - 2)$$

Per exemple, en el cas de la figura anterior, $n = 6$; des del punt P poden traçar-se 3 diagonals que divideixen el polígon en $n – 2 = 6 – 2 = 4$ triangles. Els angles de cada triangle sumen 180º, pel que la suma dels angles de l'hexàgon és $4 \cdot 180 = 720º$.

Si n és el nombre de costats d'un polígon, també té n angles i n vèrtex. Des de cada vèrtex poden traçar-se $n - 3$ diagonals; sumant totes aquestes diagonals resulta $n \cdot (n - 3)$. Ara bé, cada diagonal s'ha contat dues vegades (una per a cada vèrtex que la compon), per tant, per a conèixer el nombre total de diagonals que poden traçar-se en un polígon, s'ha de fer la següent operació:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Així, per exemple, un hexàgon té $6 \cdot (6–3)/2 = 9$ diagonals.

En aquest quadre es llisten els diferents elements d'un polígon, i el seu nombre:

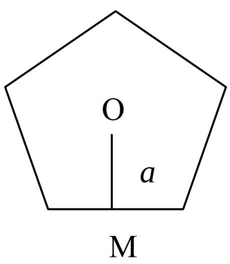
Nombre de costats d'un polígon.	n
Nombre de diagonals que es poden traçar des d'un vèrtex.	$n-3$.
Nombre de triangles en els que pot descompondre's un polígon.	$n-2$.
Suma dels angles d'un polígon.	$180 \cdot (n-2)$
Nombre de diagonals d'un polígon.	$\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

En aquesta taula es resumeixen el nombre de diagonals i la suma de tots els angles en els polígons més habituals:

Quins són les característiques bàsiques d'un polígon regular?

Nom del polígon	Nombre de costats	Nombre de diagonals que es poden traçar des d'un vèrtex	Nombre de triangles en els que pot descompondre's	Suma dels seus angles	Nombre de diagonals
Tetràgon	4	1	2	360º	2.
Pentàgon	5	2	3	540º	5.
Hexàgon	6	3	4	720º	9.
Heptàgon	7	4	5	900º	14.
Octàgon	8	5	6	1080º	20.
Enneàgon	9	6	7	1260º	27.
Decàgon	10	7	8	1440º	35.
Hendecàgon	11	8	9	1620º	44.
Dodecàgon	12	9	10	1800º	54.

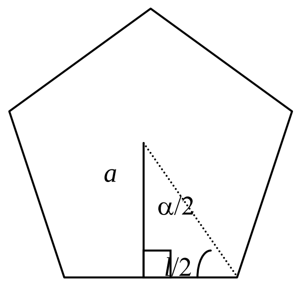
L'angle entre costats contigus d'un polígon regular només depèn del nombre de costats. Altres elements essencials d'un polígon regular són el seu centre i la longitud de l'apotema o distància del centre del polígon fins al centre d'un dels seus costats. Aquesta distància només depèn del número de costats i de la seva longitud.



Un polígon regular té tots els costats i tots els angles iguals. Aquest fet permet calcular l'angle, α, entre dos costats contigus qualssevol, ja que la suma de tots els angles d'un polígon de n costats és $180 \cdot (n-2)$. Així, doncs, cada angle té

$$\frac{180\cdot(n-2)}{n} \text{ graus}$$

En tot polígon regular pot definir-se el centre com aquell punt que equidista de tots els seus vèrtex. A partir del centre pot traçar-se un segment cap al punt mig d'un dels seus costats; a aquest segment se li denomina apotema, a. La figura mostra el apotema, OM, des del centre del pentàgon fins al punt mig d'un dels costats, M. Evidentment, el apotema pot traçar-se sobre qualsevol dels costats del polígon regular.
És evident que la longitud del apotema depèn de la longitud del costat del polígon regular, l, i del nombre de costats del polígon, n. Podem observar en aquesta imatge como el quocient entre el apotema, a , i la meitat del costat, l, del polígon és igual a la tangent de la meitat de l'angle, α, entre dos costats contigus.



Així, doncs:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{l/2}$$

En el cas del pentàgon, α = 108º, per tant:

$$tg\ 54 = \frac{a}{l/2}$$

per tant, $a = \frac{l \cdot \text{tg } 54}{2}$ per al cas del pentàgon. Per al cas d'un polígon regular de costat l, i angle entre costats $\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n}$ graus

$$a = \frac{l}{2}\text{tg}\ \frac{\alpha}{2}$$

L'exemple més senzill és, potser, l'hexàgon, ja que α = 120º. Així:

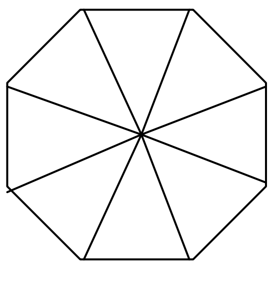
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$$

En aquesta taula es recull l'angle entre costats contigus i el valor del apotema, suposant que el costat l = 1.

Nom del polígon	*n*	Angle, α	Apotema, *a*.
Tetràgon regular	4	90º	0,50
Pentàgon regular	5	108º	0,69
Hexàgon regular	6	120º	0,87
Heptàgon regular	7	128,57º	1,04
Octàgon regular	8	135º	1,21
Enneàgon regular	9	140º	1,37
Decàgon regular	10	144º	1,54
Hendecàgon regular	11	147,27º	1,70
Dodecàgon regular	12	150º	1,87

Como es calcula el perímetre i l'àrea d'un polígon regular?

> El perímetre d'un polígon és la suma de les longituds dels seus costats i l'àrea d'un polígon és la mesura de la seva extensió. El perímetre d'un polígon regular és igual al producte de la longitud de cada costat pel nombre de costats. Per al càlcul de l'àrea només cal conèixer el nombre de costats i la seva longitud.



El perímetre, *P*, és molt fàcil de calcular, ja que tots els costats són iguals. Si *n* és el nombre de costats i *l* és la mesura de cadascun d'ells, evidentment, el perímetre d'un polígon és:

$$P = n \cdot l$$

L'àrea tampoc és difícil de calcular: es divideix el polígon regular en *n* triangles isòsceles, unint el centre del triangle amb cadascun dels vèrtex, tal com es veu en la il·lustració del octàgon regular.

Evidentment, per a calcular l'àrea del polígon, només ha de multiplicar-se pel nombre de costats l'àrea d'un dels triangles. Ara bé, la base d'un triangle és el costat, *l*, del polígon regular; l'altura del triangle és el apotema, *a*, del polígon. Per tant, l'àrea del triangle és

$$\frac{l\cdot a}{2}=\frac{l\cdot\frac{l}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{l^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Així, doncs, l'àrea d'un polígon regular de *n* costats, de costat *l* i angle $\alpha = \frac{180\cdot(n-2)}{n}$ entre costats, és igual a

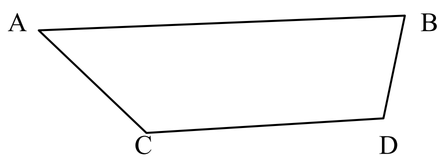
$$A=n\cdot\frac{l\cdot a}{2}=\frac{n\cdot l^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Quins són les característiques bàsiques d'un quadrilàter?

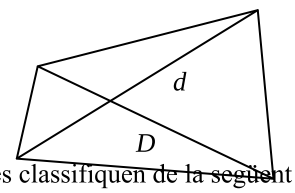
> Els quadrilàters estan entre els polígons més importants i estudiats, i per això és necessari estudiar-los amb més deteniment. Hi ha dos tipus essencials de quadrilàters: els trapezis i els paral·lelograms. Entre els primers, es troben els trapezis pròpiament dits i els trapezoides. Entre els segons, els més importants són els quadrats, rectangles i rombes. Les fórmules del perímetre i de l'àrea d'un quadrilàter són més senzilles com més regular és.

Juntament amb els triangles, els quadrilàters són un dels polígons més estudiats i importants de la geometria plana. Per això s'estudien amb més deteniment.
Dos elements qualssevol d'un quadrilàter (costats, angles o vèrtex) es denominen:

- contigus, si es troben un al costat de l'altre. Per exemple, en la figura, el costat AC és contigu al costat CD perquè comparteixen el vèrtex C; els vèrtex B i D són contigus perquè comparteixen el costat BD.
- oposats, en qualsevol altre cas. Per exemple, en la figura, els costats BD i AC. L'angle $\widehat{ABD}$ és oposat al vèrtex C

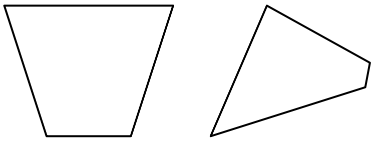


Les diagonals d'un quadrilàter són segments que uneixen vèrtex oposats. Normalment, la diagonal més curta s'indica amb la lletra *d*, i la major amb *la D*.



Els quadrilàters es classifiquen de la següent manera:

Els trapezis i els trapezoides



trapezi

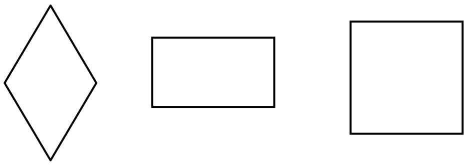
Un trapezi és un quadrilàter que només té dos costats paral·lels, denominats bases *b* (la base menor) i *B* (la base major). La distància entre aquests dos costats paral·lels es denomina altura (*h*).
Poden distingir-se tres tipus de trapezis:

- Trapezi rectangle, que té dos angles rectes.
- Trapezi isòsceles, que té dos angles iguals, que no són rectes.

  Trapezi escalè, que no té cap parell d'angles iguals.

Un trapezoide és un quadrilàter que no té cap parell de costats paral·lels.

Els paral·lelograms

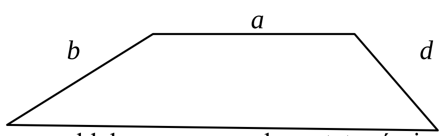


rombe rectangle quadrat

Un paral·lelogram és un quadrilàter que té els costats paral·lels dos a dos. Sol identificar-se la base com el costat major. La distància entre els altres dos costats no paral·lels a la base es denomina altura del paral·lelogram.

- El rombe és un paral·lelogram que té les diagonals perpendiculars.
- El rectangle és el paral·lelogram que té tots els angles iguals, és a dir, de 90º.
- El quadrat és el paral·lelogram que té tots els angles i tots els costats iguals.

- El perímetre d'un quadrilàter es calcula sumant tots els seus costats. Per exemple, si *a* , *b*, *c* i *d*, són els costats d'un trapezi, i cridem P al seu perímetre, llavors



$$P = a + b + c + d$$

En el cas d'un paral·lelogram, com els costats són iguals dos a dos, el seu perímetre és P = 2*a* + 2*b* sent *a* i *b* la mesura de dos costats desiguals. Finalment, en el cas concret d'un quadrat, els costats del qual són tots iguals, i que podem denominar *l*, el seu perímetre és: $P = 4l$

- L'àrea d'un quadrilàter pot obtenir-se aplicant una fórmula diferent segons el tipus de quadrilàter:

  - L'àrea d'un quadrat

  Si *l* és el costat, l'àrea del quadrat és $A = l^2$.

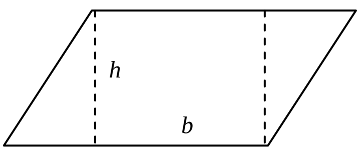
  - L'àrea d'un rectangle

  Si *b* és la base del rectangle i *h* és la seva altura, l'àrea del rectangle és $A = b \cdot h$

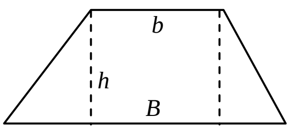
  - L'àrea d'un rombe

  Si *d* i *D* són les diagonals del rombe, la seva àrea és $A = \frac{d \cdot D}{2}$

  - L'àrea de qualsevol altre paral·lelogram

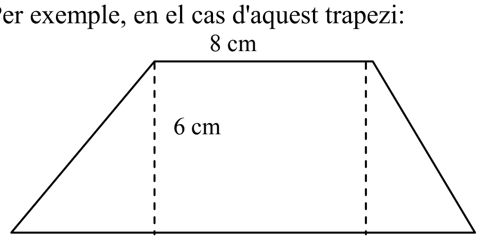


Si *b* és la base del paral·lelogram, i *h* és la seva altura, l'àrea del paral·lelogram és $A = b \cdot h$.
Si *b* és la base menor d'un trapezi, *B* la base major, i *h* l'altura, aleshores la seva àrea és



$$A = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$$

Per exemple, en el cas d'aquest trapezi:



4 cm 3 cm

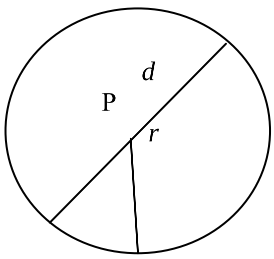
La seva àrea és igual a l'àrea del rectangle de 8 cm de base i 6 cm d'altura, més l'àrea dels dos triangles laterals. L'àrea del rectangle és $8 \cdot 6 = 48$ cm^2; l'àrea del triangle de l'esquerra és $4 \cdot 6/2 = 12$ cm^2; l'àrea del triangle de la dreta és $6 \cdot 3/2 = 9$ cm^2. Per tant, l'àrea total és $48 + 12 + 9 = 69$ cm^2. És el mateix resultat que s'obté amb la fórmula:

$$A = \frac{(b+B)\cdot h}{2} = \frac{(8+15)\cdot 6}{2} = 69 \text{ cm}^2$$

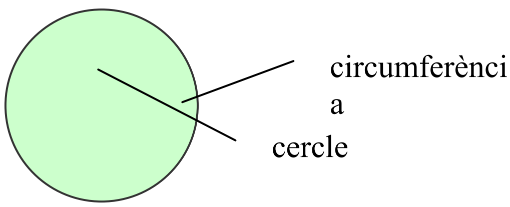
Què són la circumferència i el cercle i quins són els seus elements bàsics?

> Una circumferència és el conjunt de tots els punts situats a una mateixa distància d'un punt i un cercle és la superfície tancada per una circumferència. Els angles, els arcs i les cordes són els elements essencials de la circumferència. Els angles reben diferents denominacions segons el punt en el qual es tracen: angle central, angle inscrit, angle interior, etc. Un arc de circumferència és la part d'una circumferència que queda en l'interior d'un angle central. Una corda d'una circumferència és un segment que uneix dos punts qualssevol d'aquesta circumferència. El sector circular és una porció del cercle delimitada per dos radis.

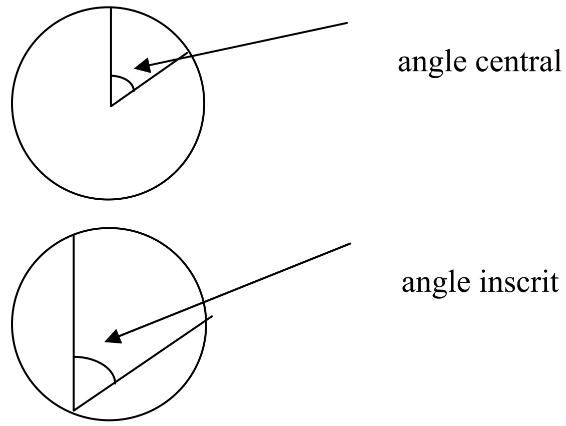
Una circumferència és el conjunt de tots els punts situats a una mateixa distància d'un punt donat. A aquest punt se l'anomena centre de la circumferència, i al segment que uneix el centre i qualsevol dels punts de la circumferència, radi, i, normalment, s'indica amb la lletra *r*. L'expressió completa seria: circumferència de centre P i radi *r*. Un diàmetre d'una circumferència és un segment que uneix dos punts de la circumferència passant pel seu centre, i sol denominar-se *d*. Així, $d = 2r$. El dibuix d'una circumferència es pot realitzar amb ajuda d'un compàs, obrint-lo fins a la mesura desitjada, fixant un dels seus extrems i realitzant un moviment circular amb l'altre braç del compàs. El radi de la circumferència és, precisament, l'amplitud del compàs.



El cercle és la superfície tancada per la circumferència. Així, doncs, mentre la circumferència és una línia, el cercle és una superfície.

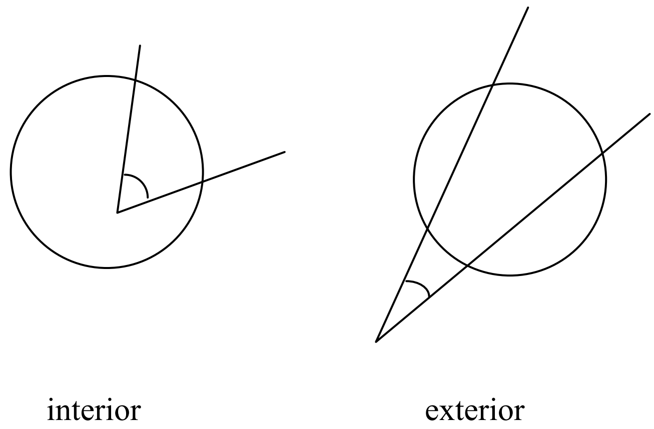


Els elements més destacables d'una circumferència són els angles, els arcs i les cordes. Dos radis d'una circumferència formen un angle, anomenat angle central. L'angle inscrit és el format per dos segments que uneixen un mateix punt amb d'altres dos punts de la circumferència, tal com mostra la il·lustració.



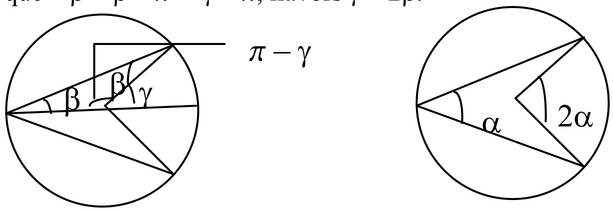
Es poden distingir dos tipus més d'angles respecte a la circumferència:

- L'angle interior, si té el vèrtex en l'interior del cercle.
- L'angle exterior, en cas que no tingui el vèrtex en l'interior del cercle. A més, els segments que forma l'angle han de tallar la circumferència, tal com mostra la il·lustració.



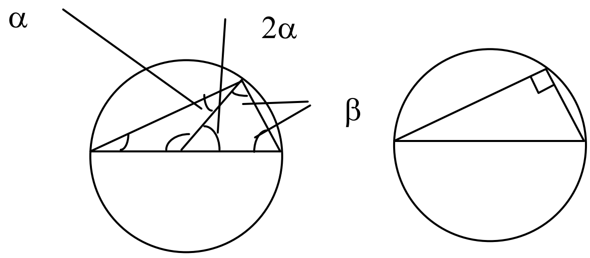
Les característiques més destacables dels angles són:

- Qualsevol angle inscrit és la meitat de l'angle central que talla la circumferència en els mateixos punts, cosa que es pot comprovar fàcilment observant aquest gràfic. Ja que $\beta + \beta + \pi - \gamma = \pi$, llavors $\gamma = 2\beta$.

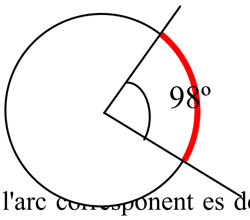


- L'angle inscrit els punts distints del qual del vèrtex formin part d'un diàmetre, és un angle recte. En efecte, l'angle en qüestió és $\alpha + \beta$. Ara bé, $2\alpha + \beta + \beta = \pi$; és a dir, $2\alpha + 2\beta = \pi$, o el que és el mateix, $\alpha + \beta = \pi/2$.

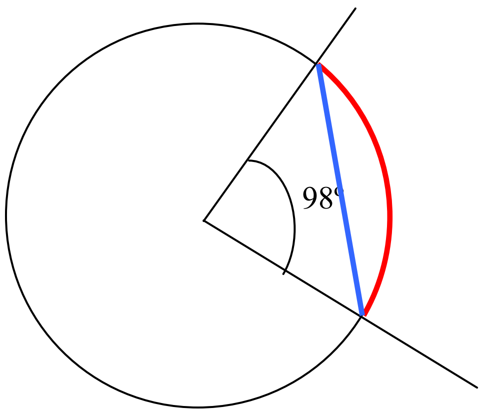
Observaràs que a cada exemple utilitzem graus o radians, segons convingui.



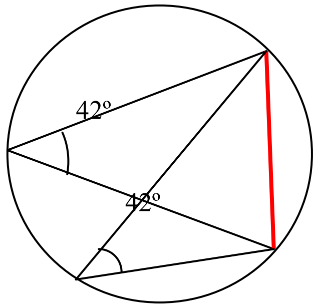
Un arc de circumferència és la part d'una circumferència que queda a l'interior d'un angle central. Per exemple, en la figura s'observa l'arc de circumferència (en vermell) de corresponent a un angle central de 98º.



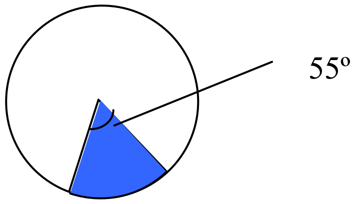
Si l'angle central és recte, l'arc corresponent es denomina quadrant. Si l'angle és pla, l'arc es denomina semicircumferència.
Una corda d'una circumferència és un segment que uneix dos punts qualssevol d'aquesta circumferència. Per exemple, un diàmetre és una corda. Una corda pot també definir-se a partir dels dos punts amb que un angle central talla a la circumferència. Per exemple, en la figura podem observar una corda (en blau) corresponent a l'angle de 98º.



Una propietat important d'arcs i cordes: tots els angles inscrits que comparteixen els extrems d'una mateixa corda o arc, mesuren exactament els mateix, tal com pot observar-se en la figura:



Un sector circular és una porció del cercle delimitada per dues radis. Així, per exemple, en la imatge s'ha acolorit un sector circular de 55º.



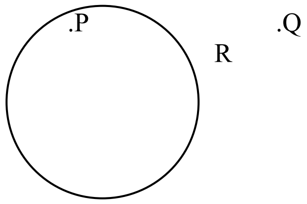
Si l'angle del sector circular és pla, el sector circular s’anomena semicercle.

Quin és la relació de la circumferència amb els altres elements del pla?

> Punts, rectes, circumferències i polígons poden adoptar diferents posicions respecte d'una circumferència donada.

Un punt pot ocupar tres posicions respecte d'una circumferència:

- Un punt és interior, si es troba en l'interior del cercle delimitat per la circumferència. En la imatge el punt P és interior.
- Un punt és exterior, si es troba fora de la regió delimitada per la circumferència. En la imatge el punt Q és exterior.
- Finalment, un punt pot pertànyer a la circumferència, com el punt R de la imatge.

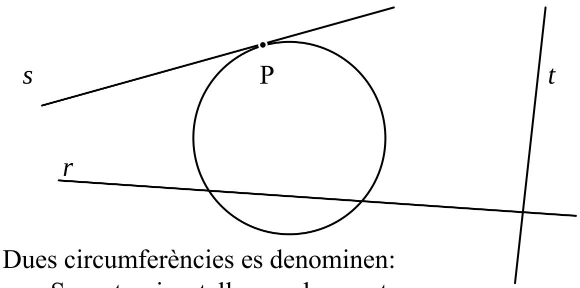


Una recta pot ocupar aquestes posicions pel que fa a una circumferència:

- La recta es denomina secant si talla la circumferència en dos punts, com la recta *r* de la imatge.

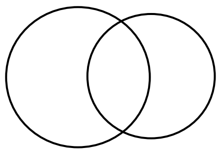
- La recta es denomina tangent si talla la circumferència en un únic punt, denominat punt de tangència. En la imatge, la recta *s* és tangent, i el punt P és el punt de tangència. També pot dir-se que la recta tangent es recolza sobre la circumferència.

Finalment, una recta pot ser que ni sigui secant ni tangent, com la recta *t* de la imatge.

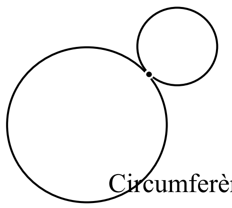


Dues circumferències es denominen:

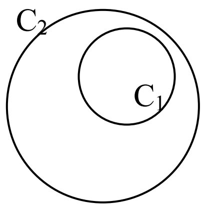
- Secants, si es tallen en dos punts.
- Tangents, si es tallen en un únic punt, el punt de tangència.
- Si una circumferència no comparteix cap punt en comú amb una altra, pot ser interior o exterior, segons la seva representació es trobi en el cercle o fora del cercle. Dues circumferències són concèntriques si comparteixen el mateix centre.



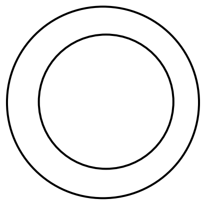
Circumferències secants



Circumferències tangents

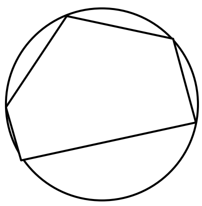


C_1 és interior a C_2

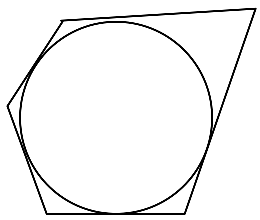


Circumferències concèntriques

Es diu que un polígon està inscrit en una circumferència, si tots els seus vèrtex són punts de la circumferència. En canvi, un polígon està circumscrit a una circumferència, si tots els seus costats li són tangents.



pentàgon inscrit



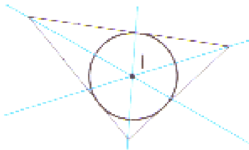
pentàgon circumscrit

Si un polígon està inscrit en una circumferència, també pot dir-se que la circumferència està circumscrita al polígon. En la figura de l'esquerra, la circumferència està circumscrita al pentàgon. De la mateixa manera, si un polígon està circumscrit a una circumferència, també es pot dir que la circumferència està inscrita en el polígon. En l'exemple de la dreta, la circumferència està inscrita en el pentàgon. En el cas dels polígons regulars, el centre de la circumferència inscrita, de la circumscrita i del polígon regular sempre coincideixen.

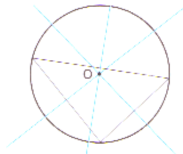
Els triangles compleixen dos importants propietats:

- La circumferència inscrita a un triangle té el seu centre en l'incentre del triangle (d'aquí el seu nom).

- La circumferència circumscrita a un triangle té el seu centre en el circumcentre (d'aquí el seu nom).



circumferència inscrita



circumferència circumscrita

Com es calcula el perímetre de la circumferència i l'àrea del cercle?

> El perímetre de la circumferència és igual a $2\pi r$, sent r el radi de la circumferència. Per a calcular la longitud d'un arc de circumferència solament és necessari calcular $r\alpha$, sent α l'angle en radians de l'arc en qüestió. L'àrea d'un cercle és igual a πr^2, mentre que l'àrea d'un sector circular és $\alpha r^2/2$, sent α l'angle en radiants del sector.

La longitud de la circumferència, L, es calcula a partir del radi, r, seguint aquesta fórmula:

$$L = 2\pi r$$

sent π el nombre irracional pi, que és aproximadament igual a 3,1416. Per exemple, la longitud d'una circumferència de radi 1 cm és:

$$L = 2\pi \text{ cm} \cong 6{,}2832 \text{ cm}$$

Es pot observar que al dividir la longitud de la circumferència pel valor del seu diàmetre ($2r$), el resultat ha de ser sempre el nombre π.
La longitud d'un arc de circumferència, L_A, és proporcional a l'angle corresponent. Per a calcular-la tan només és necessari multiplicar la longitud de la circumferència pel quocient $\alpha/360$, on α representa aquest angle en graus sexagesimals. Si l'angle està expressat en radians, la longitud de la circumferència ha de multiplicar-se per $\alpha/\pi 2$.
Per exemple, la longitud d'un arc de circumferència (de radi 1 cm) d'angle 99º és:

$$L_A = 99/360 \cdot 2\pi \cong 1{,}7279 \text{ cm}$$

De la mateixa manera, la longitud d'un arc de circumferència (de radi 1 cm) d'angle 1 rad és:

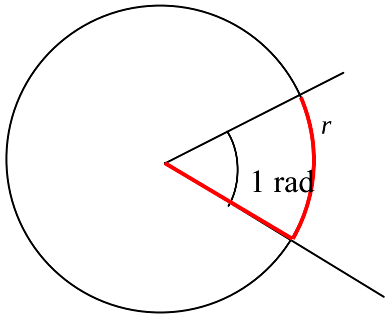
$$L_A = 1/2\pi \cdot 2\pi = 1 \text{ cm}$$

Un radian és aquell angle l'arc del qual és igual al radi de la circumferència.

Aquest últim resultat pot servir-nos per a definir de manera més precisa què és un radian: és aquell angle l'arc del qual és igual al radi de la circumferència, ja que la longitud d'un arc de 1 radian, corresponent a una circumferència de radi r és igual

$$L_A = 1/2\pi \cdot 2\pi r = r$$

és a dir, precisament el valor del radi, tal com pot observar-se a la imatge. El valor en graus sexagesimals d'un radian és de, aproximadament, 57,3º; és a dir, l'arc de circumferència corresponent a aquest arc és sempre igual al radi (és a dir, les dues línies acolorides de la imatge amiden el mateix).



L'àrea d'un cercle de radi *r* és igual a

$$A = \pi r^2$$

Per exemple, l'àrea d'un cercle de 2 cm de radi és igual a:

$$A\pi = \cdot 2^2 = 4\pi \cong 12{,}57\ cm^2$$

L'àrea d'un sector circular també és proporcional a l'angle, i es calcula multiplicant l'àrea total pel quocient $\alpha/360$, on α representa aquest angle en graus sexagesimals. Si l'angle està expressat en radians, l’àrea total ha de multiplicar-se per $\alpha/\pi 2$.

Per exemple, l'àrea d'un sector circular de 30º, d'una circumferència de radi 2 cm és igual a:

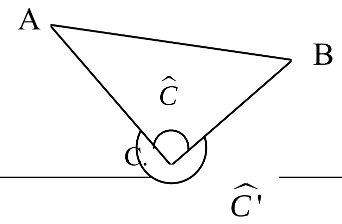
$$A_S = 30/360 \cdot \pi \cdot 2^2 \cong 1{,}047\ cm^2$$

en canvi, l'àrea d'un sector circular de 2 radians de la mateixa circumferència és igual a:

$$A_S = 2/2\pi \cdot \pi \cdot 2^2 = 4\ cm^2$$

Els triangles

Els triangles

	Es denomina amb la seqüència de vèrtexs: ABC. $\hat{C}$ és un angle interior, denominat senzillament *angle del triangle.* $\hat{C}'$ és un angle exterior. El costat AB és oposat al vèrtex C i a l'angle $\hat{C}$.

Propietats bàsiques

- Cada costat del triangle és menor que la suma dels altres dos costats.
- La suma dels angles d'un triangle és igual a 180º.
- Un angle exterior és igual a la suma dels dos angles interiors que no li són adjacents, més 180º.

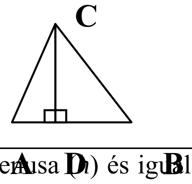
Punts i rectes importants

Una altura d'un triangle és una recta perpendicular a un dels seus costats i que conté el seu vèrtex oposat.	Les tres altures d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *ortocentre* i s'indica amb la lletra H.
La mediatriu d'un costat d'un triangle, com és sabut, és una recta perpendicular a aquest costat, que conté el seu punt mig.	Les tres mediatrius d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *circumcentre* i s'indica amb la lletra O.
Una bisectriu d'un triangle és, com és sabut, una recta que divideix un dels angles del triangle en dos d'iguals.	Les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *incentre* i s'indica amb la lletra I.
Una mitjana d'un triangle és una recta que passa pel punt mig d'un dels seus costats i pel vèrtex oposat.	Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *baricentre* i s'indica amb la lletra G.

Tipus de triangles

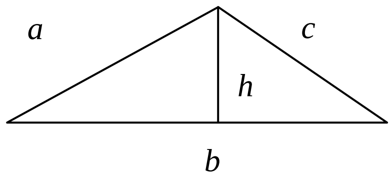
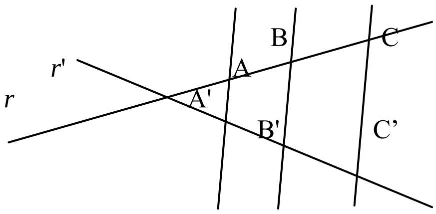
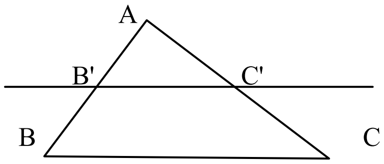
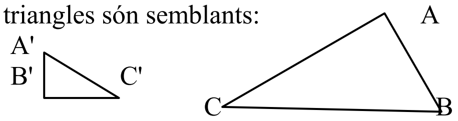
Segons els angles	Segons els costats
Triangle obtusangle, que té un angle obtús.	Triangle escalè, que té els tres costats de longitud diferent.
Triangle acutangle, que té els tres angles aguts.	Triangle isòsceles, que té dos costats iguals.
Triangle rectangle, que té un angle recte.	Triangle equilàter, que té costats i angles iguals.

El triangle rectangle

Elements	• La hipotenusa d'un triangle rectangle és el costat oposat a l'angle recte. • Els altres dos costats, que formen l'angle recte es denominen *catets.*
Importància	Tot triangle es pot descompondre de manera fàcil en dos triangles rectangles. 
El teorema de Pitàgores	El quadrat de la hipotenusa (*h*) és igual a la suma dels quadrats dels catets (*a* i *b*). $h^2 = a^2 + b^2$

Les mesures d'un triangle

El perímetre	L'àrea
El perímetre d'un triangle és la longitud total dels seus costats.	L'àrea d'un triangle és la superfície limitada per els seus costats.

<table>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">Elements per a calcular l'àrea:
• La base del triangle pot ser qualsevol dels seus costats.
• L'altura corresponent a aquesta base és el segment perpendicular a la base, que té per extrems el vèrtex oposat a la base i un punt de la base.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Càlcul del perímetre: P = $a + b + c$</td><td colspan="3">Càlcul de l'àrea: $A = \frac{b \cdot h}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Semblança de triangles</td></tr>
<tr><td colspan="3">Proporció entre dues segments: quocient entre les longituds dels segments.</td><td colspan="3">Proporcionalitat entre dos parells de segments: dos parells de segments són proporcionals si la seva proporció és la mateixa.</td></tr>
<tr><td colspan="6">El teorema de Tales</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">r i r' són dues rectes que es tallen amb tres rectes paral·leles. Els punts de tall de la recta r amb les paral·leles es denominen A, B i C; els punts de tall de la recta r' i les paral·leles es denominen A', B' i C'. En aquestes condicions el teorema de Tales afirma que: $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">Aplicació del teorema de Tales: si es talla un triangle ABC amb una recta paral·lela a un dels seus costats, es pot afirmar que:
$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Els triangles semblants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dos triangles són semblants si compleixen les propietats de semblança:
• Els parells de costats corresponents són proporcionals.
• Els angles corresponents són iguals.</td><td colspan="3">Aquests triangles són semblants:


$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$
$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}$ i $\widehat{C} = \widehat{C'}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Criteris de semblança de triangles</td></tr>
<tr><td colspan="2">Primer criteri
Dos triangles són semblants si tenen dos angles iguals.</td><td colspan="2">Segon criteri
Dos triangles són semblants si tenen tres costats proporcionals.</td><td colspan="2">Tercer criteri
Dos triangles són semblants si tenen dos parells de costats proporcionals, i l'angle que formen és igual.</td></tr>
</table>

Pitàgores i Tales

Aquests dos grans pensadors grecs van donar els seus noms a dos dels principals resultats que permeten estudiar propietats molt interessants dels triangles: el teorema de Pitàgores i el teorema de Tales. Tales va viure a Milet a les darreries del segle VII, encara que era de pares fenicis. Va ser, potser, el primer matemàtic, filòsof i científic grec. Sembla que va tenir, també, intervencions polítiques (per exemple, va proposar crear una sola sala de consells) i tècnics (va fer cavar una rasa perquè el riu fos transitable per tots dos costats); es diu que va visitar Egipte, però pot ser que això fos un rumor (era un costum relacionar als savis amb Egipte, un dels primers centres de saviesa de l'antiguitat); Plató diu que Tales va caure a un pou distret quan estava mirant les estrelles, i Aristòtil assegura que Tales va guanyar diners amb un negoci de compraventa d'eines, però aquestes dues anècdotes probablement són una pura sàtira fictícia. Tales va predir un eclipsi i va utilitzar mètodes per a esbrinar l'altura de les piràmides; encara que algú li atribueix un llibre d'astrologia, actualment es creu que aquest llibre no fou escrit per Tales, sinó per Focus de Samos. Tales està considerat un dels set savis de l'antiguitat grega.

Segell grec de 1994 que representa la suposada efígie de Tales.

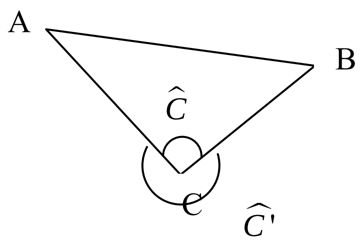
Pitàgores (aproximadament, 582-500 aC) va viure poc després de Tales; ambdós són considerats els iniciadors de la matemàtica grega. Va fundar l'escola pitagòrica al sud de l'actual Itàlia, organització que es guiava per l'amor a la saviesa i especialment a les matemàtiques i a la música. Es diu que hi va haver una rebel·lió contra ells i en van cremar la seu. Alguns conten que el mateix Pitàgores va morir a l'incendi; uns altres, que va fugir i, desencantat, es va deixar morir de fam. En tot cas, aquests breus apunts biogràfics no són més que històries que repeteix la tradició, sense que puguin ser verificades per documents originals. A més de formular el teorema que duu el seu nom, se li va atribuir una taula de multiplicar i l'estudi de la relació entre la música i les matemàtiques.

Detall del quadre de Raffaello Sanzio (1483-1520) *Scuola di Atene* (1509-1510), on es pot observar Pitàgores. Stanza della Segnatura, Palau Pontifici (Vaticà).

Què és un triangle?

Un triangle és una figura tancada formada per tres segments, denominats *costats*, que s'uneixen en els extrems. Tot triangle té tres angles. Els costats i angles poden ser continus, si hi ha contacte entre ells, o oposats, si no hi ha contacte entre ells. La longitud de qualsevol costat és sempre menor que la suma de les longituds dels altres dos costats, i la suma dels angles d'un triangle és sempre igual a 180º o π rad.

En el pla es poden dibuixar figures delimitades per segments units entre si, anomenats figures poligonals o, simplement, poligonals. Cadascun dels segments d'una poligonal es denomina *costat,* mentre que cada punt d'unió entre dos segments de la poligonal es denomina *vèrtex*. Una poligonal tancada, de manera que cada vèrtex uneixi exactament dos segments, es denomina polígon.



Un triangle és un polígon de tres costats (encara que el seu nom ens indica que té tres angles, fet que és equivalent). Habitualment, un triangle (i, en general, tot polígon) es denomina amb els vèrtexs que el componen. Per exemple, el triangle de la imatge es denomina ABC.

Dos costats qualssevol d'un triangle formen dos angles: l'angle interior i l'angle exterior. El primer és sempre convex (per exemple, $\hat{C}$), mentre que el segon és sempre còncau (per exemple, $\widehat{C'}$). La suma d'aquests dos angles és sempre de 360º. En tot cas, quan es parla dels angles d'un triangle, sempre es fa referència als angles interiors.

Un angle i un costat que no formen part de l'angle són oposats. De la mateixa manera, un vèrtex i un costat que no el contingui, també són oposats. Per exemple, l'angle $\hat{C}$ i el costat AB són oposats.

Les propietats bàsiques d'un triangle són:

- La longitud de qualsevol costat és sempre menor que la suma de les longituds dels altres dos costats.
- La suma dels angles d'un triangle és sempre igual a 180º o π rad.
- Cada angle exterior d'un triangle és igual a la suma dels dos angles interiors que no li són adjacents, més 180º.

Quines són les rectes i els punts notables d'un triangle i com es troben?

Les rectes principals d'un triangle són: altura o recta perpendicular a un dels seus costats i que conté el seu vèrtex oposat; mediatriu o recta perpendicular a aquest costat que conté el seu punt mig; bisectriu o recta que divideix un dels angles del triangle en dos d'iguals: mitjana o recta que passa pel punt mig d'un dels seus costats i pel vèrtex oposat. Els punts d'intersecció dels grups de tres rectes anteriors es denominen, respectivament, ortocentre, circumcentre, incentre i baricentre.

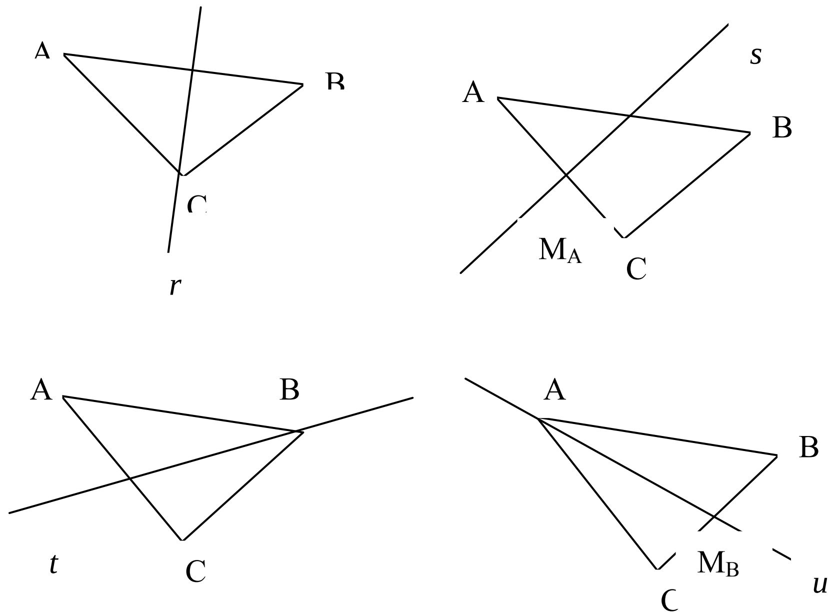
Hi ha certes rectes importants que es poden representar a partir dels elements d'un triangle:

- Una altura d'un triangle és una recta perpendicular a un dels seus costats i que conté el seu vèrtex oposat. Per exemple, *r* és una altura del triangle ABC, ja que és perpendicular a AB i passa per C.

- La mediatriu d'un costat d'un triangle, com és sabut, és una recta perpendicular a aquest costat, que conté el seu punt mig. Per exemple, *s* és la mediatriu de AC, ja que és perpendicular a aquest segment i passa pel seu punt mig, M_{AC} .

- Una bisectriu d'un triangle és, com és sabut, una recta que divideix un dels angles del triangle en dos d'iguals. Per exemple, *t* és una bisectriu d'ABC, ja que és la bisectriu de l'angle $\hat{B}$.

- Una mitjana d'un triangle és una recta que passa pel punt mig d'un dels seus costats i pel vèrtex oposat. Per exemple, *u* és una mitjana del triangle ABC, ja que passa per A i pel punt mig de BC, M_{BC} .



Una altura, una mediatriu, una bisectriu i una mitjana d'un triangle ABC

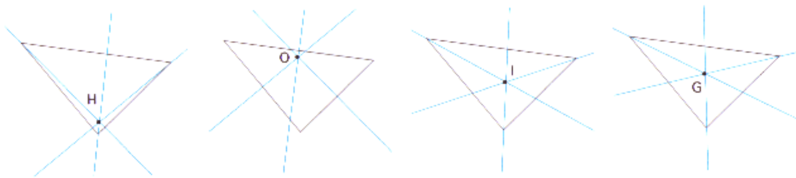
Aquestes rectes compleixen aquestes propietats:

- Les tres altures d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *ortocentre* i s'indica amb la lletra H.

- Les tres mediatrius d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *circumcentre* i s'indica amb la lletra O.

- Les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *incentre* i s'indica amb la lletra I.

- Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt. Aquest punt es denomina *baricentre* i s'indica amb la lletra G.



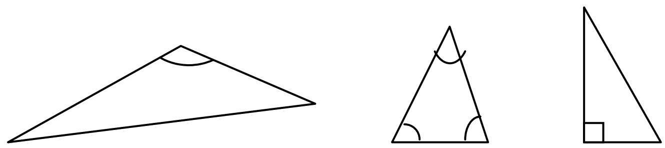
Ortocentre, circumcentre, incentre i baricentre d'un triangle

Quins són els principals tipus de triangles?

Els triangles es poden classificar segons quins siguin els seus angles; en aquest cas, es distingeixen els triangles obtusangles, acutangles i rectangles. També es poden classificar segons quins siguin els seus costats; en aquest cas, es distingeixen els triangles escalens, isòsceles i equilàters.

Els triangles es poden classificar a partir dels seus angles o dels seus costats. La classificació a partir dels seus angles és la següent:

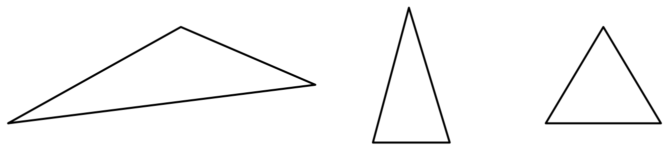
- Triangle obtusangle: aquell que té un angle obtús. Els altres dos són angles aguts.
- Triangle acutangle: aquell que té els tres angles aguts.
- Triangle rectangle: aquell que té un angle recte. Els altres dos angles són complementaris.



obtusangle acutangle

Segons quins siguin els seus costats, els triangles es poden classificar en:

- Triangle escalè, que té els tres costats de longitud diferent. De la mateixa manera, els seus tres angles són diferents.
- Triangle isòsceles, que té dos costats iguals. Igualment, té dos angles iguals.
- Triangle equilàter, que té costats i angles iguals. En aquest cas, cadascun dels angles mesura 60º.

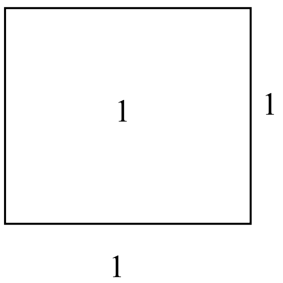


escalè isòsceles equilàter

Com es calcula el perímetre i l'àrea d'un triangle?

> El perímetre d'un triangle és la suma de les longituds dels seus costats, i l'àrea d'un triangle és la mesura de la seva extensió. Per al càlcul de l'àrea d'un triangle s'ha de multiplicar la seva base per la seva altura i dividir-la entre 2.

El perímetre d'un triangle (i, en general, de qualsevol polígon) és la suma de les longituds dels seus costats. L'àrea d'un triangle (o de qualsevol polígon) és la mesura de la seva extensió. La unitat del SI per a mesurar l'àrea és el metre quadrat i el seu símbol és m^2. Aquesta unitat es defineix a partir del metre: l'extensió que ocupa un metre quadrat és igual a la d'un quadrat que té 1 m de costat.
El sistema d'unitats d'àrea deriva del m^2, de manera que per a obtenir-ne una qualsevol, es multiplica l'anterior (en el quadre, la unitat inferior) per 10^2:



Unitats	Símbol	Equival a Equival	a.
quilòmetre quadrat	km^2	1000000 m^2	10^6 m^2
hectòmetre quadrat	hm^2	10000 m^2	10^4 m^2
decàmetre quadrat	dam^2	100 m^2	10^2 m^2
metre quadrat	m^2	1 m^2	10^0 m^2
decímetre quadrat	dm^2	0,01 m^2	10^{-2} m^2
centímetre quadrat	cm^2	0,0001 m^2	10^{-4} m^2
mil·límetre quadrat	mm^2	0,000001 m^2	10^{-6} m^2

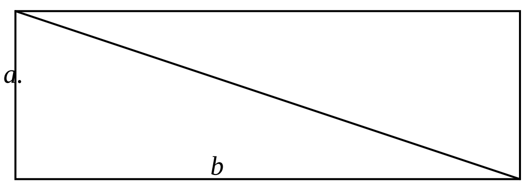
La taula es podria estendre cap amunt amb unitats majors, i cap avall amb unitats menors.
Habitualment, s'utilitzarà la lletra *P* per a referir-se al perímetre d'una figura. Així, per exemple, si un triangle té costats 7 cm, 8 cm i 9 cm, el seu perímetre serà igual a:

$$P = 7 + 8 + 9 = 24 \text{ cm}$$

En general, el perímetre d'un triangle de costats *a* , *b* i *c* és igual a

$$P = a + b + c.$$

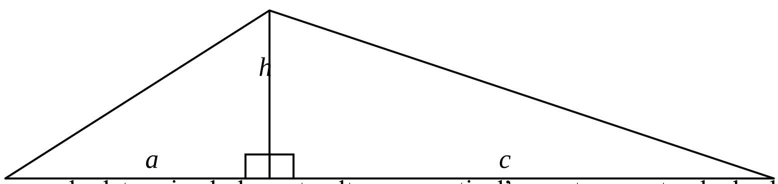
Normalment, l'àrea d'una figura s'indica amb la lletra *A*. Per a calcular l'àrea de qualsevol triangle hem de recórrer al càlcul de l'àrea d'un triangle rectangle.
Si s'observa aquesta figura, es pot comprovar que el rectangle està format per dos triangles rectangles:



L'àrea del rectangle és igual a *ab*; després l'àrea de cada triangle rectangle és igual a la meitat, és a dir, l'àrea d'un triangle és igual a:

$$A = ab/2$$

essent *a* i *b* els costats que formen l'angle recte del triangle rectangle.
Aquest fet ens permet calcular l'àrea de qualsevol triangle, ja que sempre es pot descompondre en dos triangles rectangles a partir d'una de les seves altures, tal com mostra la imatge:



Una vegada determinada la recta altura, a partir d'aquesta es pot calcular l'àrea del triangle:

- La base del triangle és el costat sobre el qual la recta altura cau en perpendicular. En l'exemple, la base és la suma de $a + c$.
- Respecte de la base anterior, l'altura és el segment perpendicular que té un extrem en el vèrtex oposat a la base, i l'altre sobre aquesta base. En aquest cas, l'altura és h.

L'àrea del triangle serà igual a l'àrea dels dos triangles rectangles marcats, és a dir,

$$ah/2 + ch/2 = (a + c)h/2$$

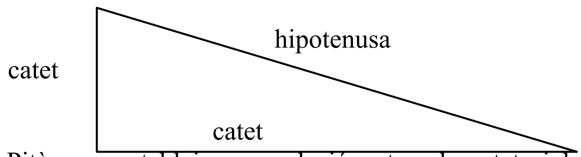
En definitiva, l'àrea d'un triangle qualsevol es pot trobar multiplicant la seva base per la seva altura i dividint el resultat entre 2.

En què consisteix el teorema de Pitàgores i com s'aplica?

> El teorema de Pitàgores és un resultat que s'aplica sobre qualsevol triangle rectangle. Si es defineix la hipotenusa com el costat oposat a l'angle recte del triangle rectangle, i els catets com els altres dos costats, el teorema de Pitàgores afirma que el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.

El triangle rectangle és el més important i, segurament, la figura plana més utilitzada i estudiada al llarg de la història. Per tot això, mereix una atenció especial.
Els costats d'un triangle rectangle reben un nom especial:

- La hipotenusa d'un triangle és el costat oposat a l'angle recte.
- Els altres dos costats, que formen l'angle recte, es denominen *catets.*



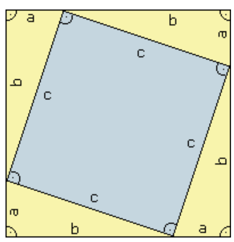
El teorema de Pitàgores estableix una relació entre els catets i la hipotenusa de qualsevol triangle rectangle: el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets. És a dir, si c és la longitud de la hipotenusa, a i b són les longituds dels seus catets, llavors:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Com s'ha dit, aquesta fórmula es compleix en tot triangle rectangle i, a més, al seu torn, qualsevol triangle que la compleixi és un triangle rectangle. Per exemple, si un triangle rectangle té catets que mesuren 3 i 4 cm, respectivament, llavors la seva hipotenusa ha de mesurar, necessàriament, 5 cm, ja que:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Per a la demostració del teorema de Pitàgores, es construeix el triangle de costats a , b i c, essent c la hipotenusa. Es construeix, posteriorment, el quadrat de costats $a + b$, tal com mostra aquesta imatge:



L'àrea del quadrat major és igual a $(a + b)^2$, i és la mateixa que la suma de l'àrea dels quatre triangles rectangles ($4 \cdot ab/2$) més l'àrea del quadrat interior (c^2). Per tant,

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

ja sabem que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, per tant,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

en definitiva, si es resta $2bc$ a banda i banda:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

És a dir, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.
El teorema de Pitàgores permet, doncs, trobar un dels costats d'un triangle rectangle, sempre que es coneguin els altres dos costats. Per exemple, si la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 13 cm, i un dels seus catets mesura 5 cm, llavors només falta trobar l'altre catet sabent que:

$$13^2 = 5^2 + b^2$$

Per tant,

$$b^2 = 13^2 - 5^2 = 121 \rightarrow \qquad b = 12$$

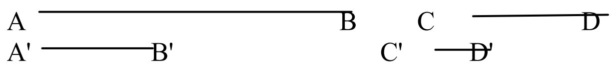
Quan són semblants dos triangles?

> Dos triangles són semblants quan tenen els mateixos angles i els seus costats són proporcionals. Aquesta definició es basa en el teorema de Tales, que estudia la relació mètrica entre els punts d'intersecció de tres rectes paral·leles amb dues rectes més que s'intersequen.

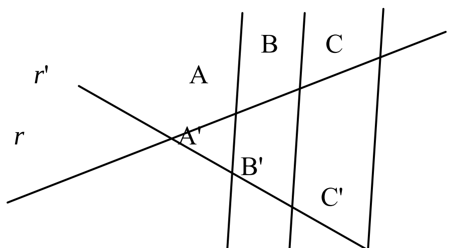
En el llenguatge usual, se sol dir que dos objectes són semblants si tenen una similitud en la seva forma. Aquest concepte és molt útil en geometria perquè permet relacionar objectes diferents.
La proporció entre dos segments és el quocient de les seves longituds. Així, si la proporció entre AB i A'B' és 3, significa que

AB/A'B' = 3

dit d'una altra manera, el segment AB és el triple que el segment A'B'.
Dos parells de segments es diu que són proporcionals si la seva proporció és idèntica. Per exemple, si la proporció entre AB i A'B' és igual a 3, i la proporció entre CD i C'D' és igual, també, a 3, llavors la parella AB, A'B' és proporcional a la parella CD, C'D'.



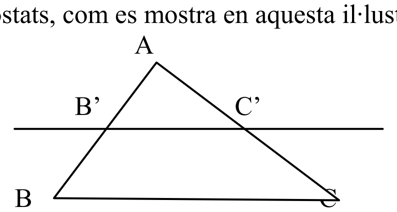
Si dues rectes que es tallen, r i r', s'intersequen amb tres rectes paral·leles, tal com es mostra en la figura:



el teorema de Tales afirma que en aquestes condicions:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

és a dir, dues parelles de segments corresponents qualssevol determinats sobre r i r', són proporcionals.
Aquest teorema té moltes aplicacions en l'estudi de triangles. Una de les més importants és aquesta: si un triangle rectangle ABC es talla amb una paral·lela en un dels seus costats, com es mostra en aquesta il·lustració:



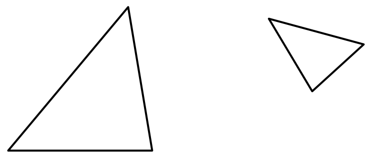
llavors, no és difícil demostrar amb ajuda del teorema de Tales que

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}$$

En altres paraules, que si es talla un triangle amb una recta paral·lela a un dels seus costats, el triangle original, i el creat a partir d’aquesta intersecció, tenen els seus costats proporcionals. A més, observem de manera immediata que els seus angles són iguals. Dos triangles que compleixin ambdues condicions, és a dir:

- tenen tots els parells de costats proporcionals,
- tenen angles iguals

es denominen *triangles semblants*. La proporció entre els costats es denomina *raó de la semblança*. Així, doncs, per a obtenir un triangle semblant a un altre, només hem de desplaçar l’original, giravoltar-lo, "encongir-lo" o "expandir-lo", com es veu a la imatge.

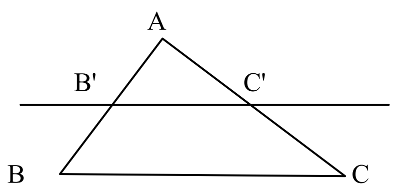


Quins són els criteris de semblança de triangles?

> Hi ha tres criteris de semblança: dos triangles són semblants si tenen dos angles iguals; el segon: dos triangles són semblants si tenen els costats proporcionals; i el tercer: dos triangles són semblants si tenen dos parells de costats proporcionals, i l’angle que formen és igual. En el cas dels triangles rectangles, els criteris se simplifiquen: el primer, dos triangles rectangles són semblants si tenen un dels angles no rectes iguals; el segon, dos triangles rectangles són semblants si tenen els catets proporcionals, o bé, un catet i la hipotenusa proporcionals.

Coneixem les condicions que han de complir dos triangles per a ser semblants. Ara bé, no cal demostrar les dues condicions anteriors per a confirmar que dos triangles són semblants: n’hi ha prou que es compleixi un d’aquests criteris, menys exigents:

- Primer criteri: dos triangles són semblants si tenen dos angles iguals.
  Això és així perquè, en primer lloc, el tercer angle també ha de ser igual. A més, si dos triangles ABC i A’B’C’ tenen els angles iguals, sempre es podran situar d’aquesta manera:

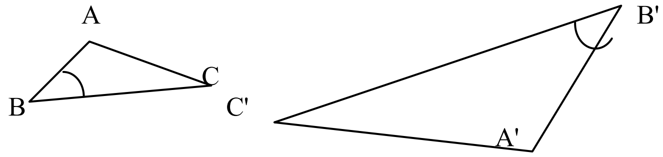
  

  I en aquesta situació, ambdós triangles han de tenir també els costats proporcionals.

- Segon criteri: dos triangles són semblants si tenen els tres costats proporcionals.
  De manera semblant al criteri anterior, si dos triangles tenen els tres costats proporcionals, llavors és fàcil demostrar que tenen els angles iguals.

- Tercer criteri: dus triangles són semblants si tenen dos parells de costats proporcionals i l’angle que formen és igual.

  Per exemple, el triangle ABC és semblant al triangle A’B’C’ si $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$ i, a més, $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$.



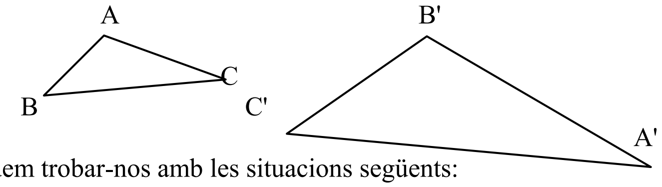
Així, doncs, si es compleix qualsevol d'aquests tres criteris, es pot assegurar que els triangles són semblants.
En el cas del triangle rectangle, encara es poden simplificar més, ja que coneixem un dels seus angles:

- Criteri 1: dos triangles rectangles són semblants si tenen un dels angles no rectes iguals.
- Criteri 2: dos triangles rectangles són semblants si tenen els catets proporcionals, o bé, un catet i la hipotenusa proporcionals.

Com es comprova si dos triangles són semblants?

> Per a aplicar correctament els criteris de semblança, en primer lloc, s'ha d'analitzar la informació que es posseeix dels triangles. A continuació s'ha de completar, si això és possible (per exemple, trobant l'angle que falta si es tenen dos angles d'un triangle). Finalment, s'ha d'aplicar el criteri de semblança que faci servir les dades que es tenen, provant diverses combinacions de les dades si calgués.

Donats dos triangles qualssevol, per a comprovar si són semblants, s'ha d'intentar aplicar algun dels criteris anteriors, segons quina sigui la informació de què es disposi. Per exemple, donats aquests triangles:



Podem trobar-nos amb les situacions següents:

- Si coneixem dos angles de cada triangle: $\widehat{A} = 100^{\circ}$, $\widehat{B} = 29^{\circ}$, $\widehat{B'} = 100^{\circ}$, $\widehat{A'} = 51^{\circ}$, aquests triangles són semblants?
  Atès que la informació de què es disposa és únicament sobre angles, s'ha d'intentar aplicar el criteri 1; per això s'ha de calcular l'altre angle de cada triangle. En el triangle ABC, l'angle $\widehat{C}$ =100 – 29 = 51º, per tant, ambdós triangles comparteixen dos angles, un de 100º, i altre de 51º (és evident que, encara que no s'hagi calculat, l'últim angle de 29º també el comparteixen). Així, doncs, podem afirmar que aquests dos triangles són semblants.
- Es coneixen els costats següents: AB = 3 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm, A'B' = 8 cm, B'C' = 6 cm i A'C' = 10 cm. Són semblants aquests triangles?

  Com que només es coneixen els costats, s'ha d'intentar aplicar el criteri 2. Es pot comprovar com:
  $$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$
  Per tant, es pot afirmar que aquests dos triangles són semblants, i la seva raó de semblança és 2. S'ha d'observar que no és imprescindible que coincideixin els noms dels costats que han de ser semblants. Per tant, s'han de provar les diferents combinacions de costats per a descobrir si n'hi ha cap que la compleixi. En aquest cas, s'hauria d'expressar d'aquesta manera:
  $$\frac{A'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AC} = \frac{B'C'}{AB}$$

- Es coneixen les dades següents: AB = 3 cm, BC = 5 cm, B'C' = 6 cm i A'C' = 10 cm, a més, $\widehat{B} = 29^\circ$, $\widehat{C'} = 29^\circ$. Són semblants aquests triangles?

  En aquest cas, es pot aplicar el criteri 3, ja que es tenen dos parells de costats i dos angles. És evident que els costats són proporcionals i l'angle contigu a aquests costats és igual en ambdós triangles. Per tant, els triangles han de ser semblants.

Els vectors

Els vectors

Distància entre dos punts del pla
Donats dos punts coordenats del pla, $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, la distància entre aquests dos punts, $d(P_1,P_2)$, es calcula de la manera següent:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Els vectors fixos del pla
Donats dos punts qualssevol P i Q, el vector fix d'origen P i extrem Q es designa com a $\overrightarrow{PQ}$; la seva representació gràfica és una fletxa la punta de la qual es troba sobre Q. Si $\overrightarrow{PQ}$ és un vector fix, essent $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$, llavors, si s'anomena

$a = x_2 - x_1$ $\qquad b = y_2 - y_1$.

a rep el nom de *primer component* del vector fix, i *b* rep el nom de *segon component* del vector.

Els vectors lliures del pla
Un vector lliure recull totes les característiques d'un vector fix, excepte l'origen i l'extrem:

- Té una direcció determinada.
- Té un sentit, indicat gràficament per la punta de la fletxa.
- Té una longitud.

Els vectors lliures es designen, generalment, amb una lletra minúscula coronada amb una petita fletxa al capdamunt. Per exemple, un vector lliure es pot denominar $\vec{v}$. Per a determinar un vector lliure només cal conèixer-ne els components. Per això, un vector lliure s'expressa com un parell ordenat format per aquestes components.

Operacions entre vectors

- La suma de vectors
  Dos vectors es poden sumar sumant els seus components corresponents. La representació gràfica de la suma de vectors es basa en la llei del paral·lelogram.
- El producte d'un nombre per un vector
  Per a multiplicar un nombre per un vector s'ha de multiplicar cada component del vector per aquest nombre. És fàcil comprovar que aquesta operació multiplica la longitud del vector pel nombre. Si el signe del nombre és negatiu, s'obté un vector de la mateixa longitud però en sentit contrari.
- El producte escalar de dos vectors, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, es denota $\vec{u} \cdot \vec{v}$, i el seu resultat és igual a la suma dels productes de les coordenades corresponents. Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

La norma d'un vector
La norma d'un vector és igual a la seva longitud. El seu càlcul es fa a partir del producte escalar; així, si $\vec{u}$ és un vector, la seva norma és $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Les propietats bàsiques de la norma d'un vector són:

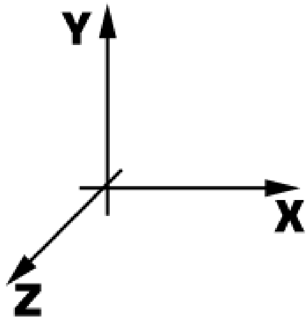
- $\|\vec{u}\| \geq 0$ per a qualsevol vector.
- $\|\vec{u}\| = 0$ només quan $\vec{u} = \vec{0}$.
- si α és un nombre qualsevol: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$.
- si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors qualssevol: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, i aquesta desigualtat s'anomena desigualtat triangular de Cauchy–Schwarz.

Angle entre vectors
Es defineix l'angle α entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, com l'angle el cosinus del qual és:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars (formen 90º) quan el seu producte escalar és 0, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són paral·lels (formen 0º o 180º) quan $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Representació gràfica en l'espai
El procediment per a representar punts en l'espai és molt semblant al que se segueix en el pla; a l'espai només cal afegir-hi una coordenada per a tenir les tres dimensions cobertes: altura, amplària, profunditat.



Eixos de la representació en l'espai

Un punt en l'espai es representa per tres coordenades P = (x,y,z); cadascuna d'elles assenyala la posició en l'eix corresponent.

- Distància entre dos punts, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Els vectors lliures de l'espai s'expressen amb una terna de nombres, compleixen les mateixes propietats que els vectors del pla i les operacions són les mateixes.
Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

- El producte escalar entre dos vectors del pla:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

- La norma d'un vector de l'espai es defineix:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- L'angle entre vectors es troba calculant el cosinus d'aquest angle:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Evidentment, dos vectors de l'espai són perpendiculars si el seu producte escalar és 0, i dos vectors de l'espai són paral·lels si el valor absolut del seu producte escalar és igual al producte de les seves normes.

La història dels vectors

La llei del paral·lelogram per a l'addició de vectors és tan intuïtiva que el seu origen és desconegut. Podria haver aparegut en un treball ara perdut d'Aristòtil (384-322 aC), i es troba en la *Mecànica* de Hieró d'Alexandria (segle I dC). Va ser, també, un dels primers resultats del *Principia Mathematica* (1687) d'Isaac Newton (1642-1727). En els *Principia*, Newton va tractar de manera extensa el que ara es consideren les entitats vectorials (per exemple, velocitat, força), però mai el concepte de *vector*. L'estudi i l'ús de vectors no es va sistematitzar fins als segles XIX i XX.
Els vectors van sorgir a les primeres dues dècades del segle XIX amb les representacions geomètriques de nombres complexos. Caspar Wessel (1745-1810), Jean Robert Argand (1768-1822) i Carl Friedrich Gauss (1777-1855) van concebre nombres complexos com a punts en el pla de dues dimensions, és a dir, com a vectors de dues dimensions. En 1837, William Rowan Hamilton (1805-1865) va demostrar que els nombres complexos es podrien considerar parells de nombres (a, b). Aquesta idea era una part de la campanya de molts matemàtics, incloent-hi el mateix Hamilton, per a buscar una manera d'ampliar els "nombres de dues dimensions" a tres dimensions.
En 1827, August Ferdinand Möbius va publicar un llibre curt, *Càlcul baricèntric*, en el qual va introduir el segment dirigit que va denotar amb les lletres de l'alfabet; ja eren vectors, encara que no tenien aquest nom. En el seu estudi de centre de gravetat i la geometria descriptiva, Möbius va desenvolupar el càlcul amb aquests segments dirigits; els va sumar i va demostrar com es multiplicaven per un nombre.

William Rowan Hamilton (1805-1865)

Finalment, el mateix Hamilton va introduir en 1843 en concepte de *vector*, precisament com un segment orientat de l'espai.
El desenvolupament de l'àlgebra de vectors i de l'anàlisi de vectors tal com el coneixem avui va ser fet per primera vegada per J. Willard Gibbs (1839-1903) en les classes per als seus estudiants en la Universitat de Yale. Gibbs va intuir que els vectors proporcionarien una eina més eficient per al seu treball en la física. Així, doncs, començant el 1881, Gibbs va imprimir en privat notes sobre anàlisi dels vectors per als seus estudiants, que van ser distribuïts extensament entre els erudits dels Estats Units i d'Europa.

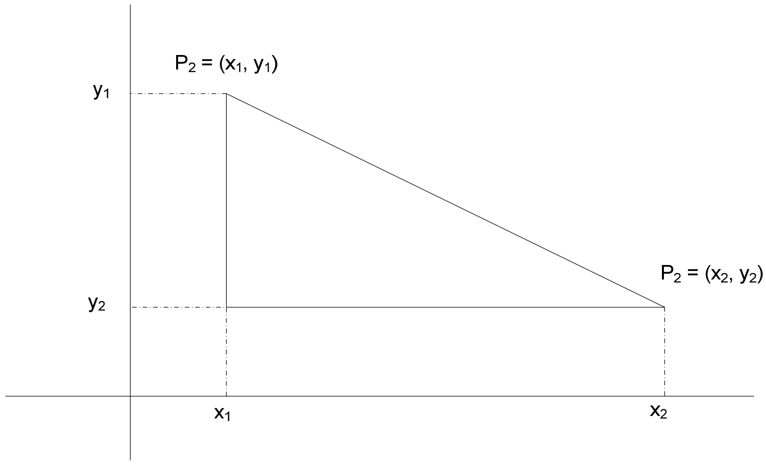
Com es calcula la distància entre dos punts?

> Per a calcular la distància entre dos punts coordenats qualssevol del pla, s'ha d'extreure l'arrel quadrada de la suma de les diferències al quadrat de cadascuna de les coordenades d'ambdós punts.

Donats dos punts coordenats del pla, $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, la distància entre aquests dos punts, $d(P_1,P_2)$, es calcula de la manera següent:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Això es pot verificar de manera senzilla observant aquesta representació:



La distància entre P_1 i P_2 és precisament la hipotenusa d'aquest triangle rectangle. Es pot observar que els catets d'aquest triangle rectangle mesuren $(x_2 - x_1)$ i $(y_1 - y_2)$, respectivament. Per tant, la hipotenusa del triangle rectangle o, el que és el mateix, la distància entre P_1 i P_2, ha de complir el teorema de Pitàgores:

$$d(P_1,P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

És evident que $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$. Per tant,

$$d(P_1,P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

així, doncs,

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

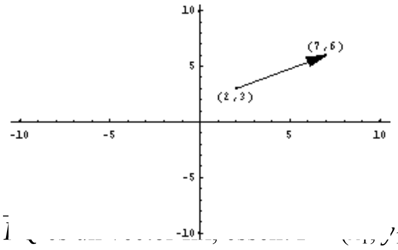
tal com ja s'havia anunciat.

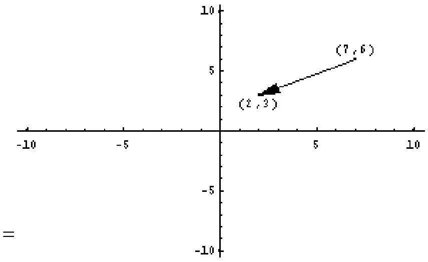
Què és un vector fix del pla?

> Un vector fix d'origen en ell punt P i extrem en el punt Q es designa com $\overrightarrow{PQ}$; la seva representació gràfica és una fletxa la punta de la qual es troba sobre Q. El primer component del vector és la diferència de la coordenada *x* de Q menys la coordenada *x* de P; el segon component del vector és la diferència de la coordenada *y* de Q menys la coordenada *y* de P.

Donats dos punts qualssevol P i Q, el vector fix d'origen P i extrem Q, es designa com a $\overrightarrow{PQ}$; la seva representació gràfica és una fletxa la punta de la qual es troba sobre Q. Per exemple, el gràfic mostra el vector fix d'origen (2,3) i extrem (7,6). Com es pot comprovar, la representació és una fletxa que té l'origen en P i la punta en Q. S'ha de subratllar, a més, que no és el mateix el vector $\overrightarrow{PQ}$ que el vector $\overrightarrow{QP}$.

Per exemple, el vector d'origen (7,6) i extrem (2,3) es troba en el gràfic de la dreta:





Si [illegible] y_1) i Q =

$$a = x_2 - x_1 \qquad\qquad b = y_2 - y_1.$$

a rep el nom de primer component del vector fix, i *b* rep el nombre de segon component del vector.

En el cas de l'exemple anterior, en el qual P = (2, 3) i Q = (7, 6), el vector $\overrightarrow{PQ}$ té els components següents:

primer component igual a 7 – 2 = 5
segon component igual a 6 – 3 = 3

En canvi, el vector $\overrightarrow{QP}$ té aquests components:

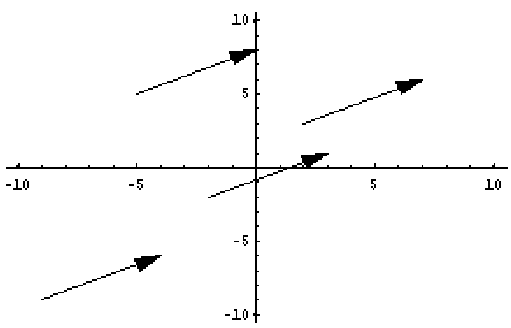
primer component igual a 2 – 7 = –5
segon component igual a 3 – 6 = –3

S'ha de distingir, doncs, entre els components d'un vector de les coordenades d'un punt, encara que ambdues s'expressin en forma de parell ordenat.

Què és un vector lliure del pla?

> Un vector lliure recull totes les característiques d'un vector fix, excepte que l'origen i l'extrem té una direcció (determinada per la recta que determina), un sentit (representat per la punta de la fletxa), i una longitud concretes. En general, i per a simplificar, sempre que es faci servir el terme *vector*, s'entendrà un vector lliure.

És fàcil comprovar que els vectors amb els mateixos components són vectors paral·lels, amb el mateix sentit (de la punta de la fletxa) i que mesuren el mateix. Els vectors amb els mateixos components tenen moltes característiques comunes: totes excepte l'origen i l'extrem. Aquest fet permet definir un vector lliure; un vector lliure recull totes les característiques d'un vector fix, excepte el punt origen i l'extrem:



- Té una direcció determinada.
- Té un sentit, indicat gràficament per la punta de la fletxa.
- Té una longitud.

Per això, tots aquests vectors fixos considerats com a vectors lliures són iguals: tenen la mateixa direcció, sentit i longitud.

D'alguna manera es pot dir que tots aquests vectors són "còpies" idèntiques del mateix vector lliure. Cadascuna d'aquestes "còpies" s'anomena *representant* del mateix vector lliure.

Els vectors lliures es designen, generalment, amb una lletra minúscula coronada amb una petita fletxa al capdamunt, per a evitar confusions amb els vectors fixos. Per exemple, un vector lliure es pot denominar $\vec{v}$.

Per a determinar un vector lliure només cal conèixer-ne els components. Normalment, es posen en forma de parell ordenat. En el primer exemple, en el qual P = (2, 3) i Q = (7,6), el vector lliure que tenia per representant el vector fix $\overrightarrow{PQ}$, té per components a = 5 i b = 3. És a dir, si anomenem aquest vector $\vec{u}$, llavors $\vec{u}$ = (5,3). S'ha de tenir en compte que és diferent el vector lliure (5,3) que el punt

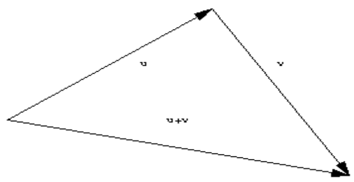
(5,3): un punt només assenyala una posició al pla, mentre que un vector indica una direcció, un sentit i una longitud.
Usualment, i per a abreujar, els vectors lliures es denominen, simplement, vectors (els vectors fixos només s'estudien per a introduir els vectors lliures).

Quines són les operacions bàsiques entre vectors?

> Les operacions bàsiques entre vectors el resultat de les quals és altre vector són la suma i producte per un nombre. En canvi, el producte escalar entre vectors és una operació el resultat de la qual és un nombre. Aquest nombre és de gran ajuda per a establir la posició relativa de dos vectors.

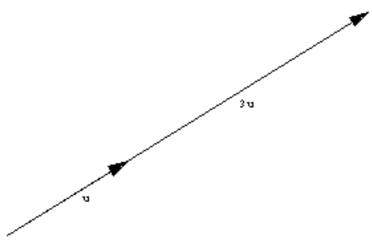
Hi ha dues operacions bàsiques en les quals intervenen vectors, el resultat de les quals és un altre vector:

- La suma de vectors
  Dos vectors es poden sumar sumant els seus components corresponents. Per exemple, el vector $\vec{u} = (3,4)$ i el vector $\vec{v} = (2–, 6)$ se sumen així:
  $\vec{u} + \vec{v} = (3 + 2, 4 – 6) = (5–, 2)$



  La suma és molt fàcil d'entendre a partir de la seva representació gràfica: es tracta de situar en l'extrem del primer l'origen del segon; el resultat és el vector l'origen del qual és l'origen del primer i l'extrem del qual és l'extrem del segon. Aquest fet també es coneix com a *llei del paral·lelogram.*

- El producte d'un nombre per un vector
  Per a multiplicar un nombre per un vector s'ha de multiplicar cada component del vector per aquest nombre. Per exemple, si es multiplica el vector $\vec{u}$ anterior per 3 s'obté:
  $3 \cdot \vec{u} = (9, 12)$



  És fàcil comprovar que aquesta operació multiplica la longitud del vector pel nombre. En la representació del marge es pot comprovar. Si el signe del nombre és negatiu, s'obté un vector de la mateixa longitud, però en sentit contrari.
  Si $\vec{u}$ és un vector qualsevol, el vector $-\vec{u}$ s'anomena vector oposat de $\vec{u}$. A més, el vector $\vec{0} = (0,0)$ és l'element neutre de la suma de vectors perquè el resultat de la suma de qualsevol vector amb aquest vector $\vec{0}$ és el primer vector.

Hi ha una altra operació, que involucra dos vectors, però el resultat de la qual és un nombre real; es tracta del producte escalar de vectors.

- El producte escalar de dos vectors, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, es denota $\vec{u} \cdot \vec{v}$, i el seu resultat és igual a la suma dels productes de les coordenades corresponents. Així, doncs, si $\vec{u} = (u_1,u_2)$ i $\vec{v} = (v_1,v_2)$, llavors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$. Per exemple, si $\vec{u} = (2, 4)$ i $\vec{v} = (–1,3)$, llavors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (–1) + 4 \cdot 3 = 10$.
  El producte escalar de dos vectors és una operació molt important perquè té aplicacions molt variades, des del càlcul de l'angle entre vectors, fins a la posició de dues rectes en el pla.

Què és la norma d'un vector, i com es calcula?

> La norma d'un vector és igual a la seva longitud. El seu càlcul es fa a partir del producte escalar; així, si $\vec{u}$ és un vector, la seva norma és $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. La norma d'un vector té diverses propietats: la norma de

qualsevol vector sempre és positiva, i quan és 0 és perquè es tracta del vector nul; si es multiplica un vector per un nombre, la norma d'aquest nou vector és igual al mòdul del nombre per la norma del primer vector; finalment, la norma de la suma de dos vectors sempre és menor o igual a la suma de normes.

La norma d'un vector, $\vec{u}$, és la mesura de la seva longitud. La norma es denota per $\|\vec{u}\|$ i es calcula utilitzant el producte escalar:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

és a dir, la norma és l'arrel quadrada del producte escalar. Vegem que coincideix amb la idea de longitud del vector: si un vector $\vec{u} = (u_1,u_2)$, la seva longitud ha de ser la mateixa que la distància entre el punt de coordenades (u_1,u_2) i l'origen de coordenades. És a dir, la longitud d'$\vec{u}$ hauria de ser:

$$\sqrt{(u_1-0)^2+(u_2-0)^2} = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

Vegem que la definició de la norma s'ajusta a aquest valor:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{(u_1,u_2)\cdot(u_1,u_2)} = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

El resultat és, doncs, el mateix.
Les propietats bàsiques de la norma d'un vector són:

- $\|\vec{u}\| \geq 0$ per a qualsevol vector.
- $\|\vec{u}\| = 0$ només si $\vec{u} = \vec{0}$.
- si α és un nombre qualsevol: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$. Això és fàcil de comprovar:
  $$\|\alpha\vec{u}\| = \|\alpha(u_1,u_2)\| = \|(\alpha u_1,\alpha u_2)\| = \sqrt{\alpha^2u_1^2+\alpha^2u_2^2} =$$
  $$= |\alpha|\sqrt{u_1^2+u_2^2} = |\alpha|\|\vec{u}\|$$
- si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors qualssevol: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$, i aquesta desigualtat s'anomena desigualtat triangular de Cauchy–Schwarz. És a dir, la norma de la suma de dos vectors és sempre menor o igual que la suma de les normes de cadascun dels vectors. Vegem-ho: si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (u_1, u_2)$.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{(u_1,u_2)+(v_1,v_2)} = \sqrt{(u_1+v_1,u_2+v_2)} =$$
$$= \sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2} =$$
$$= \sqrt{u_1^2+2u_1v_1+v_1^2+u_2^2+2u_2v_2+v_2^2}$$

$$\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}+\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

Hem de demostrar, doncs, que

$$\sqrt{u_1^2+2u_1v_1+v_1^2+u_2^2+2u_2v_2+v_2^2} \leq \sqrt{u_1^2+u_2^2}+\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

si elevem al quadrat els dos costats de la desigualtat:

$$\left(\sqrt{u_1^2+2u_1v_1+v_1^2+u_2^2+2u_2v_2+v_2^2}\right)^2 = u_1^2+2u_1v_1+v_1^2+u_2^2+2u_2v_2+v_2^2$$

$$\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}+\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^2 = u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2+2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

Com que ambdues expressions comparteixen $u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2$, hauríem de comprovar que la resta compleix:

$$2u_1v_1+2u_2v_2 \leq 2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

Si elevem de nou al quadrat:

$$\left(2u_1v_1+2u_2v_2\right)^2=\left(2u_1v_1\right)^2+\left(2u_2v_2\right)^2+2\cdot 2u_1v_1\cdot 2u_2v_2$$

$$\left(2\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}}\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}}\right)^2=4\left(u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}\right)\left(v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}\right)$$

Les dues expressions comparteixen $\left(2u_1v_1\right)^2+\left(2u_2v_2\right)^2$: per tant, s'ha de demostrar que:

$$2\cdot 2u_1v_1\cdot 2u_2v_2\leq 16u_1^{\ 2}v_2^{\ 2}+16u_2^{\ 2}v_1^{\ 2}$$

simplificant:

$$u_1v_1u_2v_2\leq u_1^{\ 2}v_2^{\ 2}+u_2^{\ 2}v_1^{\ 2}$$

posant el primer membre en el segon:

$$0\leq u_1^{\ 2}v_2^{\ 2}+u_2^{\ 2}v_1^{\ 2}-u_1v_1u_2v_2=(u_1v_2-u_2v_1)^2$$

Però aquesta última expressió és correcta, $0\leq(u_1v_2-u_2v_1)^2$, ja que qualsevol nombre al quadrat és més gran o igual a 0. Per tant, l'expressió inicial també és certa: $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\leq\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$.

Com es calcula l'angle entre dos vectors?

> Dos vectors formen un angle el cosinus del qual és igual al quocient entre el producte escalar dels vectors, dividit entre el producte de normes d'aquests vectors. En cas que el producte escalar dels vectors sigui 0, aquest cosinus serà 0 i, per tant, l'angle serà de 90º. És a dir, els vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és 0. En canvi, si el valor absolut del producte escalar és igual al producte de normes, llavors ambdós vectors són paral·lels.

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, es pot comprovar que:

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1$$

ja que $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Vegem-ho:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

si elevem al quadrat:

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2 = \left(u_1v_1 + u_2v_2\right)^2 = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + 2u_1u_2v_1v_2$$

$$\left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\right)^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 = \left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2\right) =$$

$$= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2$$

En ambdós casos comparteixen $u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2$. Per tant, només hem de comprovar que $2u_1u_2v_1v_2 \leq u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2$ o, el que és el mateix:

$$0 \leq u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1u_2v_1v_2$$

però això és evident, com s'ha vist anteriorment, ja que:

$$u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - u_1v_1u_2v_2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \geq 0$$

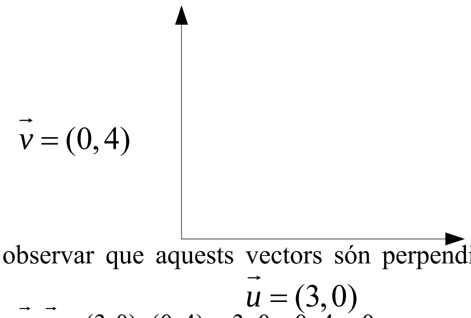
així, doncs:

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1$$

Sabem que el cosinus d'un angle compleix aquesta condició. Per tant, definirem l'angle α entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com l'angle el cosinus del qual és

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

És evident que quan aquest angle sigui de 90º, llavors el seu cosinus serà 0. En aquest cas, es diu que els vectors són perpendiculars. D'aquesta manera, dos vectors són perpendiculars quan el producte escalar entre aquests vectors és igual a 0. Un exemple senzill pot ser aquest:



Es pot observar que aquests vectors són perpendiculars; si es calcula el producte escalar:

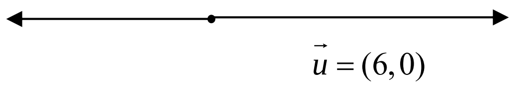
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,0) \cdot (0,4) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$$

Efectivament, el seu producte escalar és 0

Un altre cas important es produeix quan el cosinus és 1 o –1 (i el valor de l'angle és 0º o 180º), és a dir, quan els vectors són paral·lels (amb el mateix sentit, o amb sentit oposat). Així, doncs:

$$\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|$$

Vegem un exemple:



El producte d'aquests vectors és igual:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (6,0) \cdot (-5,0) = -30$$

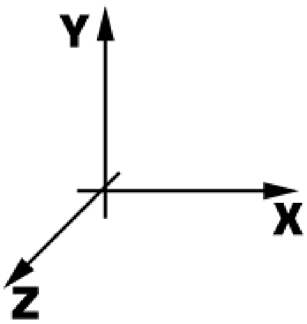
El producte de les seves normes és:

$$\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{36}\sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$$

Així, es compleix que $\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|$.

Com es representen els punts i els vectors en l'espai?

La representació de punts en l'espai fa servir un sistema de coordenades amb tres eixos. Per això, un punt de l'espai té tres coordenades. La distància entre dos punts de l'espai es calcula de manera semblant a la de dos punts en el pla, tenint en compte la incorporació de la nova coordenada. De la mateixa manera, els vectors en l'espai tenen tres components, i les operacions entre vectors es fan de manera molt semblant a les operacions entre vectors en el pla.



El procediment per a representar punts en l'espai és molt semblant al que se segueix en el pla; a l'espai només s'hi ha d'afegir una coordenada més per a tenir les tres dimensions cobertes: altura, amplària, profunditat. Per això, un sistema de referència en l'espai consta de tres eixos: eix X, eix I i eix Z, tal com es mostra en la imatge,

Un punt en l'espai es representa per tres coordenades P = (x, y, z); cadascuna d'elles assenyala la posició en l'eix corresponent. Per a calcular la distància entre dos punts, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, s'ha de fer el següent:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Es pot observar la gran semblança d'aquest càlcul amb el càlcul de la distància entre dos punts de l'espai.

Aquesta semblança s'estén també a la definició de vectors fixos i vectors lliures de l'espai. Els vectors lliures de l'espai s'expressen amb una terna de nombres (en lloc del parell ordenat del vector del pla), compleixen les mateixes propietats que els vectors del pla i les operacions són les mateixes, tenint sempre en compte que un vector de l'espai té tres components, i no dos. Per exemple, el producte escalar entre dos vectors del pla, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

La norma d'un vector de l'espai es defineix de la mateixa manera, tenint en compte, novament, que els vectors de l'espai tenen un component més:

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

També l'angle entre vectors es calcula de la mateixa manera, calculant el cosinus d'aquest angle:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|}$$

Evidentment, dos vectors de l'espai són perpendiculars si el seu producte escalar és 0, i dos vectors de l'espai són paral·lels si el valor absolut del seu producte escalar és igual al producte de les seves normes.

Vegem-ne un exemple: si $\vec{u} = (1,2,3)$ i $\vec{v} = (-1,2,-1)$, l'angle α que formen aquests dos vectors es compleix:

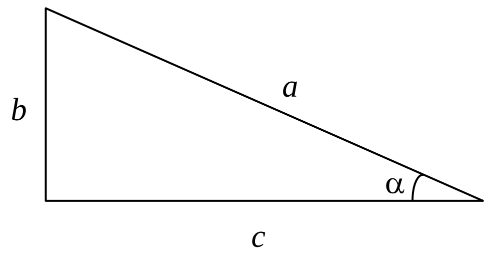
$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{(1,2,3)\cdot(-1,2,-1)}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{-1+4-3}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = 0$$

Per tant, aquests vectors són perpendiculars, ja que el seu producte escalar és 0.

Trigonometria

Trigonometria

Raons trigonomètriques d'un angle agut

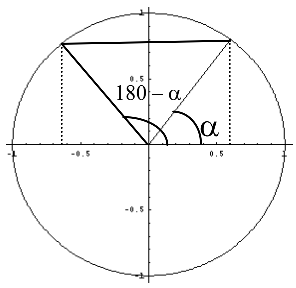


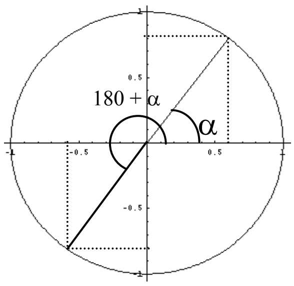
Denominació	Definició	Propietat bàsica
Sinus	$\sin \alpha = \dfrac{b}{a}$	$0 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$
Cosinus	$\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$	$0 \leq \cos \alpha \leq 1$
Tangent	$\text{tg } \alpha = \tan \alpha = \dfrac{b}{c}$	$\text{tg } \alpha = \tan \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

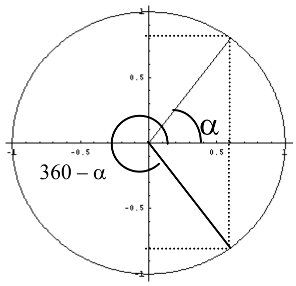
Propietat fonamental

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Raons trigonomètriques de qualsevol angle





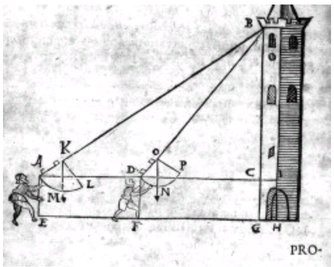


Si α és un angle del primer quadrant:

180 – α és del segon quadrant i	$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$
180 + α és del tercer quadrant i	$\sin(180 + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180 + \alpha) = -\cos \alpha$
360 – α és del quart quadrant i	$\sin(360 - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(360 - \alpha) = \cos \alpha$

Nota històrica sobre els termes trigonomètrics

La trigonometria és una part de la matemàtica que, genèricament, estudia la relació entre la mesura dels angles i els costats d'un triangle. De fet, la mateixa paraula *trigonometria* té l'origen en aquest fet: *tri–* significa "tres", *gono–*, significa "angle" i *–metria* significa "mesura", és a dir, *trigonometria* significa una "mesura de (figures) amb tres angles".
El terme trigonometria el trobem per primera vegada en l'obra del matemàtic alemany Bartholomaeus Pitiscus, *Blatnometria sive de dimensione triangulorum*, publicada el 1595, encara que molts resultats de la trigonometria ja eren coneguts a l'antiguitat (teorema de Pitàgores, teorema de Tales...). Els primers usos de la trigonometria (encara que no tingués aquest nom) van ser la cartografia, l'astronomia i la navegació, i només recentment el seu ús s'ha estès a molts altres camps. L'astronomia és, potser, el camp que des d'antic va estar més unit a la trigonometria i, de fet, la major part d'estudis trigonomètrics es presentaven en treballs astronòmics. Fins al segle XIII no es va produir la primera presentació de la trigonometria com a ciència independent de l'astronomia: va ser el matemàtic persa Sharaf al–Din al–Tusi.

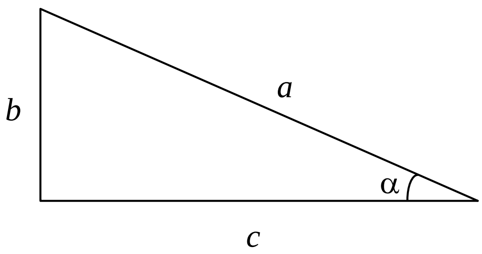


De l'obra *Problematum variorum geodaeticum* de B. Pitiscus.

Els termes *sinus, cosinus* i *tangent* tenen una història curiosa. Una antiga obra hindú sobre astronomia, *Surya Siddhanta*, dóna una taula de mitjanes–cordes (en un altre tema s'estudiarà el significat de la corda), que coincideixen amb la idea del sinus d'un angle, molt útils per a calcular els moviments de les estrelles. Posteriorment, l'obra *Aryabhatiya* d'Aryabhata, que també era hindú (cap al 500 dC) fa un estudi més profund de les mitjanes–cordes, que denomina *jiva* (en sànscrit, llengua en què està escrita aquesta obra). Els àrabs la van traduir i el terme *jiva* va ser transformat en l'aràbic *jiba*, però escrit *jb* (atès que l'àrab clàssic no té vocals). Més endavant, els traductors al llatí d'aquesta obra, van traduir *jb* per *sinus*, ja que van pensar que es referia a *jaib* (i no a *jiba*), i *jaib* significa *pit* o *sina* (tot i que en català utilitzem la paraula *sinus*). Així, del significat original, *mitjana–corda*, es va passar, per una traducció errònia, a *sinus*.
A banda de l'anècdota, aquest relat il·lustra el recorregut dels estudis trigonomètrics al llarg de la història: primer, a l'Índia, posteriorment, en àrab, des de Bagdad fins a l'Al–Andalus; des d'aquí es va introduir a Europa amb les traduccions llatines, fins a les llengües modernes.
Les altres dues raons trigonomètriques tenen una història més recent. El cosinus va sorgir de la necessitat de calcular el sinus de l'angle complementari. Així, originàriament, Edmund Gunter el 1620 va escriure *co.sinus* precisament per a indicar "sinus de l'angle complementari" (que com sabem, és igual al cosinus de l'angle); una mica més tard, John Newton (no Isaac Newton) va estandarditzar el terme *cosinus*, del qual prové el nostre *cosinus*.
Finalment, la paraula *tangent* deriva de la paraula llatina *tangere*, que significa *tocar* (molt relacionat amb la idea geomètrica de la tangent), i va ser introduïda per Dane Thomas Fincke el 1583.

Quines són les raons trigonomètriques d'un angle agut?

A partir dels resultats anteriors poden definir les **raons trigonomètriques** d'un angle agut qualsevol: el sinus, el cosinus i la tangent.



El **sinus** d'un angle agut α és igual al quocient entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa:

$$\sin \alpha = \frac{b}{a}$$

S'ha de destacar que el sinus és un nombre positiu mai més gran que 1 (un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa): $0 \le \text{sen } \alpha \le 1$.

Per la seva banda, el **cosinus** d'aquest angle α és igual al quocient entre el catet contigu a l'angle i a la hipotenusa:

$$\cos \alpha = \frac{c}{a}$$

També cal destacar que el cosinus és un nombre positiu mai més gran que 1 (un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa): $0 \le \cos \alpha \le 1$.

La tangent d'aquest angle α és igual al quocient entre el catet oposat i el catet contigu a l'angle (s'usen indistintament els símbols tg o tan):

$$\text{tg } \alpha = \tan \alpha = \frac{b}{c}$$

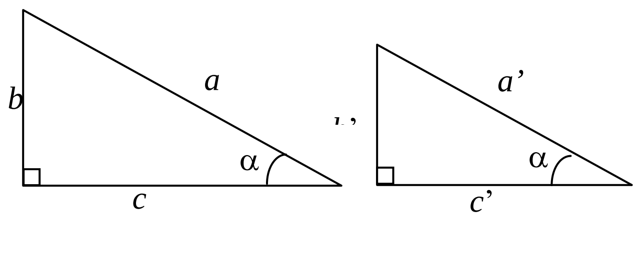
No és difícil constatar que la tangent també es pot calcular com el quocient del sinus entre el cosinus de l'angle:

$$\text{tg } \alpha = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c}$$

Les raons trigonomètriques d'un angle depenen del triangle rectangle escollit?

Les raons trigonomètriques d'un angle no depenen del triangle escollit per a definir-les.

Cal destacar que el sinus, el cosinus i la tangent d'un angle no depenen del triangle rectangle en el qual es troba aquest angle. Efectivament, donats aquests triangles rectangles amb dos angles iguals (el recte i α):



Llavors, el tercer angle també és igual (180 – 90 – α, en ambdós casos). Així, doncs, es tracta de dos triangles semblants i, per això, amb costats proporcionals. Per tant, es compleix:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

La primera igualtat també es pot expressar així:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

en altres paraules, el càlcul del sinus de l'angle α en ambdós triangles ha de donar el mateix resultat. De la mateixa manera, com

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \qquad \text{o també} \qquad \frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

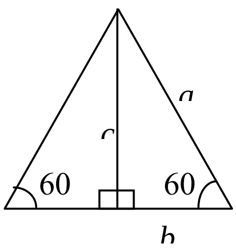
així, doncs, el cosinus de l'angle α tampoc no depèn del triangle que escollim per a trobar-lo. Igualment,

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ per tant, } \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

d'aquesta manera, tampoc la tangent d'α no depèn del triangle que s'utilitzi per a calcular-la.
En definitiva, per a qualsevol angle de 0 a 90º, hi ha un únic nombre que pugui ser el seu sinus, un únic nombre, el seu cosinus i, finalment, un únic nombre, la seva tangent. Aquests tres nombres es coneixen com les raons **trigonomètriques** bàsiques de l'angle.

Quines són les raons trigonomètriques bàsiques de l'angle de 60º o $\pi/3$ rad?

> L'angle de 60º o $\pi/3$ rad té per cosinus 1/2 , per sinus $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$ i per tangent $\sqrt{3} \cong 1,732$.



Si unim dos triangles rectangles iguals amb un angle de 60º (o $\pi/3$ rad), pel seu catet major, obtindrem indefectiblement un triangle equilàter, perquè l'altre angle del triangle rectangle és 30º, i 30 + 30 = 60. La hipotenusa de qualsevol d'ambdós triangles rectangles és igual al costat del triangle equilàter. El catet contigu a l'angle de 60º fa la meitat de la hipotenusa. És a dir, si *a* és la hipotenusa, i *b* és el catet contigu a l'angle de 60º, el quocient entre aquest catet i la hipotenusa és:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

Aquest resultat no depèn ni del valor concret de la hipotenusa, ni del valor concret del catet. És a dir, aquest quocient sempre serà igual a 1/2 per a un triangle rectangle amb un angle de 60º, i sabem que es denomina **cosinus de 60º**, i s'escriu cos 60. Així, doncs,

cos 60 = ½ o bé, en radians cos $\pi/3$ = 1/2

El catet oposat a l'angle de 60º, *c*, es pot relacionar amb els altres dos costats, per mitjà del teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ara bé, com que $a = 2b$

$$(2b)^2 = b^2 + c^2 \quad \text{és a dir,} \quad 4b^2 = b^2 + c^2$$

en definitiva,

$$c^2 = 3b^2 \text{ o el que és el mateix } \quad c = b\sqrt{3}$$

Per tant, si volem establir la proporció entre el catet oposat a l'angle de 60º i la hipotenusa:

$$\frac{c}{a} = \frac{b\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$$

Aquesta proporció no depèn de la longitud dels costats del triangle rectangle amb un angle de 60º i sabem que es denomina sinus de 60º, i s'escriu sin 60. Així, doncs,

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866 \text{ o bé, en radians} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866$$

Finalment, podem trobar la relació entre el catet oposat i el catet contigu de 60º:

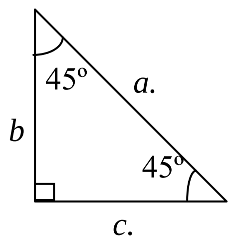
$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

tampoc depèn aquesta proporció del valor concret dels catets i, com sabem, es denomina tangent de 60º, i s'escriu tg 60, o també, tan 60. De manera que,

$$\text{tg } 60 = \sqrt{3} \cong 1,732 \quad \text{o bé, en radians,} \qquad \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cong 1,732$$

Quines són les raons trigonomètriques bàsiques de l'angle de 45º o π/4 rad?

> L'angle de 45º o π/4 rad té tant per cosinus com per sinus $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$ i per tangent, 1.



Si un dels angles d'un triangle rectangle és igual a 45º (o π/4 rad), és evident que l'altre angle (a part del recte) ha de ser també de 45º. Per la mateixa raó, ambdós catets han de ser iguals, és a dir, $b = c$. Si combinem aquest fet amb el teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$

és a dir:

$$a = \sqrt{2}b$$

o, també,

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

així, doncs, la proporció entre el catet contigu de 45º i la hipotenusa és igual a $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$, i és independent del valor concret dels costats d'aquest triangle. Així, doncs, el **cosinus de 45º** és igual a

$$\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707 \qquad \text{o bé, en radians} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$$

Evidentment, com que ambdós catets són iguals, la proporció entre el catet oposat de 45º i la hipotenusa haurà de tenir el mateix valor. Aquest valor és el **sinus de 45º**. És a dir:

$$\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707 \qquad \text{o bé, en radians} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$$

Finalment, podem trobar la relació entre el catet oposat i el catet contigu de 45º. En aquest cas és molt fàcil:

$$\frac{b}{c} = 1$$

tampoc no depèn aquesta proporció del valor concret dels catets. Així, doncs, la tangent de 45º és 1, és a dir,

$$\text{tg } 45 = 1 \qquad \text{o bé, en radians} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Com es calculen les raons trigonomètriques d'un angle amb la calculadora?

> Per a calcular les raons trigonomètriques d'un angle en una calculadora, s'utilitzen les tecles que hi corresponen, tenint en compte si aquesta es troba en mode DEG (graus) o en mode RAD (radians).

En general, no és tan fàcil trobar les raons trigonomètriques de qualsevol altre angle, a part dels ja estudiats. Fins a l'aparició de les calculadores científiques, hi havia taules trigonomètriques que permetien trobar les raons trigonomètriques de qualsevol angle; de la mateixa manera, també hi havia taules que permetien trobar un angle a partir d'una de les seves raons trigonomètriques. En l'actualitat, aquestes taules no s'utilitzen, perquè qualsevol calculadora fa aquestes funcions de manera més eficient i senzilla.

Abans de començar a realitzar qualsevol càlcul, s'ha de tenir en compte de quina manera s'introdueix l'angle, en graus sexagesimals o en radians. La calculadora té un mode de treball en graus sexagesimals, mode DEG (de l'anglès, *degree*, és a dir, grau), i un mode de treball en radians, mode RAD. Normalment, el mode de treball es pot llegir sempre sobre la pantalla, en algun dels seus extrems.

Per a canviar d'un mode a un altre només cal localitzar les tecles MODE (si no existeix, acostuma a ser la tecla INV) i les dues anteriors: es pressiona primer la tecla MODE (o INV), i posteriorment la de la mode que volem. Per exemple, per a posar la calculadora en mode graus sexagesimals s'ha de fer el següent:

MODE + DEG

Si volem treballar amb radians, s'ha de fer el mateix, però pressionant la tecla RAD en lloc de la tecla DEG. Una vegada fet això, per a calcular les raons trigonomètriques, primer s'han de localitzar les tres tecles que permeten calcular-les: les tecles SIN, COS i TAN. Es pot observar que en la part superior d'aquestes tecles hi ha, habitualment, certes expressions ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, generalment), que indiquen que amb aquestes tecles també es poden calcular els angles a partir de les raons trigonomètriques.

Per a calcular el sinus d'un angle, s'ha de posar la calculadora en el mode correcte (DEG o RAD). Per exemple, si volem calcular el sinus de 33º, hem de posar la calculadora en mode DEG. Posteriorment, cal escriure l'angle, 33, i finalment, pressionar la tecla SIN. Obtindrem, 0.544639035 (a la calculadora la coma decimal és un punt), que és el sinus de 33º. De manera semblant, podem calcular el cosinus i la tangent de qualsevol angle agut.

En canvi, si coneixem el sinus d'un angle i volem saber de quin angle es tracta, hem d'actuar així: introduïm l'angle, pressionem la tecla INV seguida de la tecla SIN (és a dir, calculem l'invers del sinus, o sigui, l'angle a partir del seu sinus). Per exemple, si volem conèixer l'angle (en mode DEG) que té per sinus 0,823, introduïm aquest nombre, seguit de INV i SIN; apareixerà a la pantalla 55.35624273. És a dir, el sinus de 55,35624273º és 0,823. De manera semblant es poden trobar els angles que tenen per cosinus (o per tangent) un valor determinat. En aquest cas, cal recordar que el sinus i el cosinus han de ser valors entre 0 i 1. A més, en general, els valors obtinguts són aproximats.

Exercicis bàsics amb calculadora:
Calculeu les raons trigonomètriques d'aquests angles:
α que el seu sinus és igual a 0,32 (sol: cos α = 0,9474, tg α = 0,3378)
β el cosinus del qual és igual 0,93 (sol: sin β = 0,3676, tg β = 2,5302)
γ la tangent del qual és igual a 1,23 (sol: sin γ = 0,7759, cos γ = 0,6308)

Quines són les raons trigonomètriques de l'angle de 83º? (sol: sin 83 = 0,9925; cos 83 = 0,1219; tg 83 = 8,1443)

Quines són les raons trigonomètriques de l'angle de 1 rad? (sol sin 1 = 0,8415; cos 1 = 0,5403; tg 1 = 1,5574)

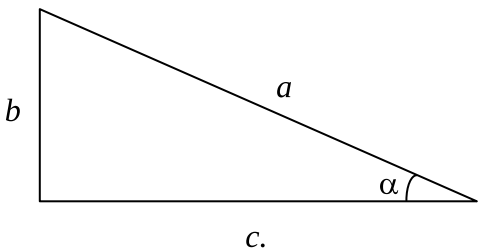
Quin és l'angle que té per sinus 0,1231? Quines són les seves altres raons trigonomètriques? (sol: α = 0,1234 rad = 7,071º; cos 7,071 = 0,9924; tg 7,071 = 0,1124).

Quina és la igualtat bàsica de la trigonometria?

> Qualsevol angle α menor que l'angle recte compleix el següent:
> $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Donat un triangle de catets *b* i *c*, i d'hipotenusa *a* es pot calcular:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$



tenint en compte que $a^2 = b^2 + c^2$.
En definitiva,

$$(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1.$$

qualsevol que sigui l'angle α, la suma dels quadrats del sinus i el cosinus és igual a 1. De vegades, aquesta igualtat també s'escriu així:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Aquesta fórmula ens permet calcular el sinus a partir del cosinus (i a l'inrevés):

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ per tant, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

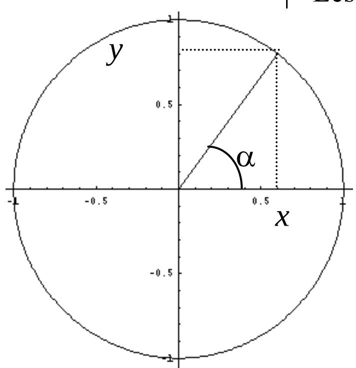
de la mateixa manera

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Per exemple, si el sinus d'un angle α fos 0,4, el seu cosinus hauria de ser $\cos\alpha = \sqrt{1-0,4^2}$. De la mateixa manera, si el cosinus d'un angle β fos 0,8, el seu sinus seria $\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-0,8^2}$.

Com es calculen las raons trigonomètriques de qualsevol angle?

> Les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden deduir fàcilment de les raons trigonomètriques d'un angle agut.



Per a calcular les raons trigonomètriques de qualsevol angle, sigui o no agut, hem de dibuixar en el pla cartesià una circumferència unitària de centre l'origen de coordenades: és a dir, es representen dues rectes reals perpendiculars, que incloguin els punts de l'interval [–1,1], i que es tallin en el punt 0 de cadascuna d'elles. Es dibuixa una circumferència de radi 1, centrada en la intersecció de les rectes, com s'observa en la il·lustració.

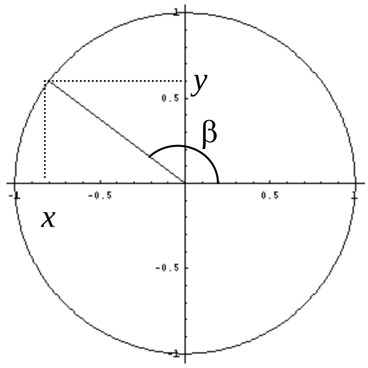
Es dibuixa un angle, α, tal com es mostra en la imatge. Si projectem el segment que forma l'angle sobre la recta horitzontal, obtenim un triangle rectangle. Com que la hipotenusa fa exactament 1, el cosinus de l'angle α ha de ser $x/1$: per tant, $\cos \alpha = x$. De la mateixa manera és fàcil comprovar que $\sin \alpha = y$. Evidentment, la tangent d'aquest angle ha de ser $\text{tg } \alpha = y/x$.

Ara podem dibuixar aquest segon angle, β, aquesta vegada obtús. En aquest cas, podem definir, de manera semblant al cas anterior:

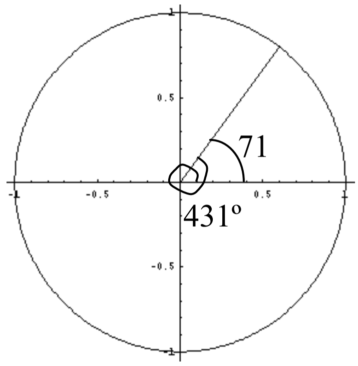
$$\sin \beta = y \qquad \cos \beta = x$$

A partir d'aquí, la tangent d'aquest angle es pot calcular com a $\text{tg } \beta = y/x = \sin \beta / \cos \beta$.

Es pot observar en la il·lustració qui el cosinus de β serà negatiu; ara bé, el seu valor absolut no pot ser, en cap cas, major que 1. En general es poden definir d'aquesta manera les raons trigonomètriques de qualsevol angle de 0 a 360º, essent el sinus i el cosinus de qualsevol angle nombres compresos entre –1 i 1.



D'altra banda, qualsevol angle més gran de 360º (o 2π rad) es correspon a un angle entre 0º i 360º, tal com mostra aquesta imatge:



Evidentment, els angles 71º i 431º (71 + 360) tenen les mateixes raons trigonomètriques. En general, si α és un angle de 0º a 360º, llavors:

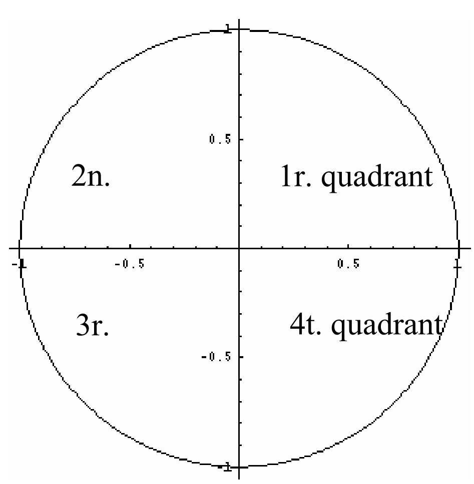
$$\sin \alpha = \sin (360 + \alpha) = \sin (2 \cdot 360 + \alpha) = \ldots$$

$$\cos \alpha = \cos (360 + \alpha) = \cos (2 \cdot 360 + \alpha) = \ldots$$

És a dir, les raons trigonomètriques es van repetint quan se suma 360 a un angle. Així, per exemple,

$$\sin (8342) = \sin (23 \cdot 360 + 62) = \sin 62.$$

Cada zona de la circumferència unitària dividida per les dues rectes reals es denomina **quadrant**. Així, doncs, hi ha quatre quadrants, que es denominen de l'1 al 4 tal com mostra la imatge:



En tot cas, les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden trobar coneixent únicament les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant. Per a demostrar-ho, n'hi ha prou d'observar aquestes il·lustracions:

Podem afirmar, doncs, que si α és un angle del primer quadrant:

sin (180 – α) = sense α cos (180 – α) = –cos α

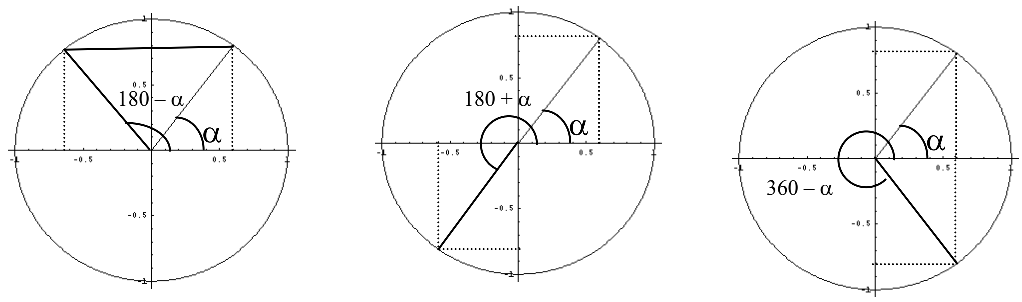
sin (180 + α) = –sense α cos (180 + α) = – cos α

sin (360 – α) = – sense α cos (360 – α) = cos α

La propietat fonamental de la trigonometria se segueix complint; és a dir, per a qualsevol angle α es compleix sempre:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1.$$

Això és així, perquè en últim terme el sinus i el cosinus d'un angle sempre es calculen a partir del sinus i el cosinus d'un angle agut; l'única modificació és el signe, que no és important quan s'eleva el valor al quadrat.



Les equacions dels elements geomètrics

Les equacions dels elements geomètrics

La suma d'un punt més un vector

Si P és un punt i $\vec{v}$ és un vector, la suma del punt P més el vector $\vec{v}$ és un altre punt, Q, de manera que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. La suma s'expressa així:

$$Q = P + \vec{v}$$

Propietats:

1. Si P és un punt i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, llavors:
   $P + \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \left(P + \vec{u}\right) + \vec{v}$
2. Si P és un punt, llavors:
   $P + \vec{0} = P$
3. Si P i Q són punts, hi ha un únic vector que compleix:
   $Q = P + \vec{v}$ i aquest vector és, precisament, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

Equacions d'una recta

Una recta del pla es pot expressar de diferents maneres. Si es denomina r la recta del pla, $P = (p_1, p_2)$ un punt concret d'aquesta recta i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector director de la recta,

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma paramètrica és la següent:

  $$(x, y) = P + \alpha\vec{v} = (p_1, p_2) + \alpha(v_1, v_2)$$

essent α paràmetre de l'equació. Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret.

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma cartesiana és la següent:

  $$x = p_1 + \alpha v_1$$
  $$y = p_2 + \alpha v_2$$

essent α el mateix paràmetre de l'equació anterior. Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret, tenint en compte que les dues coordenades s'han de trobar utilitzant el mateix paràmetre.

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma explícita és la següent:

  $$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

Per a trobar altre punt de la recta, s'ha de donar un valor a la x o a la y, i resoldre l'equació lineal resultant.

- L'expressió dels punts (x,y) de la recta r en forma implícita és la següent:

  $Ax + By + C = 0$ on $A = v_2$, $B = -v_1$ i $C = -p_1v_2 + p_2v_1$

en aquest cas, no es pot conèixer de manera immediata un punt de la recta; per a fer-ho, s'ha de substituir una de les coordenades per un valor, i a continuació resoldre l'equació resultant. On el vector director de la recta és (–B, A).

Relacions entre un punt i una recta

Donat un punt P = (p_1, p_2) i una recta *r*: A x + B*y* + C = 0 , es poden produir dues situacions:

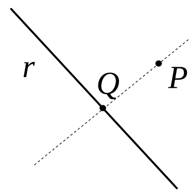
- El punt P pertany a la recta *r*: en aquest cas, les coordenades del punt compleixen l'equació de la recta, és a dir:

$$\mathrm{A}p_1 + \mathrm{B}p_2 + \mathrm{C} = 0$$

- El punt P no pertany a la recta *r*.

Hi ha un fórmula que permet calcular de manera senzilla la distància d'un punt P = (p_1, p_2) a una recta *r*: A x + B*y* + C = 0

$$d(P,r) = \frac{|\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$



Aquesta fórmula resulta de calcular la distància entre *P* i *Q*, essent *Q* la intersecció de la recta *r* amb una recta perpendicular a la recta *r* que passi pel punt P.

Relacions entre dues rectes del pla

Dues rectes en el pla es poden intersecar en un punt, coincidir, o bé, ser paral·leles. A partir de l'equació implícita de cada recta, es pot esbrinar a quina d'aquestes situacions correspon:

- Dues rectes s'interseq uen en un punt si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té una única solució, és a dir, si el sistema és compatible determinat. La solució d'aquest sistema correspon a les coordenades del punt d'intersecció.

En aquest cas, a més, és possible trobar els angles entre ambdues rectes, obtenint un vector director de cada recta, i calculant l'angle entre ambdós vectors. Així, doncs, si les rectes són:

$$r: \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$$
$$s: \mathrm{A'}x + \mathrm{B'}y + \mathrm{C'} = 0$$

Els vectors directors d'ambdues rectes són: $\vec{u}$ = (–B,A) i $\vec{v}$ = (–B',A'); per tant, el cosinus d'un dels angles que formen aquestes rectes és igual a:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Si els angles són tots de 90º, es diu que les rectes són perpendiculars.

- Dues rectes coincideixen si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té infinites solucions, és a dir, si el sistema és compatible indeterminat. En aquest cas, ambdues equacions són equivalents.

- Dues rectes són paral·leles si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes no té solucions, és a dir, si el sistema és incompatible.

En aquest cas, es pot trobar de manera senzilla la distància entre aquestes dues rectes, si es considera que qualsevol punt de la primera recta està a la mateixa distància de l'altra recta. Per això, n'hi ha prou de calcular la distància d'un punt de la primera recta a un punt de la segona recta.

El postulat de les paral·leles d'Euclides

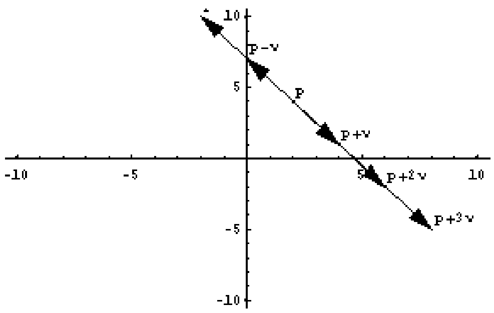
Euclides d'Alexandria (segle IV aC) és un dels matemàtics grecs més importants i la seva obra *Els elements* és una de les obres més editades de la història. Està dividida en tretze llibres o capítols, dels quals els sis primers són sobre geometria plana elemental i els tres últims, sobre geometria en l'espai (per això, la geometria clàssica, que s'estudia en aquest curs, també s'anomena *geometria euclidiana*). Per tant, es tracta d'una obra gairebé enterament dedicada a la geometria, que per als antics era la pedra angular de les matemàtiques. L'obra s'inicia amb una sèrie de definicions generals (d'un punt, d'una recta, etc.); a continuació hi ha una llista de cinc postulats i, finalment, cinc nocions comunes. Els postulats són concebuts per Euclides com a enunciats convincents per ells mateixos, veritats indiscutibles però que no es poden demostrar. Entre els cinc postulats, els quatre primers mai no han aixecat cap controvèrsia; en canvi, el cinquè ha estat sempre font d'acalorades discussions. Es tracta del denominat *postulat de les paral·leles*, que diu així: "si una línia recta talla dues línies rectes més formant amb elles angles interiors del mateix costat menors que dos angles rectes, les dues línies rectes, perllongades indefinidament, es tallen del costat pel qual els angles són menors que dos angles rectes". Una altra manera d'expressar-ho: "per un punt aliè a una recta, només es pot traçar una paral·lela".
El problema d'aquest postulat radica en el fet que molts, al llarg de la història, han considerat que és possible demostrar-lo i, per tant, no s'hauria de considerar un postulat. Són molt nombrosos els intents que des del segle III aC fins al segle XIX s'han fet per a provar el cinquè postulat d'Euclides. Aquests estudis els van fer persones de diferents cultures. El rabí Gersónides, amb els denominats quadrilàters equilàters i equiangles, el musulmà Omar Khayyam o el jesuïta Girolamo Saccheri. Totes les demostracions contenien alguna errada que normalment consistia en una afirmació que és correcta en geometria euclidiana i que en cert sentit sembla que sigui evident, que no cal demostrar. Totes aquestes afirmacions, i moltes altres, de la geometria absoluta són equivalents al cinquè postulat. És a dir, que es pot substituir el cinquè postulat per una qualsevol d'elles. En aquest cas, l'afirmació triada adquireix el caràcter de postulat i, per tant, tota la feina s'ha fet endebades.
Cal parar una atenció especial als resultats obtinguts per Girolamo Saccheri (1667–1733), que indubtablement són els primers d'importància en la geometria no euclidiana, que no es va desenvolupar pràcticament fins al segle XIX. El mètode de treball de Saccheri, negant el cinquè postulat, espera trobar una contradicció, i va obrir la porta al descobriment de la geometria no euclidiana. Realment Saccheri havia descobert la geometria no euclidiana però la seva fe cega que la veritat del cinquè postulat el va dur a recórrer a fal·làcies més o menys elaborades. Avui sabem que negar el cinquè postulat no duu a cap contradicció, sinó només obre la porta a altres geometries, que són de vital importància en grans teories científiques del segle XX, com la teoria de la relativitat.

Com se suma un vector a un punt del pla?

> La suma entre punts i vectors és una operació imprescindible per a la definició de les equacions dels elements geomètrics. El resultat de la suma d'un punt més un vector és altre punt, que es troba aplicant l'origen del vector sobre el punt; d'aquesta manera, el punt de l'extrem del vector correspondrà al resultat d'aquesta suma. Per a fer aquesta suma, s'han de sumar les coordenades del punt amb les components corresponents del vector.

Es pot sumar a qualsevol punt del pla qualsevol vector del pla. S'ha de tenir en compte que aquesta operació no és la mateixa que la suma de vectors, encara que com es veurà, formalment, hi té força semblances. La idea és molt senzilla: es tracta d'aplicar l'origen del vector sobre el punt, i el punt de l'extrem del vector correspondrà al resultat d'aquesta suma. Així, doncs, es pot dir que si P és un punt, i $\vec{v}$ és un vector, la suma del punt P més el vector $\vec{v}$ és un altre punt, *Q*, de manera que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Aquesta suma s'expressa així:

$$Q = P + \vec{v}$$



El gràfic mostra un punt P = (2, 4) i un vector $\vec{v}$ = (2–, 3), i diversos punts que es troben a partir d'aquests dos elements. Per exemple:

$$P + \vec{v} = (2,4) + (2,-3) = (4,1)$$

$$P + 2\vec{v} = (2,4) + 2(2,-3) = (6,-1)$$

$$P - 2\vec{v} = (2,4) - 2(2,-3) = (-2,10)$$

$$P - \vec{v} = (2,4) - (2,-3) = (0,7)$$

Aquesta operació compleix aquestes propietats:

1. Si P és un punt i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors, llavors:

   $$P + \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \left(P + \vec{u}\right) + \vec{v}$$

2. Si P és un punt, llavors:

   $$P + \vec{0} = P$$

   És a dir, si qualsevol punt P sumat amb el vector $\vec{0}$ no es modifica el punt *P*.

3. Si P i Q són punts, hi ha un únic vector que compleix:

   $$Q = P + \vec{v}$$

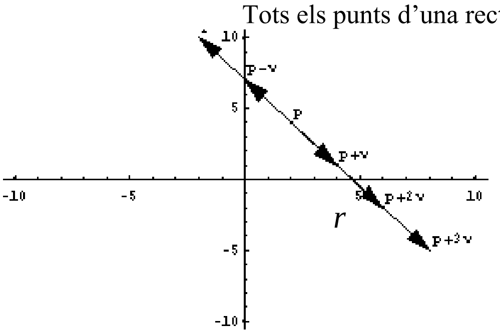
   evidentment, aquest vector és, precisament, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Finalment, s'ha d'insistir que, encara que en la seva expressió un punt i un vector s'assemblin molt, no són el mateix objecte ni es poden manipular de la mateixa manera. Aquest advertiment pot ser d'ajuda per a evitar, per exemple, la suma de punts, cosa que és impossible de fer.

Què són l'equació paramètrica i l'equació cartesiana d'una recta, i com es poden trobar?

> Tots els punts d'una recta es poden trobar sumant a un punt determinat de la recta un vector amb la mateixa direcció de la recta. L'equació que resulta d'aquest fet es denomina *equació paramètrica de la recta*. Si es descompon aquesta equació vectorial en els elements que la componen, s'obté l'equació cartesiana de la recta, que de fet es correspon a dues equacions que ens indiquen com es troba la *x* i la *y* de la recta.

Tots els punts d'una recta es poden trobar sumant a un punt determinat de la recta, un vector amb la mateixa direcció de la recta. En el gràfic es pot observar que tots els punts de la recta es poden trobar sumant al punt *P*, que es troba sobre la recta, un vector que sigui múltiple de $\vec{v}$. És a dir, qualsevol punt de la recta, (*x*, *y*), es pot trobar de la manera següent:



$$(x,y) = P + \alpha\vec{v}$$

o sigui,

$$(x,y) = P + \alpha\vec{v} = (p_1, p_2) + \alpha(v_1, v_2)$$

essent α un nombre.

Aquesta igualtat es denomina *equació paramètrica de la recta*, ja que els punts de la recta depenen del paràmetre α. En l'exemple, si el punt P = (2, 4) i el vector $\vec{v}$ = (2–, 3):

quan $\alpha = 1$ $\quad (x,y) = P + \overrightarrow{1 \cdot v} = (2,4) + (2,-3) = (4,1)$

quan $\alpha = 2$ $\quad (x,y) = P + 2\vec{v} = (2,4) + 2(2,-3) = (6,-1)$

quan $\alpha = -2$ $\quad (x,y) = P - 2\vec{v} = (2,4) - 2(2,-3) = (-2,10)$

Si s'igualen les coordenades de cada element en la fórmula original:

$$x = p_1 + \alpha v_1$$
$$y = p_2 + \alpha v_2$$

Aquest grup de dues expressions, amb les coordenades dels punts de la recta s'anomena *equació cartesiana de la recta*.

En l'exemple, com que *P* = (2,4) i $\vec{v}$ = (2–, 3), l'equació paramètrica de la recta és:

$(x, y) = \mathrm{P} + \alpha\vec{v} = (2, 4) + \alpha(2–, 3)$

és a dir, tots els punts (*x*, *y*) que compleixen l'equació cartesiana (que s'obté descomponent l'expressió anterior):

$x = 2 + 2\alpha.$

$y = 4 - 3\alpha.$

pertanyen a la recta *r*.

És evident que el punt P podria ser qualsevol punt de la recta, i el vector $\vec{v}$ podria ser qualsevol vector que tingués la mateixa direcció. Qualsevol d'aquests vectors s'anomena *vector director de la recta*, perquè és el que dóna la direcció de la recta. Per exemple, en la recta de l'exemple, un vector director és (2–, 3), però podria ser qualsevol dels seus múltiples, per exemple: (4, –6) o (–2,3).

Què són l'equació explícita i l'equació implícita d'una recta, i com es poden trobar?

> Si es descompon l'equació cartesiana de la recta s'obté l'equació explícita de la recta, aïllant el paràmetre de la primera i igualant els membres. A partir de l'equació explícita de la recta se'n pot obtenir l'equació implícita, agrupant tots els termes de l'equació explícita i eliminant-ne els denominadors. Aquest últim tipus és la forma més usual d'expressar una recta.

Si *r* és una recta, l'equació cartesiana de la qual és:

$$x = p_1 + \alpha \cdot v_1$$
$$y = p_2 + \alpha \cdot v_2$$

es pot fer la transformació següent: s'aïlla l'α de les dues igualtats:

$$\alpha = (x - p_1)/v_1.$$
$$\alpha = (y - p_2)/v_2.$$

Per tant, els dos membres de la dreta de cadascuna de les igualtats són iguals:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

Aquesta expressió s'anomena *equació explícita de la recta*. També es pot modificar aquesta expressió, de manera que no quedin denominadors i que no quedi cap terme a la dreta de la igualtat, de la manera següent:

$$(x - p_1)v_2 = (y - p_2)v_1.$$
$$v_2x - p_1v_2 = v_1y - p_2v_1.$$
$$v_2x - v_1y - p_1v_2 + p_2v_1 = 0$$

En definitiva, i per a simplificar, queda una equació del tipus:

$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ on $\mathrm{A} = v_2$, $\mathrm{B} = -v_1$ i $\mathrm{C} = -p_1v_2 + p_2v_1$

Aquesta forma d'expressar els punts de la recta es denomina *equació implícita de la recta*. En aquest cas, un vector director és (–B, A).

En el cas de l'exemple anterior, la recta tenia aquesta equació cartesiana:

$$x = 2 + 2.\ \alpha.$$
$$y = 4 - 3.\ \alpha.$$

per a convertir-la en equació explícita, cal aïllar α

$$\alpha = (x - 2)/2$$
$$\alpha = (y - 4)/-3$$

i, per tant,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-3}$$

és l'equació explícita d'aquesta recta.

Si es desenvolupa aquesta expressió:

$$-3(x - 3) = 2(y - 4)$$
$$-3x + 9 - 2y + 8 = 0$$
$$-3x - 2y + 17 = 0.$$

s'obté aquesta última expressió, que és l'equació implícita de la recta. Per a evitar començar per un signe negatiu, l'equació implícita de la recta queda de la manera següent:

$$3x + 2y - 17 = 0$$

A més, podem assegurar que un vector director d'aquesta recta podria ser (–2, 3), és a dir, un vector els components del qual siguin

component *x*: coeficient *y* de l'equació canviat de signe.
component *y*: coeficient *x* de l'equació canviat de signe.

L'equació implícita és la manera més usual d'expressar una recta. Així, doncs, normalment s'expressarà una recta *r* com a *r*: $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$.

Quina informació es pot obtenir de les equacions d'una recta?

> Cadascun dels tipus d'equacions amb els quals es pot expressar una recta ofereix informació essencial sobre la recta: d'una banda, es pot trobar un punt (o els que es vulguin) que pertanyi a aquesta recta (o fins i tot, comprovar si un determinat punt pertany a aquesta recta); d'altra banda, es pot trobar un vector director de la recta.

Cada equació té unes característiques que permeten conèixer certa informació sobre la recta:

- L'equació paramètrica d'una recta presenta de manera evident un punt de la recta i un vector director:

  $$(x, y) = (p_1, p_2) + \alpha(v_1, v_2)$$

  El punt és (p_1, p_2) i el vector director (v_1, v_2). Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret.
  Per exemple, si l'equació paramètrica d'una recta és:

  $$(x, y) = (3–, 3) + \alpha(1–, 4)$$

  Es pot assegurar que (3–, 3) és un punt de la recta, mentre que (1, –4) és un vector director d'aquesta recta. Per a trobar un altre punt de la recta, s'ha de substituir el paràmetre α per un nombre. Per exemple, si $\alpha = 3$

  $$(x, y) = (3,–3) + 3(1,–4) = (6,–15)$$

  Així, doncs, (6, –15) és un altre punt d'aquesta recta.

- L'equació cartesiana d'una recta també permet trobar de manera senzilla un punt de la recta i un vector director. L'equació cartesiana de la recta és:

  $$x = p_1 + \alpha \cdot v_1$$
  $$y = p_2 + \alpha \cdot v_2$$

  un punt de la recta és (p_1, p_2) i un vector (v_1, v_2). Qualsevol altre punt es pot obtenir substituint el paràmetre α per un nombre concret, tenint en compte que les dues coordenades s'han de trobar utilitzant i mateix paràmetre. Per exemple, si l'equació cartesiana és:

  $$x = 3 - 4\alpha$$
  $$\text{i} = 5 + 2\alpha$$

  Un punt de la recta pot ser (3,5), ja que són els termes sense *a* de l'expressió anterior. Un vector director és (–4,2), perquè són els coeficients d'ambdues expressions. Per a trobar un altre punt d'aquesta recta, s'ha de substituir α per un nombre; per exemple, si $\alpha = -2$, el punt obtingut té coordenades:

  $$x = 3 - 4\cdot(-2) = 11$$
  $$y = 5 + 2\cdot(-2) = 1$$

  Per tant, aquest punt de la recta és (11,1).

- L'expressió explícita d'una recta té per expressió:

  $$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

  de manera immediata es pot trobar un punt, (p_1, p_2) i un vector director, (v_1, v_2). Per a trobar un altre punt de la recta, s'ha de donar un valor a la *x* o a la *y*, i resoldre l'equació lineal que en resulta. Per exemple, l'equació:

  $$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4}$$

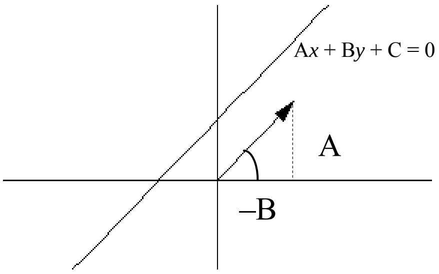
  correspon amb una recta del pla; un dels seus punts és (2, –1) (observa que s'ha de canviar de signe el nombre que acompanya cadascuna de les variables). Un vector director d'aquesta recta és (3, –4). Per a trobar un altre punt d'aquesta recta se substitueix, per exemple, la *y* per 3, i es resol l'equació resultant:

  $$\frac{x-2}{3} = \frac{3+1}{-4}$$
  $$-4(x - 2) = 3\cdot 4$$

$-4x + 8 = 12$
$-4x = 4$
$x = -1$

Per tant, si $y = 3$, llavors $x = -1$. Així, doncs, un altre punt de la recta és $(-1,3)$.

- L'expressió d'una recta en forma implícita és del tipus:



$$Ax + By + C = 0$$

En aquest cas, no es pot conèixer de manera immediata un punt de la recta; per a fer-ho s'ha de substituir una de les coordenades per un valor, i a continuació resoldre l'equació resultant. En canvi, és conegut que un vector director d'aquesta recta és $(-B,A)$. Per exemple, si una recta té equació

$$x - 2y + 6 = 0$$

Per a trobar un punt d'aquesta recta, es pot substituir, posem per cas, la y per 1. D'aquesta manera, s'obté l'equació següent:

$$x - 2\cdot 1 + 6 = 0$$

Resolent-la, resulta que $x = -4$. Així, doncs, el punt $(-4,1)$ pertany a la recta l'equació de la qual és $x - 2y + 6 = 0$.

- Un vector director d'aquesta recta pot ser $(2,1)$, ja que -2 és el coeficient de la y en l'equació, i 1 és el coeficient de la x en l'equació.
  També és possible comprovar si un punt determinat pertany o no a la recta en qüestió. Per exemple, es pot investigar si el punt $(-2,6)$ pertany a la recta d'equació $x - 2y + 6 = 0$. Per a fer-ho n'hi ha prou de comprovar si les coordenades del punt són solució d'aquesta equació. Vegem-ho:

$$-2 - 2\cdot 6 + 6 = -8 \neq 0$$

per tant, el punt $(-2,6)$ no pertany a aquesta recta.

Quines són les possibles relacions entre un punt i una recta?

> Donats un punt P i una recta r, o bé, el punt P pertany a la recta r, en aquest cas, les coordenades del punt compleixen l'equació de la recta, o bé el punt P no pertany a aquesta recta; en aquest cas, hi ha una fórmula que permet calcular la distància del punt P en la recta r.

Donat un punt $P = (p_1, p_2)$ i una recta r: $Ax + By + C = 0$, es poden donar dues situacions:

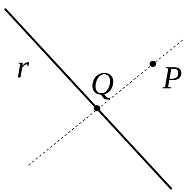
- El punt P pertany a la recta r: en aquest cas, les coordenades del punt compleixen l'equació de la recta, és a dir:

$$Ap_1 + Bp_2 + C = 0$$

Per exemple, el punt $P = (-4,1)$ pertany a la recta r: $x - 2y + 6 = 0$, ja que: $-4 - 2\cdot 1 + 6 = 0$.

- El punt P no pertany a la recta r. En aquest cas, podem assegurar que:

$$Ap_1 + Bp_2 + C \neq 0$$



És possible definir la distància d'aquest punt i la recta. En primer lloc, heu d'observar que si un punt, P, no pertany a una recta r, la distància més curta entre r i P s'obté seguint la recta perpendicular a r, que passa per P (recta puntejada). D'aquesta manera, es troba Q, que és el punt d'intersecció entre r i la perpendicular que passa per P. La distància del punt P a la recta r és, precisament, la distància entre P i Q. Per exemple, si r: $x - y + 2 = 0$, i $P = (3,1)$, es pot veure que aquest punt no pertany a la recta, ja que $3 - 1 + 2 \neq 0$. A quina distància de la recta es troba aquest punt? Per a saber-ho, s'ha de construir la recta perpendicular a la recta r, que contingui el punt P. Com que la recta r té vector director $(1,1)$, una recta perpendicular pot tenir vector director $(-1,1)$. Així, l'equació paramètrica de la recta perpendicular a r que passa per P és:

$$s: (x,y) = (3,1) + \alpha(-1,1)$$

En forma implícita, aquesta equació es converteix en s: $x + y - 4 = 0$.

La intersecció d'aquesta recta amb la recta *r* (que es pot trobar buscant la solució del sistema d'equacions format per les dues equacions implícites de les rectes) coincideix amb el punt (1,3). Així, doncs, la distància del punt P a la recta *r* és:

$$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{8}$$

Hi ha un fórmula que permet abreujar el càlcul de la distància d'un punt $P = (p_1, p_2)$ a una recta r: $Ax + By + C = 0$

$$d(P,r) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Es pot comprovar amb la recta i el punt de l'exemple:

$$d(P,r) = \frac{|3-1+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$$

Com s'esbrina la relació entre dues rectes del pla per mitjà de les seves equacions?

> Dues rectes del pla es poden intersecar en un punt si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té una única solució, és a dir, si el sistema és compatible determinat; les dues rectes coincideixen si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té infinites solucions, és a dir, si el sistema és compatible indeterminat; finalment, dues rectes són paral·leles si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes no té solucions, és a dir, si el sistema és incompatible. En aquest cas, es pot calcular la distància entre les rectes.

Dues rectes del pla poden intersecar-se en un punt, o bé ser paral·leles; també es pot donar el cas que ambdues rectes siguin la mateixa. L'estudi del sistema d'equacions format per les equacions d'ambdues rectes determinarà en quina situació, d'entre aquestes tres, es troben les dues rectes:

- Dues rectes s'intersequen en un punt si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té una única solució, és a dir, si el sistema és compatible determinat. En aquest cas, la solució del sistema és el punt d'intersecció. Per exemple, les rectes r: $x + y - 3 = 0$, i s: $2x - y - 3 = 0$ s'intersequen en un punt perquè el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$$

  té com a única solució $x = 2$ i $y = 1$.
  En aquest cas, és possible, a més, conèixer els angles entre ambdues rectes. En primer lloc es troba un vector director de cada recta:
  vector director de r : $(-1,1)$
  vector director de s : $(1,2)$
  Es calcula a continuació l'angle entre ambdós vectors, tenint en compte que l'angle α entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ té per cosinus:

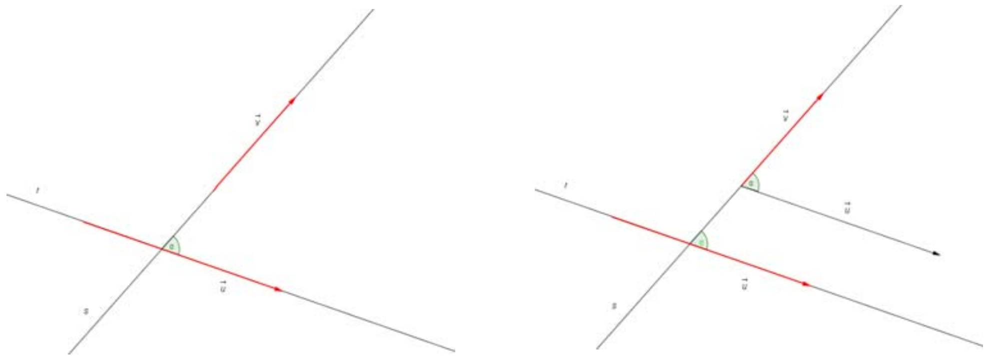
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

  i, per tant:

$$\cos\alpha = \frac{(-1,1)\cdot(1,2)}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{-1+2}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0,3162$$

  Per tant, aquest angle α és, aproximadament, de 71,6º. Els altres angles entre les rectes són de 180 – 71,6 = 108,4º, aproximadament.
  Si els quatre angles formats entre ambdues rectes són angles rectes, és a dir, de 90º, es diu que les rectes són perpendiculars.

Si r i s són dues rectes i $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són els seus vectors directors, α és l'angle entre les rectes r i s , és a dir, l'angle entre les rectes és l'angle que formen els vectors.



- Dues rectes coincideixen si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes té infinites solucions, és a dir, si el sistema és compatible indeterminat. En aquest cas, ambdues equacions són equivalents. Per exemple:

  $$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

  Es tracta d'un sistema compatible indeterminat; per tant, té infinites solucions. Es pot observar que l'equació $4x + 2y - 6 = 0$ és equivalent a $2x + y - 3 = 0$.

- Dues rectes són paral·leles si el sistema d'equacions format per les equacions de les rectes no té solucions, és a dir, si el sistema és incompatible. Per exemple,

  $$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

  Es tracta d'un sistema incompatible perquè el rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada són diferents. En aquest cas, es pot observar que els vectors directors tenen la mateixa direcció, perquè un és múltiple de l'altre: $(-2,4) = 2\cdot(-1,2)$.

  Es pot trobar de manera senzilla la distància entre aquestes dues rectes, si es considera que qualsevol punt de la primera recta està a la mateixa distància de l'altra recta. Per això, n'hi ha prou de calcular la distància d'un punt de la primera recta a un punt de la segona recta. En l'exemple, un punt de la primera recta, r: $2x + y - 5 = 0$, podria ser $(0,5)$. La distància d'aquest punt a la recta s: $4x + 2y - 6 = 0$ és:

  $$d(P,r) = \frac{|2\cdot 5 - 6|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{5}$$

Elements de geometria a l'espai

Elements de geometria a l'espai

Elements bàsics de l'espai

Els elements bàsics de l'espai són:

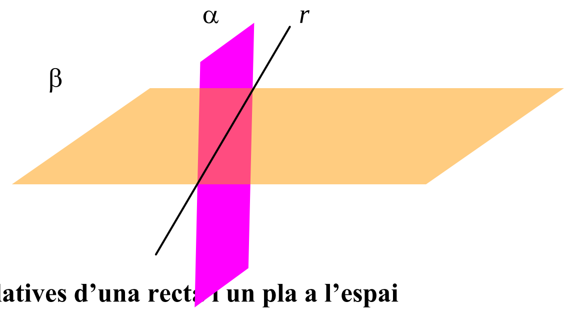
- punts, denominats amb lletres majúscules, per exemple P.
- rectes, denominades amb lletres minúscules, per exemple *r*.
- plans, denominats amb lletres gregues, per exemple α.

Posicions relatives de dos plans a l'espai

Dos plans diferents de l'espai poden:

- ser paral·lels: per exemple, els plans β i γ són paral·lels.

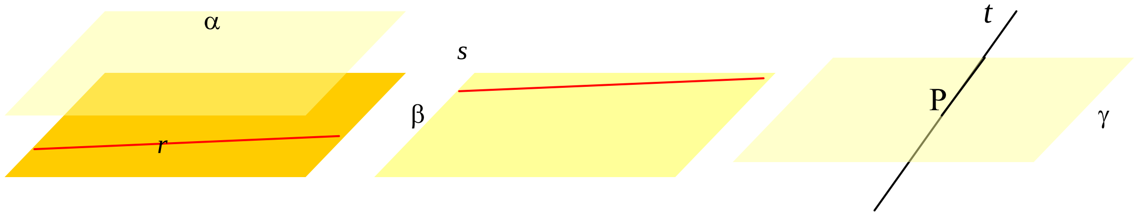
- tallar-se en una recta. Per exemple, el pla α i el pla β es tallen en la recta *r*. Cadascuna de les zones en què es divideix l'espai quan dos plans es tallen es denomina *angle díedre.*



Posicions relatives d'una recta i un pla a l'espai

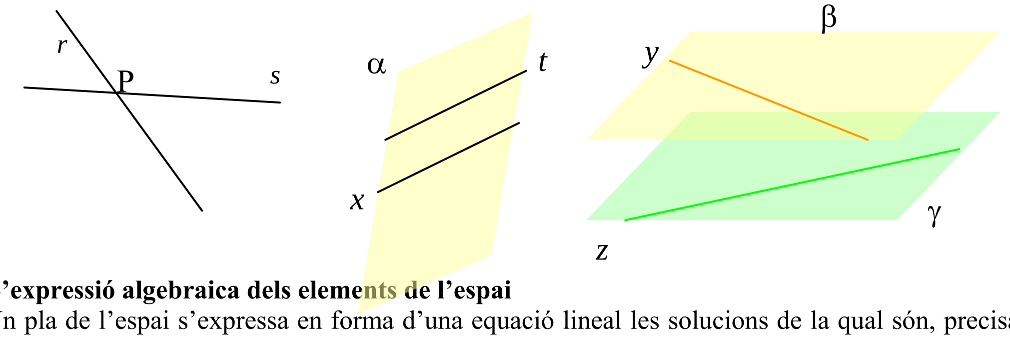
Un pla i una recta poden ser:

- paral·lels: per exemple, la recta *r* és paral·lela al pla α.
- tallar-se: la intersecció pot ser
  - un sol punt: per exemple, la recta *t* talla el pla γ en el punt P.
  - tota la recta es troba inclosa en el pla; per exemple, la recta *s* pertany al pla β.



Posicions relatives de dues rectes a l'espai
Dues rectes diferents de l'espai poden:

- tallar-se en un punt; per exemple, les rectes *r* i *s* es tallen en el punt P.
- ser paral·leles; per exemple, les rectes *t* i *x* són paral·leles.
- creuar-se, sense tallar-se; per exemple, les rectes *z* i *y* es creuen.



L'expressió algebraica dels elements de l'espai
Un pla de l'espai s'expressa en forma d'una equació lineal les solucions de la qual són, precisament, els punts del pla:

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

Una recta de l'espai s'expressa en forma d'un sistema d'equacions les solucions de les quals són els punts de la recta:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Donats els plans

$$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

i les rectes:

$$r: \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a_5x + b_5y + c_5z + d_5 = 0 \\ a_6x + b_6y + c_6z + d_6 = 0 \end{cases}$$

Aquestes són les possibilitats per a les posicions relatives entre rectes i plans, que depenen del rang de la matriu del sistema associat a les equacions dels elements i del rang de la matriu ampliada:

1. Les possibles posicions relatives entre α i β són:

rang(A^*) / rang(A)	2	3
2	Sistema compatible indeterminat → els plans es tallen en una recta.	Sistema incompatible → els plans són paral·lels.

Essent:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$$

2. Les possibles posicions relatives entre α i r són:

rang(A^*) / rang(A)	2	3
2	Sistema compatible indeterminat → la recta està continguda en el pla.	Sistema incompatible → la recta és paral·lela al pla.
3		Sistema compatible determinat → la recta i el pla es tallen en un punt.

Sent:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right)$$

3. Les possibles posicions relatives entre r i s són:

rang(A^*) / rang(A)	2	3	4.
2	Sistema compatible indeterminat → les rectes coincideixen.	Sistema incompatible → les rectes són paral·leles.	
3.		Sistema compatible determinat → les rectes es tallen en un punt.	Sistema incompatible → Les rectes es creuen.

Essent:

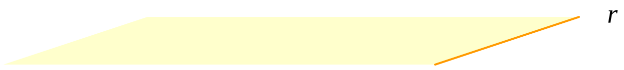
$$A = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 \end{array}\right)$$

Quins són els elements bàsics de la geometria de l'espai?

> Igual que en el pla, l'espai conté punts, rectes i segments, que s'indiquen de la mateixa manera que en el pla. A més, a l'espai també hi ha els plans, que s'han d'imaginar talment fulles de paper sense límits, sense ondulacions i sense espessor. Normalment, els plans es designen amb lletres de l'alfabet grec.

Els elements de la geometria plana (el punt, el segment, la recta i la semirecta, i l'angle entre dos segments) també es troben a l'espai de tres dimensions. Aquests elements es designen de la mateixa forma que en el pla.
A més, a l'espai es poden definir els plans que s'han d'imaginar talment immenses fulles de paper sense límits, sense ondulacions i sense espessor; per això, un pla té dues dimensions, de la mateixa manera que una recta té una única dimensió (i un punt, cap). Normalment, un pla s'acostuma a designar amb una lletra grega. Per a representar un pla s'utilitza, normalment, una forma trapezoïdal, com la de la imatge:

Una propietat important de qualsevol pla és que si conté dos punts, sempre conté la recta que passa per aquests dos punts.
Un semiplà és la part d'un pla que té per extrem una recta. És difícil representar-lo de manera diferent; per això s'haurà de subratllar la recta que li serveix d'extrem.

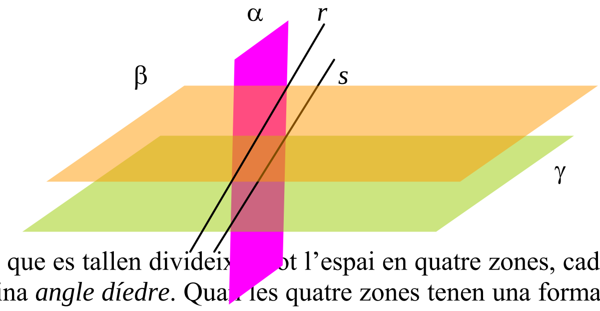


Semiplà limitat per la recta r.

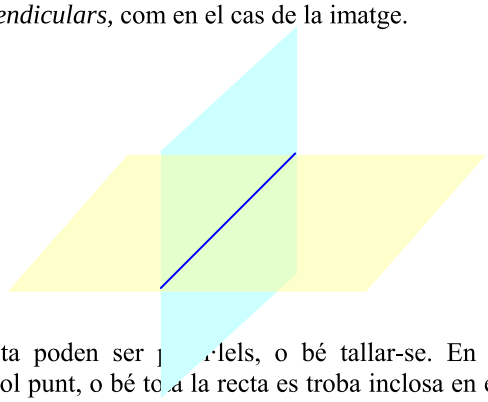
Quines són les posicions relatives dels diversos elements de l'espai?

> Dos plans diferents de l'espai poden ser paral·lels, o bé tallar-se en una recta. Un pla i una recta poden ser paral·lels, o bé tallar-se; en aquest cas, la intersecció és un sol punt, o bé tota la recta es troba inclosa en el pla. Finalment, dues rectes a l'espai poden tallar-se en un punt, o bé ser paral·leles, o bé es poden creuar, sense tallar-se.

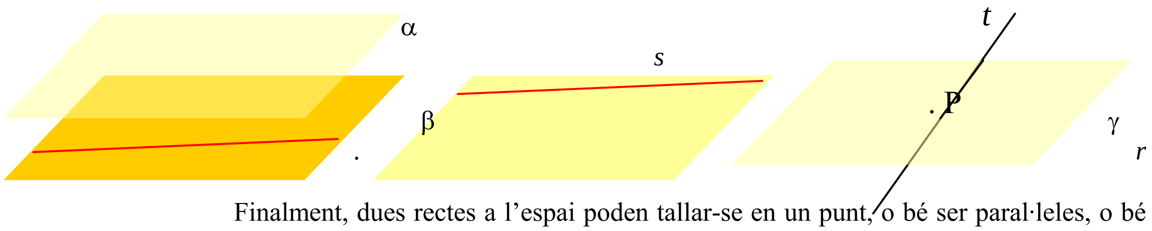
Dos plans diferents de l'espai poden ser paral·lels, o bé tallar-se en una recta. Per exemple, els plans β i γ són paral·lels. En canvi, el pla α i el pla β es tallen en la recta *r*, mentre que el pla γ i el pla α es tallen en la recta *s*.



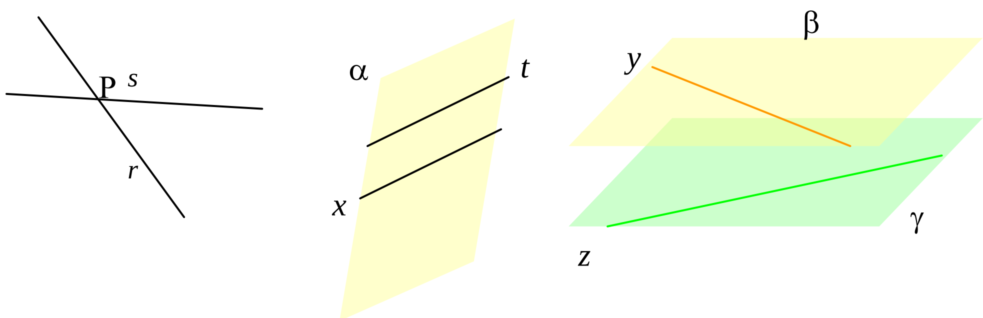
Dos plans que es tallen divideixen tot l'espai en quatre zones, cadascuna de les quals es denomina *angle díedre*. Quan les quatre zones tenen una forma similar, es diu que els plans són *perpendiculars,* com en el cas de la imatge.



Un pla i una recta poden ser paral·lels, o bé tallar-se. En aquest últim cas, la intersecció és un sol punt, o bé tota la recta es troba inclosa en el pla. Així, la recta *r* és paral·lela al pla α; la recta *s* pertany al pla β; la recta *t* talla el pla γ en el punt P:



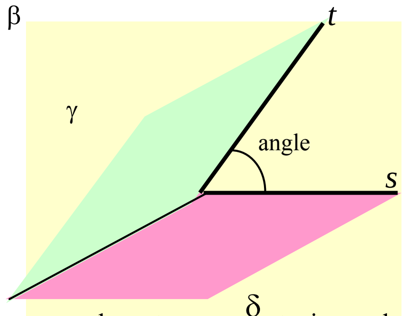
Finalment, dues rectes a l'espai poden tallar-se en un punt, o bé ser paral·leles, o bé es poden creuar, sense tallar-se. Per exemple, les rectes *r* i *s* es tallen en el punt P; les rectes *t* i *x* són paral·leles (perquè es troben en el mateix pla, α); les rectes *z* i *y* es creuen (perquè pertanyen a plans diferents paral·lels).



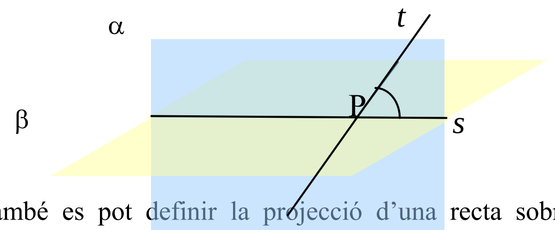
Què és i com es calcula l'angle entre els elements de l'espai?

> Dues rectes que es tallen generen quatre angles, amb les mateixes propietats que els angles entre dues rectes del pla que es tallen. Per a definir un angle entre dos plans, s'ha de traçar un tercer pla que sigui perpendicular a tots dos plans; les rectes que resulten de la intersecció d'aquest pla amb els dos primers ens donen els angles entre ambdós plans. Finalment, per a trobar un angle entre una recta i un pla que es tallen, s'ha de representar el pla perpendicular al pla donat i que inclogui la recta; l'angle entre la recta d'intersecció dels plans i la recta original és l'angle buscat.

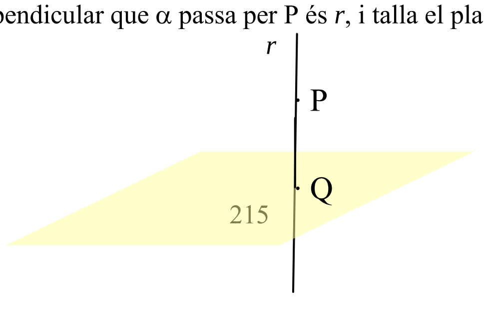
Els angles entre dues rectes que es tallen es defineixen d'igual manera que els angles entre dues rectes del pla que es tallen. En canvi, per a definir un angle entre dos plans, s'ha de traçar un tercer pla que sigui perpendicular a ambdós plans. Per exemple, per a saber l'angle que formen els plans γ i δ, s'ha de traçar el pla β, perpendicular tant a com γ a δ. La intersecció entre β i γ és la recta *t*; la intersecció entre β i δ és *s*. Els angles entre γ i δ seran els angles entre *t* i *s*.



Finalment, per a trobar un angle entre una recta i un pla que es tallen, s'ha de representar el pla perpendicular al pla dau i que inclogui la recta. Per exemple, per a trobar un angle entre el pla β i la recta *t* (que es tallen en P), es construeix el pla α, perpendicular a β i que conté *t*; *s* és la intersecció d'ambdós plans. Qualsevol angle format entre les rectes *s* i *t* és un angle entre la recta *t* i el pla β (encara que, de vegades, es diu que l'angle entre la recta i el pla és el menor d'aquests angles, tal com s'observa en la imatge). Es diu que una recta és perpendicular a un pla si qualsevol d'aquests angles és de 90º.



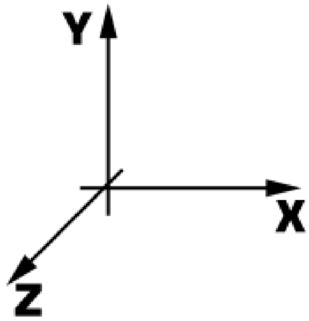
També es pot definir la projecció d'una recta sobre un pla utilitzant la imatge anterior: es construeix un pla perpendicular al pla en qüestió que contingui la recta. La intersecció entre ambdós plans serà la projecció buscada. En l'exemple, la projecció de la recta *t* sobre el pla β és la recta *s*, perquè el pla perpendicular que β conté la recta *t*, és α; a més, la intersecció entre α i β és, precisament, *s*.
De manera similar, es pot definir la projecció d'un punt sobre un pla com la intersecció de la recta perpendicular al pla que passi pel punt, i el pla en qüestió. Per exemple, la projecció del punt P sobre el pla α de la imatge és igual a l'instant Q, perquè la recta perpendicular que α passa per P és *r*, i talla el pla α en el punt Q



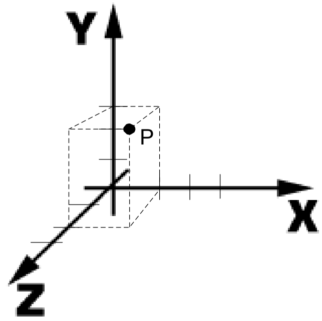
Com s’expressen algebraicament els elements de l’espai?

Un punt de l’espai s’expressa mitjançant una terna (x, y, z); cadascun dels elements indica una de les coordenades referides a cadascun dels tres eixos del sistema de referència de l’espai. Un pla de l’espai s’expressa mitjançant una equació lineal de tres incògnites, les solucions de les quals són precisament tots els punts del pla. Una recta de l’espai s’expressa com la intersecció de dos plans.

Com és sabut, un sistema de referència en l’espai consta de tres eixos: eix X, eix Y i eix Z, tal com es mostra en la imatge:



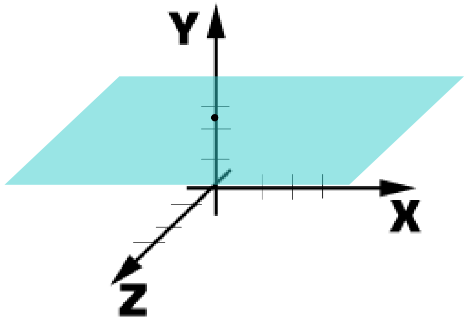
Un punt en l’espai s’expressa mitjançant una terna que indica les coordenades d’aquest punt, que expressen les tres dimensions de l’espai: altura, amplària, profunditat.
Així, per exemple, el punt P = (1,3,2) es representaria de la manera següent:



Un pla de l’espai es pot expressar per mitjà d’una equació lineal amb tres incògnites, del tipus:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Les solucions d’aquesta equació formen un pla de l’espai, de la mateixa manera que la solució d’una equació lineal de dues incògnites representava una recta del pla.
Per exemple, aquest pla



que talla l'eix Y en el punt (0,2,0), i que és paral·lel al pla format pels eixos X i Z, té per equació:

$$y = 2$$

perquè tots els punts que tenen coordenada y igual a 2 pertanyen a aquest pla.

Una recta de l'espai es pot concebre com la intersecció de dos plans. Efectivament, si cada pla s'expressa amb una equació lineal amb tres incògnites, la recta intersecció, es pot expressar com un sistema de dues equacions lineals, amb tres incògnites, les solucions de les quals són, precisament, tots els punts de la recta. Per exemple, els sistemes d'equacions que defineixen les rectes que formen els eixos de coordenades són:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ sistema que expressa l'eix X.

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ sistema que expressa l'eix Y.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ sistema que expressa l'eix Z.

És fàcil demostrar-ho: en el cas de l'eix X, els seus punts són tots aquells que tenen les coordenades z i y igual a 0; de la mateixa manera, els punts de l'eix Y són aquells que tenen les coordenades x i z igual a 0; igualment, els punts de l'eix Z són aquells que tenen les coordenades x i y igual a 0.

Com s'expressen les posicions relatives entre plans i rectes?

> Expressant els plans mitjançant una equació i les rectes mitjançant un sistema de dues equacions, es poden deduir les relacions entre aquests elements examinant les solucions del sistema d'equacions que resulta de combinar totes les equacions d'aquests elements.

Dos plans de l'espai s'expressen mitjançant dues equacions lineals amb tres incògnites. A causa d'això, les posicions relatives dels plans s'han de correspondre amb els tipus de solucions possibles del sistema:

- Si el sistema és compatible indeterminat, és a dir, el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada, en aquest cas, els plans es tallen. Es poden donar dues situacions:
    - Que aquest rang sigui igual a 2.
      En aquest cas, la solució del sistema depèn d'un sol paràmetre. Per tant, els dos plans es tallen en una recta.
    - Que aquest rang sigui igual a 1.
      En aquest cas, ambdues equacions són equivalents, o el que és el mateix, ambdós plans són iguals.

- Si el sistema és incompatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és 1 i el rang de la matriu ampliada és 2 (per tant, són diferents), en aquest cas, ambdós plans són paral·lels.

Per exemple, donats aquests plans:

α: $x + y + z = 1$

β: $x + y + z = -3$

γ: $2x + 3y + z = 1$

Els plans α i β són paral·lels, ja que si s'expressen en forma de sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=-3 \end{cases}$$

i aquest sistema s'expressa de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

es pot observar que el rang de la matriu del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és 1, mentre que el rang de la matriu ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$ és 2. Per tant, el sistema és incompatible, és a dir, no té solució. O el que és el mateix, els plans no es tallen, o sigui, són paral·lels.

En canvi, els plans β i γ es tallen en una recta, perquè el sistema que generen les seves equacions:

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$$

és compatible determinat i el rang de la matriu del sistema és igual a 2, el mateix valor que el rang de la matriu ampliada.

De manera similar, les posicions relatives d'un pla i una recta s'han de correspondre amb els tipus de solucions possibles del sistema resultant d'agrupar les tres equacions (una del pla i dos de la recta):

- Si el sistema és compatible, el pla i la recta es tallen, i es poden donar dues situacions:
  - Que el rang de la matriu i de l'ampliada sigui igual a 2.
    En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat, és a dir, la recta es troba inclosa en el pla.
  - Que aquest rang sigui igual a 3.0.
    En aquest cas, el sistema té una única solució. Per tant, hi ha un únic punt d'intersecció entre el pla i la recta.
- Si el sistema és incompatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada és 3.
  En aquest cas, no hi ha solució i, per tant, el pla i la recta són paral·lels.

Dues rectes de l'espai s'expressen mitjançant dos sistemes d'equacions lineals amb tres incògnites (ambdós sistemes han de ser compatibles determinats). A causa d'això, les posicions relatives d'aquestes rectes s'han de correspondre amb els tipus de solucions possibles del sistema resultant d'agrupar les quatre equacions:

- Si el sistema és compatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada, en aquest cas, les rectes es tallen i es poden donar dues situacions:
  - Que aquest rang sigui igual a 2.
    En aquest cas, el rang del sistema i l'ampliada de quatre equacions és el mateix que el rang del sistema i l'ampliada dels sistemes de cadascuna de les rectes. Així, doncs, las dues rectes són iguals.

- Que aquest rang sigui igual a 3.
  En aquest cas, el sistema té una única solució. Per tant, aquest punt ha de ser la intersecció d'ambdues rectes. Així, doncs, les rectes es tallen en un punt.

- Si el sistema és incompatible, és a dir, el rang de la matriu del sistema és menor que el rang de la matriu ampliada. Per tant, les rectes no coincideixen en cap punt. Es poden donar dos casos:
  - Que el rang de la matriu del sistema sigui 2 i el rang de la matriu ampliada sigui 3.
    En aquest cas, les rectes són paral·leles.
  - Que el rang de la matriu del sistema sigui 3 i el rang de la matriu ampliada sigui 4.
    En aquest cas, les rectes es creuen a l'espai.

Per exemple, donades les rectes:

$$r: \begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 6x - 2y - 2 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Es pot observar que el sistema format per les quatre equacions:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \\ 6x - 2y - 2 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

és compatible determinat, i la seva única solució és: $x = -1$, $y = 2$, $z = 2$. Per tant, ambdues rectes es tallen en un únic punt.

Considerem altre exemple: donades les rectes

$$t: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases} \qquad m: \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + z = 5 \end{cases}$$

en aquest cas, el sistema format per les quatre equacions:

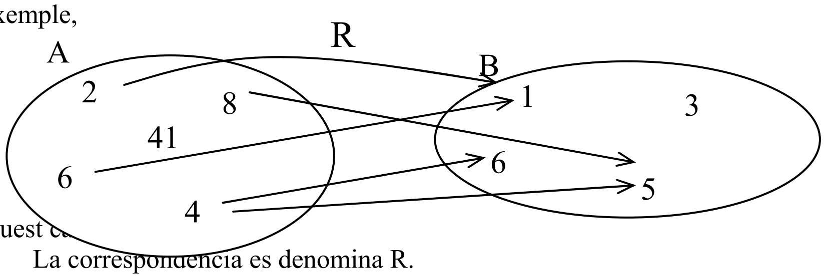
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + z = 5 \end{cases} \quad \text{o sigui} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

és incompatible, perquè el rang de la matriu associada al sistema és 2, mentre que el rang de la matriu ampliada és 3. Per tant, ambdues rectes són paral·leles.

El concepte de funció

El concepte de funció

Les correspondències entre conjunts
Una correspondència entre dos conjunts és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre a elements del primer conjunt elements del segon. Els conjunts es representen mitjançant diagrames de Venn.
Les correspondències es representen mitjançant dos diagrames de Venn relacionats mitjançant fletxes. Per exemple,

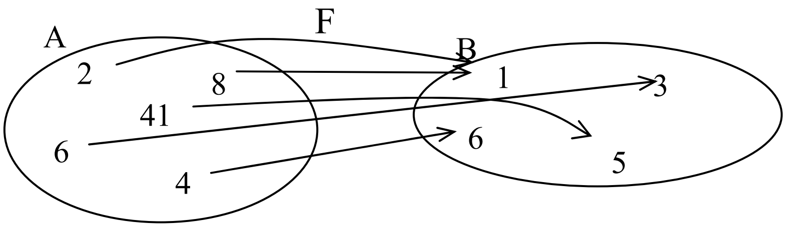


En aquest ca…

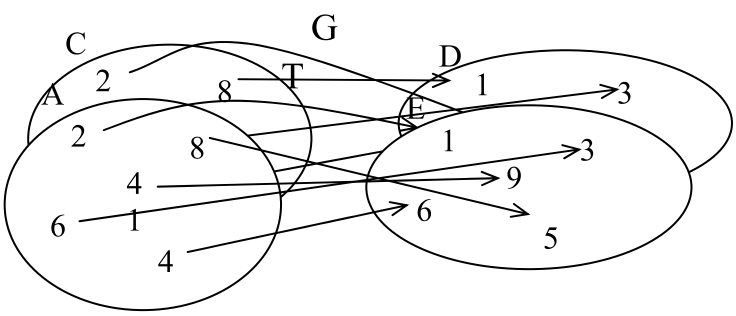
La correspondència es denomina R.
El conjunt de partida és A = {2,4,6,8,41}.
El conjunt d'arribada és B = {1,3,5,6}.
El domini de R és {2,4,6,8}.
La imatge de R és {1,5,6}.
La imatge de l'element 2 és l'element 1.
La imatge de l'element 4 són els elements 5 i 6.
L'antiimatge de l'element 6 és l'element 4.
L'antiimatge de l'element 1 són els elements 2 i 6.

Les aplicacions i les funcions
Quan cada element del domini solament té una única imatge, aleshores la correspondència es denomina *aplicació.*
Tipus d'aplicacions :

- Exhaustives: aquelles en les quals la seva imatge coincideix amb el conjunt d'arribada. Per exemple:



- Injectives: aquelles en les quals cada element de la imatge només té una única antiimatge. Per exemple:



- Bijectives: aquelles que són exhaustives i injectives al mateix temps. Per exemple:

Una **funció** és una aplicació entre conjunts numèrics.

Dom F	Im F
2	1

La taula d'una funció

Una taula d'una funció és una taula amb dues columnes; la primera conté valores del domini de la funció i la segona, els valors corresponents de la seva imatge. Per exemple, la taula de la funció F és:

4	6
6	3
8	1
41	5

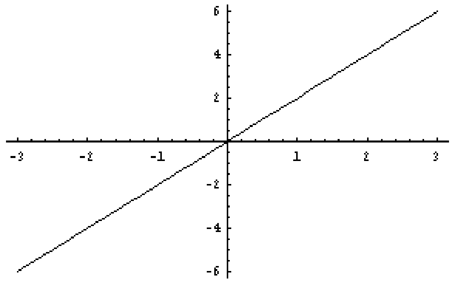
L'expressió d'una funció

L'expressió d'una funció és una expressió algebraica amb una variable que permet trobar la imatge de qualsevol element del domini de la funció. Per a aconseguir-ho, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor del domini. Per exemple, si la funció g fa correspondre a un nombre el mateix nombre al quadrat, la seva expressió ha de ser:

$$g(x) = x^2$$

La gràfica d'una funció

La gràfica d'una funció és el conjunt de tots els punts del pla cartesià les coordenades del qual coincideixen amb valors d'aquesta funció, essent la coordenada x un valor del domini, i la coordenada y un valor de la imatge. Per a dibuixar la gràfica d'una funció, s'han de dibuixar tots els punts continguts en la taula de la funció. Per exemple, la gràfica de la funció $f(x) = 2x$ el domini de la qual és l'interval [–3,4] és aquesta.



Operacions amb funcions

Si f i g són dues funcions:

- La suma de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa $f + g$, es calcula de la manera següent:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g.

- El producte de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa $f \times g$, es calcula de la manera següent:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g.

- El quocient de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa f/g, es calcula de la manera següent:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g i que, a més, $g(x)$ no sigui 0.

- La potència de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa f^g, es calcula de la manera següent:

$$\left(f^g\right)(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)}$$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g i que, a més, $f(x)$ i $g(x)$ no siguin 0.

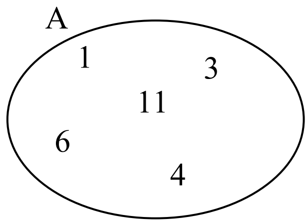
La història del concepte de *funció*

El concepte de *funció* es va establir cap al segle XVIII, encara que ja anteriorment alguns matemàtics hi treballaven de manera intuïtiva. En l'obra *Introductio in analysin infinitorum*, Leonhard Euler intenta per primera vegada proporcionar una definició formal del concepte de funció en afirmar que: "Una funció de quantitat variable és una expressió analítica formada de qualsevol manera per aquesta quantitat variable i per nombres o quantitats constants". Aquesta definició difereix de l'actual, tal com es veurà, atès que set anys després, en el pròleg de les *Institucions del càlcul diferencial*, va afirmar: "Algunes quantitats en veritat depenen d'altres; si en ser combinades les darreres, les primeres també sofreixen canvi, llavors les primeres es diuen *funcions* de les últimes. Aquesta denominació és bastant natural i comprèn cada mètode mitjançant el qual una quantitat pot ser determinada per unes altres. Així, si x denota una quantitat variable, llavors totes les quantitats que depenen de x en qualsevol forma estan determinades per x i se les anomena funcions d'x".
El matemàtic suís Leonhard Euler (1707-1783) és un personatge essencial en el desenvolupament de les funcions perquè precisà el concepte de *funció*, va fer un estudi sistemàtic de totes les funcions elementals, incloent-hi les seves derivades i integrals; no obstant això, el concepte mateix de *funció* va néixer amb les primeres relacions observades entre dues variables, fet que segurament va sorgir en els inicis de la matemàtica, amb civilitzacions com la babilònica, l'egípcia i la xinesa.
Abans d'Euler, el matemàtic i filòsof francès René Descartes (1596-1650) va mostrar en els seus treballs de geometria que tenia una idea molt clara dels conceptes *variable* i *funció*, fent una classificació de les corbes algebraiques segons els seus graus, reconeixent que els punts d'intersecció de dues corbes s'obtenen resolent, de manera simultània, les equacions que les representa.

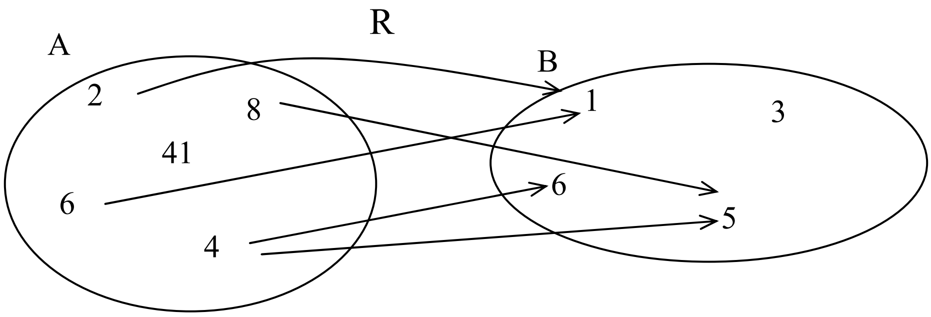
Què és una correspondència entre conjunts?

> Una correspondència entre dos conjunts és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre a elements del primer conjunt, elements del segon. Una correspondència es pot representar gràficament mitjançant un diagrama de Venn.

Els conjunts que es tracten en matemàtiques solen ser conjunts de nombres: els naturals, els enters, els racionals i els reals. És sabut que els elements d'aquests conjunts (nombres) no espoden escriure tots en un llistat; ara bé, si un conjunt de nombres és finit, llavors, els seus elements es poden expressar entre claus. Per exemple, el conjunt format pels nombres 1, 2, 3, 4, 6 i 11, es pot denominar A, i expressar-se d'aquesta manera: A = {1,3,4,6,11}. És a dir, els elements d'un conjunt finit s'indiquen en forma d'una llista delimitada per claus, de manera que aquests elements estan separats per comes. Una altra manera d'expressar un conjunt de nombres, aquesta vegada de forma gràfica, és utilitzant una forma el·líptica que contingui els elements del conjunt, indicant en la part exterior el nom del conjunt. Aquesta representació es denomina de *diagrama de Venn*. Així, per exemple, el conjunt anterior es pot representar de forma gràfica, mitjançant els diagrames de Venn:



Una correspondència entre dos conjunts, A i B, és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre elements d'A amb elements de B. Aquest fet es pot representar mitjançant una fletxa que té l'origen en un element d'A i el final en un element de B; aquesta fletxa indicarà que l'element d'A està relacionat amb l'element de B. Per exemple, si A = {2,4,6,8,41} i B = {1,3,5,6}, una correspondència, denominada R, entre A i B pot ser la següent:



En aquest cas s'ha indicat el nom de la correspondència, R, per a evitar confusions amb altres correspondències. Així, per exemple, la correspondència R relaciona el 2 del conjunt A amb el 1 del conjunt B; el 8 del conjunt A, amb el 5 del conjunt B; el 4 del conjunt A amb el 5 i el 6 del conjunt B; el 6 del conjunt A amb el 1 del conjunt B.

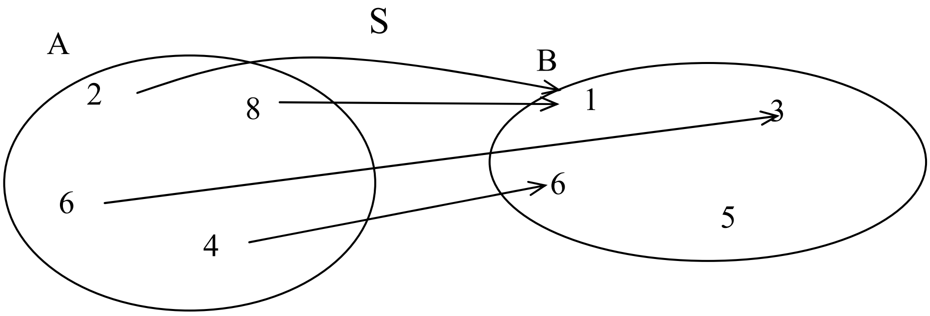
El conjunt A normalment rep el nom de *conjunt de partida*, mentre que el conjunt B, *conjunt d'arribada*. A més, el conjunt de tots els elements del conjunt de partida dels quals surt alguna fletxa es denomina *domini de la correspondència R* i s'escriu Dom R; el conjunt de tots els elements del conjunt d'arribada als quals es dirigeix alguna fletxa es denomina *imatge o recorregut de la correspondència R* i s'escriu Im R. En l'exemple, el domini de la correspondència és el conjunt Dom R = {2,6,4,8}, mentre que la imatge de la correspondència és Im R = {1,5,6}.

Donat un element qualsevol del domini d'una correspondència, es denomina *imatge de l'element* el conjunt de tots els elements de la imatge de la correspondència que reben una fletxa d'aquest element. Així, per exemple, la imatge del 2 és {1}, la imatge del 8 és {5}, la imatge del 4 és {5,6} i la imatge del 6 és {1}. De la mateixa manera, l'antiimatge d'un element de la imatge de la correspondència és el conjunt de tots els elements del domini de la correspondència la imatge dels quals inclou aquest element (és a dir, tots els elements dels quals parteix una fletxa cap a aquest element). En l'exemple, l'antiimatge del 1 és {2,6}, l'antiimatge del 5 és {4,8} i l'antiimatge del 6 és {4}.

Què és una aplicació?

> Per tal que una correspondència entre conjunts sigui una aplicació, s'ha de complir-se que tots els elements del seu domini tinguin un únic element en la seva imatge. És a dir, en la representació d'una aplicació, de qualsevol element del domini ha de sortir una única fletxa.

Una aplicació és una correspondència que compleix aquesta condició: tots els elements del seu domini tenen un únic element en la seva imatge. Dit d'una altra manera, en la representació d'una aplicació, de qualsevol element del domini ha de sortir una única fletxa. Així, doncs, en l'exemple anterior, la correspondència no és una aplicació perquè de l'element 4 surten dues fletxes (és a dir, la seva imatge està formada per més d'un element). En canvi, la correspondència següent entre els mateixos conjunts és una aplicació:



En aquest cas, el domini de S també és Dom S = {2,6,4,8}, mentre que la imatge de la correspondència és Im S = {1,3,6}. De qualsevol element del domini parteix una única fletxa, és a dir, la seva imatge consisteix en un sol element; així, doncs, es tracta d'una aplicació.

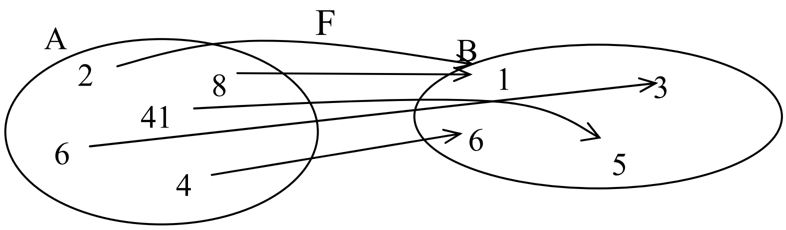
Segons quina sigui la imatge d'una aplicació, aquesta es pot classificar en:

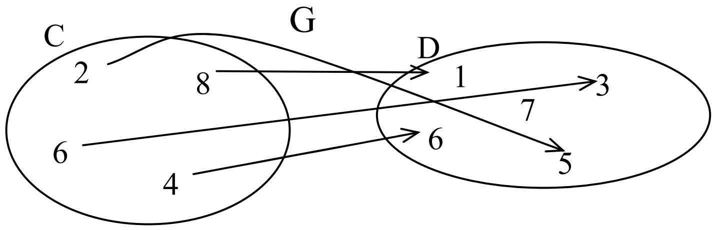
- Exhaustiva: aquelles en què la seva imatge coincideix amb el conjunt d'arribada. Per exemple, l'aplicació F és exhaustiva.

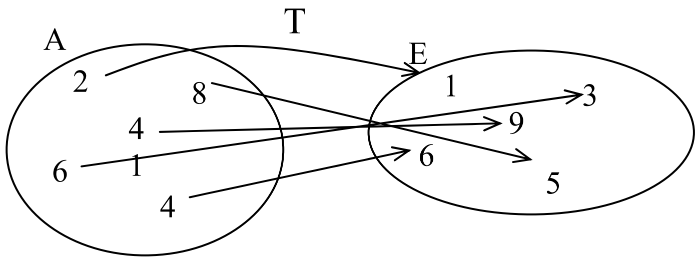
- Injectiva: aquelles en què cada element de la imatge només té una única antiimatge. Per exemple, l'aplicació G és injectiva.

- Bijectiva: aquelles que són exhaustives i injectives a la vegada, és a dir, cada element del conjunt d'arribada té una única antiimatge. Per exemple, l'aplicació T és bijectiva.

Es pot observar que aquesta classificació no abasta totes les aplicacions: per exemple, l'aplicació S no és ni bijectiva, ni injectiva (l'element 1 té 2 antiimatges), ni exhaustiva (l'element 5 no pertany a la imatge).







Quan l'aplicació s'estableix entre conjunts numèrics, es denomina *funció*. Moltes situacions reals es poden explicar com la relació entre dues magnituds en forma de funció. Per exemple, la temperatura en un lloc concret i l'hora del dia són dues magnituds relacionades entre si; és a dir, a cada moment del dia li correspon una temperatura concreta, o sigui, la temperatura és una funció del temps. D'aquesta manera, es podrien escriure les hores d'un dia en un conjunt, i les temperatures en un altre; una fletxa podria unir cada element del primer conjunt (les hores) amb un únic element del segon conjunt (la temperatura en aquesta hora).

Què és una taula d'una funció?

> Una taula d'una funció és una taula amb dues columnes; la primera conté valors del domini de la funció, i la segona, els valors corresponents de la seva imatge. Quan el domini o la imatge són conjunts massa grans, una taula de la funció només pot contenir alguns dels valors de la funció.

Una manera senzilla d'expressar una funció, que no necessita els diagrames de Venn, consisteix a posar els elements dels conjunts en una taula: a la primera columna el domini, i a la segona, les imatges corresponents. Per exemple, la funció F anterior es pot expressar mitjançant aquesta taula:

Dom F	Im F
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

Evidentment, no sempre serà possible construir la taula de tota la funció: el domini i la imatge poden ser conjunts massa grans i, fins i tot, infinits. En aquest cas, es pot construir una taula amb alguns valors del domini i les seves imatges corresponents.

Instant	Temperatura
0	5º
2	7º
4	8º
6	12º
8	13º
10	18º
12	23º
14	25º
16	26º
18	24º
20	22º
22	15º

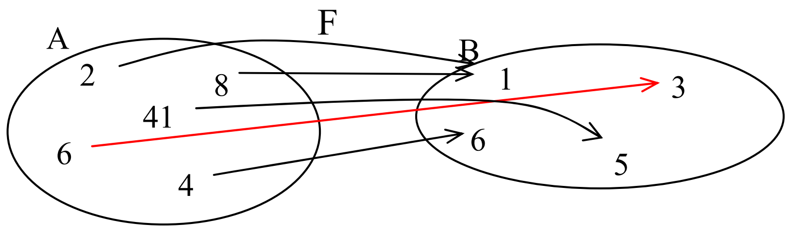
Per exemple, considerem la funció temperatura d'un lloc concret, que a cada moment d'un dia associa la temperatura en aquest instant. Els valors possibles per als instants d'un dia van des de les 0 fins a les 24 hores, és a dir, tot l'interval de nombres reals [0,24). Evidentment, no es poden tenir tots els valors del dia, per això, se'n trien alguns de representatius; per exemple, es poden prendre mostres de la temperatura cada minut, o cada 5 minuts. Per a no estendre'ns massa, la taula només dóna la temperatura cada 2 hores.

És evident que aquesta correspondència és una funció perquè cada instant de temps només es pot associar a una única temperatura. A més, també és cert que en la taula no es poden posar més que alguns valors d'aquesta funció, ja que el domini i la imatge contenen massa valors per a situar-los en una taula. En aquest cas, normalment, es trien només alguns valors, però distribuïts de manera uniforme per tot el domini, com s'ha vist a l'exemple.

Què és l'expressió d'una funció?

> L'expressió d'una funció és una expressió algebraica amb una variable que permet trobar la imatge de qualsevol element del domini de la funció. Per a fer-ho, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor del domini; el valor numèric resultant d'aquesta expressió serà valor de la imatge d'aquest element del domini.

La funció anterior, denominada F, fa correspondre al valor 6 del domini de la funció, el valor 3 de la imatge. També es pot dir que la imatge del 6, per la funció F, és el 3; o, fins i tot, que la funció avaluada en el 6 dóna com a resultat el 3.



Aquesta forma d'expressar-ho és llarga i incòmoda si volem donar la imatge de molts altres valors del domini. Per evitar aquest problema, s'usa una forma més breu de donar la imatge d'un element del domini: s'escriu el nom de la funció; a continuació i entre parèntesis, el valor del domini la imatge del qual volem calcular, el signe igual i, finalment, el valor de la imatge que hi correspon. Per exemple, en el cas anterior, s'ha d'escriure:

$$F(6) = 3.$$

que es llegeix "efa de 6 és igual a 3" i significa, com sabem, que la imatge del valor 6 del domini és el valor 3, en el cas de la funció F. De la mateixa manera, si s'observa el diagrama anterior de la funció F:

la imatge de 2 és 1, per tant, $F(2) = 1$;
la imatge de 4 és 6, per tant, $F(4) = 6$;

la imatge de 8 és 1, per tant, F(8) = 1;
la imatge de 41 és 5, per tant, F(41) = 5.

En molts casos no es pot proporcionar un llistat complet de la imatge de tots els valors del domini d'una funció. Per exemple, en el cas de la funció, que podem denominar *g*, que a cada nombre real hi fa correspondre el mateix nombre al quadrat, no es podrà donar aquest llistat complet perquè els valors del domini són infinits (tots els nombres reals). Alguns d'ells tenen les imatges següents:

la imatge de 0 serà $0^2 = 0$	$g(0) = 0^2$	$g(0) = 0$;
la imatge de 5 serà $5^2 = 25$	$g(5) = 5^2$	$g(5) = 25$;
la imatge de –1 serà $(-1)^2 = 1$	$g(1) = 1^2$	$g(-1) = 1$;
la imatge de –2 serà $(-2)^2 = 4$	$g(-2) = (-2)^2$	$g(-2) = 4$.

Como s'ha dit, aquest llistat no s'acabaria mai perquè no és possible escriure tots els nombres reals. Així, doncs, hi ha d'haver una altra manera d'expressar la funció que pugui donar la imatge de qualsevol nombre del domini sense haver d'escriure'ls tots; la millor manera consisteix a donar una regla algebraica que permeti calcular la imatge per a qualsevol element del domini. Per exemple, en el cas de la funció *g*:

$$g(x) = x^2$$

Aquesta expressió, denominada *expressió algebraica de la funció*, ens indica que per a qualsevol nombre del domini, representat per la lletra *x*, el valor de la funció és igual al quadrat d'aquest valor. És a dir, per a trobar el valor de la funció per a un element qualsevol del domini, s'ha de substituir en la expressió algebraica de la funció el valor de la lletra *x* pel valor del nombre en qüestió; per exemple, si volem calcular el valor de la funció *g* per al valor 4:

$$g(\underset{\underset{4}{\uparrow}}{x}) = \underset{\underset{4}{\uparrow}}{x}^2$$

és a dir, $g(4) = 4^2 = 16$. La imatge del 4 per la funció *g* és igual a 16.

La lletra que s'usa per a l'expressió algebraica d'una funció se la denomina *variable independent* o, simplement, *variable.* Moltes vegades, els valors de la funció s'expressen amb altra lletra, que sol ser la *y*, que es denomina *variable depenent* (perquè depèn del valor de la *x*, la variable independent). En el cas de la funció *g*, la variable dependent $y = g(x)$, és a dir, $y = x^2$.

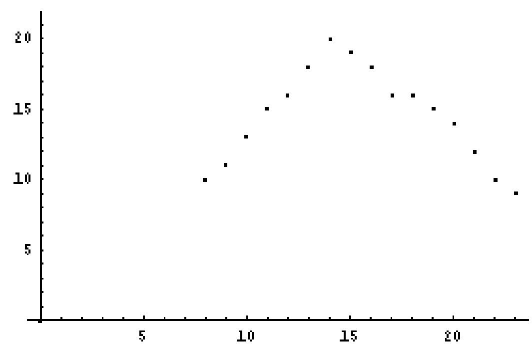
Què és la gràfica d'una funció?

> La gràfica d'una funció és el conjunt de tots els punts del pla cartesià les coordenades del qual coincideixen amb valors d'aquesta funció (la coordenada *x*, un valor del domini, i la coordenada *y*, un valor de la imatge). Per a dibuixar la gràfica d'una funció, doncs, n'hi ha prou amb dibuixar tots els punts continguts en la taula de la funció.

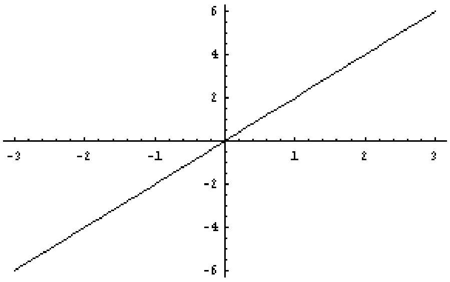
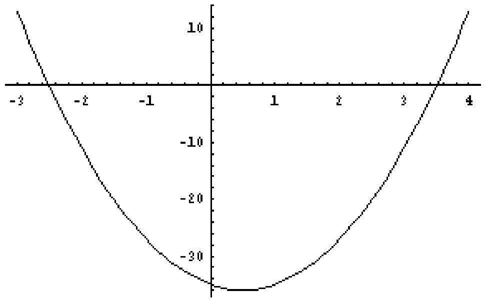
x	*t*(*x*)
8	10
9	11
10	13
11	15
12	16
13	18
14	20
15	19
16	18
17	16
18	16
19	15
20	14
21	12
22	10
23	9

Si *f* és una funció qualsevol, les parelles de nombres *x*, *f*(*x*) que es troben en una taula de la funció es poden interpretar com a parells ordenats (*x*,*f*(*x*)), és a dir, es poden interpretar com a punts del pla cartesià. D'aquesta manera, es pot representar qualsevol dels punts d'una funció. Per exemple, suposem que *t* és una funció que dóna la temperatura d'una ciutat cada hora, des de les vuit del matí fins a les onze de la nit. La taula és al marge esquerre.

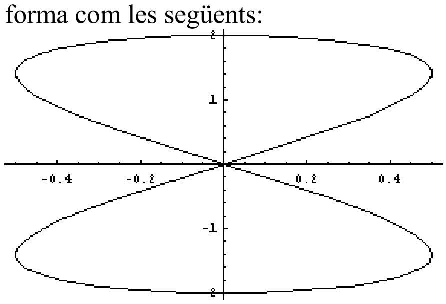
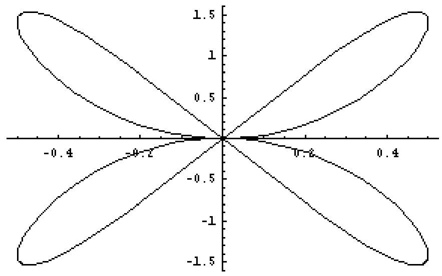
D'aquesta manera, els punts corresponents a la funció *t*, que són de la forma (*x*,*t*(*x*)), es poden expressar així: (8,10), (9,11), (10,13), (11,15), (12,16), (13,18), (14,20), (15,19), (16,18), (17,16), (18,16), (19,15), (20, 14), (21,12), (22,10) i (23, 9). La representació de tots aquests punts en el pla cartesià és aquesta:



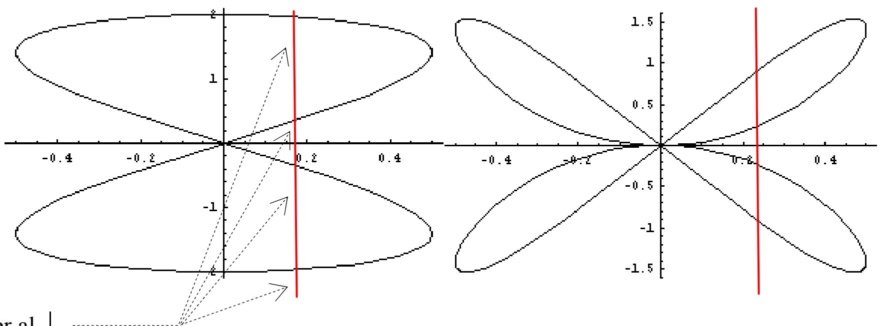
En aquest cas, no s'ha dibuixat la part negativa dels eixos per comoditat, ja que no hi ha punts amb alguna coordenada negativa.
La representació de tots els punts d'una funció es denomina *gràfica* d'una funció. Si una funció té per domini tot el conjunt de nombres reals (cosa molt freqüent), és impossible representar tota la seva gràfica (perquè no cabria en un full de paper). En aquest cas, hauríem de conformar-nos amb la representació de només una part d'aquesta gràfica, i és costum seguir denominant-la gràfica de la funció, però indicant l'interval del domini que estem representant. Per exemple, aquestes representacions corresponen a les gràfiques de les funcions (que s'estudiaran detingudament en un altre tema) $f(x) = 2x$ (esquerra) en els punts el domini dels quals es troba en l'interval [–3,3], i $g(x) = 4x^2 - 4x - 35$ en l'interval [–3,4]. En aquests casos observem com, en representar-se tots els punts d'un interval determinat, els punts de la gràfica estan tan pròxims que formen una línia contínua: en un cas, recta, i en l'altre, corbada.

En general, totes les funcions el domini de les quals siguin els nombres reals tenen aquesta característica: la seva gràfica apareix com una línia contínua, o com a diverses línies contínues. Cal destacar que la gràfica d'una funció no pot tenir una forma com les següents:

ja que en ambdós casos existeixen valors en l'eix X la imatge del qual no és un sol nombre. Això es pot comprovar traçant qualsevol recta vertical en la gràfica; si aquesta recta talla diversos punts de la gràfica, llavors es pot assegurar que aquesta gràfica no és la gràfica d'una funció perquè, com a mínim, el valor de x determinat per aquesta recta té més d'una imatge, cosa impossible en una funció:



Diferents valors per al mateix element de domini

Quines operacions es poden fer amb funcions?

> Les operacions essencials amb funcions són la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i la potenciació. En tots els casos, el domini de la funció resultant és la intersecció dels dominis de les funcions amb les quals s'opera; a més, en el cas de la divisió, no pertanyen al domini aquells punts que provoquen l'anul·lació del denominador, mentre que en el cas de la potenciació, no pertanyen al domini aquells punts que produeixen l'anul·lació simultània de la base i de l'exponent.

Entre diferents funcions qualssevol es poden realitzar aquestes operacions:

- La suma de funcions

La suma de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa $f + g$, es calcula de la manera següent:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g. Per exemple, la suma de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 – 1$ és:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 4x^2 – 1 = 4x^2 + 3x – 1$$

La suma de funcions té les propietats següents:

Commutativa, és a dir, $f + g = g + f$

Associativa, és a dir, $f + (g + h) = f + (g + h)$

A més, hi ha un element, denominat *funció zero*, que és l'element neutre de la suma, és a dir, qualsevol funció sumada amb aquest element no varia. Aquesta funció és, evidentment, $z(x) = 0$.

Per a cada funció $f(x)$ hi ha, a més, el seu element oposat, $–f(x)$, que sumat a la funció original resulta la funció 0.

- El producte de funcions

El producte de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa $f \times g$, i es calcula de la manera següent: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g. Per exemple, el producte de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 – 1$ és:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = 3x \times (4x^2 – 1) = 12x^3 – 3x$$

El producte de funcions té les propietats següents:

Commutativa, és a dir, $f \times g = g \times f$

Associativa, és a dir, $f \times (g \times h) = f \times (g \times h)$

A més, hi ha un element, denominat *funció unitat*, que és l'element neutre del producte, és a dir, qualsevol funció multiplicada amb aquest element no varia. Aquesta funció és, evidentment, $o(x) = 1$.

- El quocient de funcions

El quocient de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa f/g, es calcula de la manera següent:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g, i que, a més, $g(x)$ no sigui 0. Per exemple, el quocient de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 – 1$ és:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = 3x/(4x^2 – 1) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$$

- La potenciació de funcions

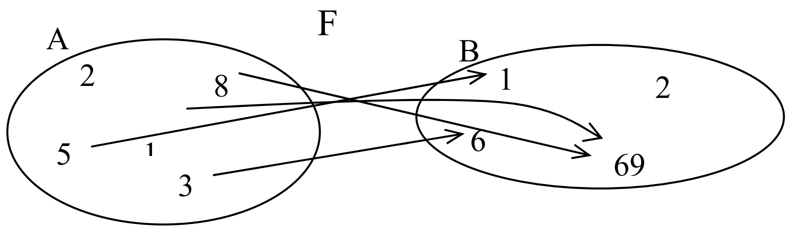
La potenciació de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es designa f^g, es calcula de la manera següent: $\left(f^g\right)(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)}$

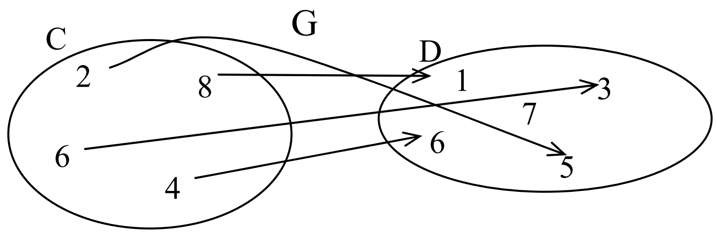
i es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions f i g, i que, a més, $f(x)$ i $g(x)$ no siguin 0. Per exemple, el quocient de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 – 1$ és: $\left(f^g\right)(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)} = (3x)^{4x^2-1}$

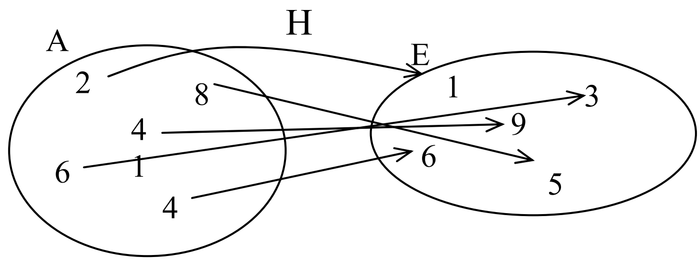
Hi ha una altra operació important, denominada *composició de funcions*, que s'estudiarà en altre capítol.

Exercicis

1. Digues si aquestes correspondències són funcions. En cas afirmatiu, digues si són bijectives, exhaustives o injectives. Finalment, fes la taula de la funció:



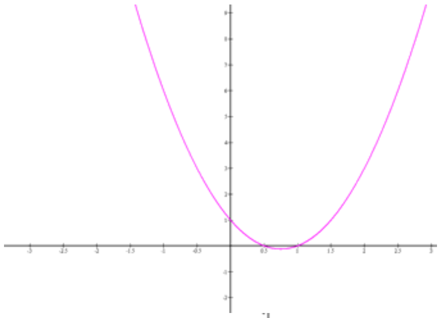




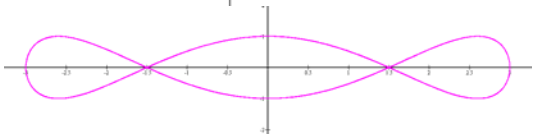
2. Dóna l'expressió d'una funció que tingui aquesta taula:

x	*f(x)*
-2	5
0	1
2	5
4	17
5	26
6	37

3. Troba les imatges de la funció $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ pels valors 0, 1 i -3.
4. Digues si aquestes gràfiques corresponen a una funció:



a.



b.

Solucions

1. Totes són funcions perquè cada element del conjunt de sortida només té una imatge. Les seves taules són:

x	$F(x)$
1	69
3	6
5	1
8	69

x	$G(x)$
2	5
4	6
6	3
8	1

x	$H(x)$
2	1
4	6
6	3
8	5
41	9

   F no és ni injectiva ni exhaustiva.
   G és injectiva.
   H és bijectiva.

2. $f(x) = x^2 + 1$
3.
   $f(0) = 1$

   $f(1) = 0$

   $f(-3) = 34$

4. La primera sí, però la segona, no, perquè hi ha valors que tenen més d'una antiimatge.

Les funcions polinòmiques

Les funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és la que té per expressió un polinomi. En general, se solen estudiar segons el grau del polinomi:

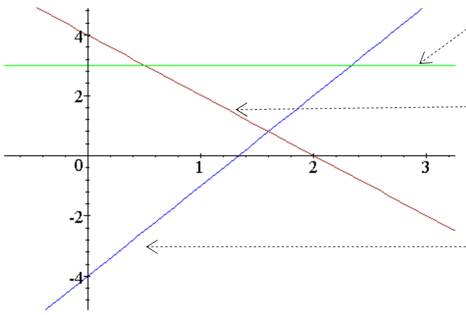
Les funcions afins

Una funció afí és una funció polinòmica l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1, del tipus:

$$f(x) = ax + b$$

La gràfica d'una funció lineal és una recta. El nombre a es diu *pendent de la recta* i informa de la inclinació d'aquesta. Per exemple:

Punts de tall amb els eixos:



amb l'eix X: $(-b/a, 0)$

amb l'eix Y: $(0, b)$

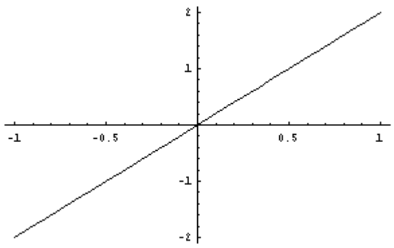
Creixement:

la funció és creixent si $a > 0$

la funció és constant si $a = 0$

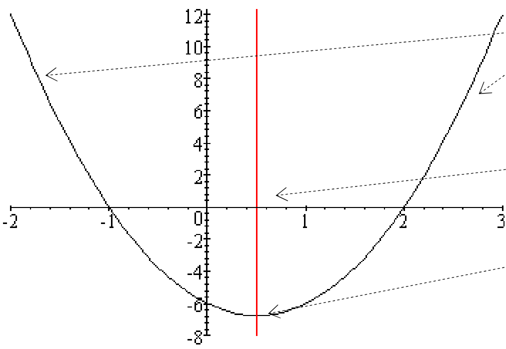
la funció és decreixent si $a < 0$

Un tipus especial de funcions afins són les funcions lineals: una funció lineal és una funció afí el terme independent de la qual és 0. La seva representació és una recta que passa per l'origen. Per exemple: recta corresponent a la funció $f(x) = 2x$.



Les funcions quadràtiques

Una funció quadràtica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 2. La seva representació és una paràbola, els elements essencials de la qual són l'eix de simetria, el vèrtex i les branques:



Si una funció quadràtica té per expressió $f(x) = ax^2 + bx + c$,

l'eix de simetria és la recta $x = –b/2a$.

el vèrtex és el punt $(–b/2a\ ,\ b^2/4a – b^2/2a + c)$.

les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt si $a > 0$, i cap avall si $a < 0$.

Punts de talls amb els eixos:

amb l'eix X: els punts la x dels quals resol l'equació $ax^2 + bx + c = 0$. Poden ser:

dues: si $b^2 – 4ac > 0$.

un: si $b^2 – 4ac = 0$.

cap: si $b^2 – 4ac < 0$.

amb l'eix Y: $(0, y)$

Creixement:

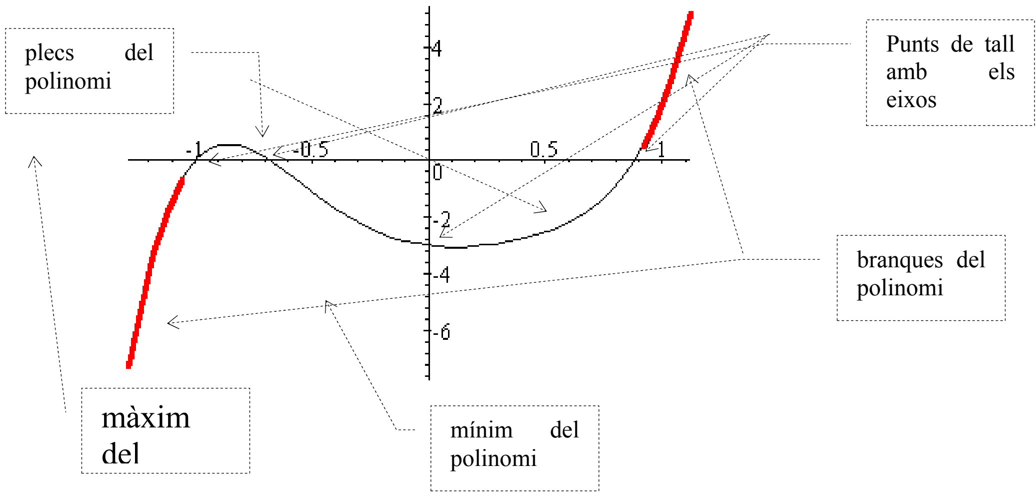
si $a > 0$, decreixent en l'interval $(–\infty,–b/2a)$, creixent en l'interval $(–b/2a,+\infty)$.

si $a < 0$, creixent en l'interval $(–\infty,–b/2a)$, decreixent en l'interval $(–b/2a,+\infty)$.

Les funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi; per això, de vegades, es denomina simplement *polinomi.*

En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central; també els màxims i els mínims, i els punts de tall amb els eixos:



La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.

La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.

El geni de Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) fou un matemàtic suís els treballs més importants del qual es van estendre per gairebé tots camps de la matemàtica, i fins i tot per altres ciències. Alguns d'aquests es van centrar en les funcions i va ser el primer matemàtic que en va donar una definició semblant a l'actual.

Euler va néixer a Basilea i va estudiar a la Universitat de Basilea amb el matemàtic suís Johann Bernoulli, i es va llicenciar amb 16 anys. El 1727, per invitació de l'emperadriu de Rússia Catalina va ser membre del professorat de l'Acadèmia de Ciències de Sant Petersburg. Va ser nomenat catedràtic de Física el 1730 i de Matemàtiques el 1733. El 1741 fou professor de Matemàtiques en l'Acadèmia de Ciències de Berlín a petició del rei de Prusia, Frederic el Gran. Euler va tornar a Sant Petersburg el 1766, on va romandre fins a la seva mort. Encara que impedit per una pèrdua parcial de visió abans de complir 30 anys i per una ceguesa gairebé total al final de la seva vida, Euler va produir nombroses obres matemàtiques importants, i també ressenyes matemàtiques i científiques.

En la *Introducció a l'anàlisi dels infinits* (1748), Euler va fer el primer tractament analític complet de l'àlgebra, la teoria d'equacions, la trigonometria i la geometria analítica. En aquesta obra va tractar el desenvolupament de sèries de funcions i va formular la regla per la qual només les sèries convergents infinites poden ser avaluades adequadament. També va abordar les superfícies tridimensionals i va demostrar que les seccions còniques es representen mitjançant l'equació general de segon grau en dues dimensions. Altres obres tractaven del càlcul (inclòs el càlcul de variacions), la teoria de nombres, nombres imaginaris i àlgebra determinada i indeterminada. Euler, encara que principalment era matemàtic, va fer també aportacions a l'astronomia, la mecànica, l'òptica i l'acústica. Entre les seves obres es troben *Institucions del càlcul diferencial* (1755), *Institucions del càlcul integral* (1768-1770) i *Introducció a l'àlgebra* (1770).

L'extensió de la seva obra és immensa, i el seu mèrit és encara més gran si es té en compte la seva vida accidentada i, especialment, la seva ceguesa parcial en els anys finals de la seva existència.

El matemàtic suís Leonhard Euler.

Què és una funció lineal i quines en són les característiques?

> Una funció lineal o de proporcionalitat directa és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1 sense terme independent, del tipus
> $f(x) = ax$. La gràfica d'una funció lineal és una recta que passa per l'origen de coordenades.
> El nombre a rep el nom de *pendent de la recta.*

Una funció polinòmica és la que té per expressió un polinomi. L'estudi de les funcions polinòmiques s'efectua segons el grau del polinomi; per tant, s'ha de començar per les funcions que tenen per expressió polinomis de grau 1. Una funció lineal o de proporcionalitat directa és aquella l'expressió de la qual consisteix en el producte d'un nombre per la variable. És a dir, f és una funció lineal (o de proporcionalitat directa) si:

$f(x) = ax$ essent a un nombre qualsevol

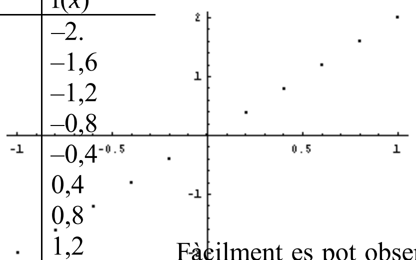
Per exemple, són funcions lineals:

$g(x) = 2x$ $h(x) = 4x$ $s(x) = -3x$

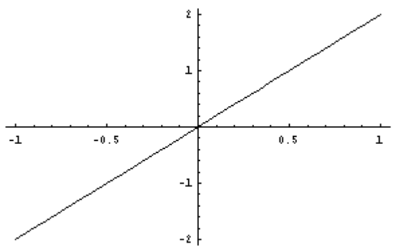
El nombre que multiplica la variable es denomina *raó de proporcionalitat*. Així, la raó de proporcionalitat de la funció g és 2; la de la funció h és 4; la de s és –3.
Per estudiar la forma de la gràfica d'una funció lineal, es pot crear, en primer lloc, una taula de la funció $g(x) = 2x$.

x	f(x)
–1	–2.
–0,8	–1,6
–0,6	–1,2
–0,4	–0,8
–0,2	–0,4
0,2	0,4
0,4	0,8
0,6	1,2
0,8	1,6
1	2.

Si es representen aquests punts, s'obté aquesta gràfica:



Fàcilment es pot observar com si es poguessin dibuixar tots els punts de la gràfica de la funció, el resultat seria una recta que contindria l'origen de coordenades.



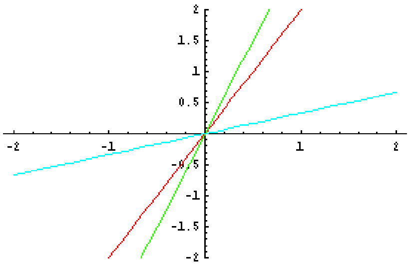
En general, la gràfica de qualsevol funció lineal és una recta que passa per l'origen de coordenades. Es pot demostrar aquest fet, ja que qualsevol funció lineal és de la forma $f(x) = ax$, essent a un nombre real; si es busca la imatge del *0*, $f(0) = a \cdot 0 = 0$. És a dir, la imatge del 0 sempre ha de ser 0; després el punt (0,0) sempre pertany a la gràfica de la funció.
Així, doncs, per dibuixar una funció lineal qualsevol només s'han de seguir aquests passos:

- Es troba la imatge d'un valor qualsevol de la variable que no sigui el 0 (que ja sabem que és 0).
- Es marca el punt que correspon a aquest parell ordenat en el pla cartesià.
- Es traça la recta que passa pel punt (0,0) i pel punt anterior.

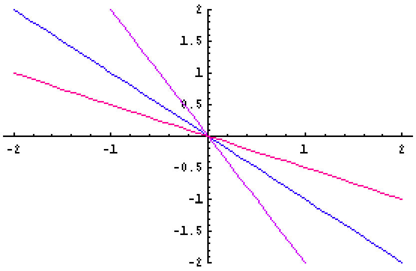
Aquesta recta ha de ser la gràfica de la funció lineal.

La gràfica de qualsevol funció s'ha de mirar d'esquerra a dreta. Dit això, si dibuixem diverses funcions lineals, com les següents $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -1/2 \cdot x$, $s(x) = 1/3 \cdot x$, $t(x) = 2x$ i $r(x) = 3x$, es pot observar com varia la inclinació o pendent de la recta:

- Si la raó de proporcionalitat és positiva, la recta creix amb més rapidesa com més gran és la raó.



- Si la raó de proporcionalitat és negativa, la recta decreix amb més rapidesa com més petita és la raó.



Per això, a la raó de proporcionalitat també se la denomina *pendent de la recta*, a causa de l'estreta relació entre aquest valor i la inclinació o pendent de la gràfica.

Què és una funció afí i quines en són les característiques?

> Una funció afí és una funció polinòmica l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1, del tipus $f(x) = ax + b$. La gràfica d'una funció lineal és una recta. El nombre a rep el nom de *pendent de la recta* i informa de la inclinació d'aquesta.

Una funció afí té per expressió algebraica un polinomi de primer grau:

$$f(x) = ax + b$$

essent a i b dos nombres reals qualssevol.

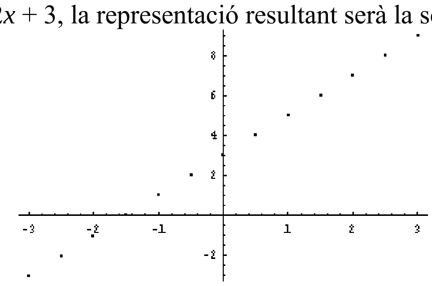
Així, doncs, l'única modificació amb la funció lineal és que la funció afí afegeix el terme independent al terme de grau 1. Per exemple, són funcions afins:

$$g(x) = 3x - 2 \qquad\qquad h(x) = 2x - 7$$

El coeficient de la variable, a, es denomina *pendent*, igual que en el cas de la funció lineal, mentre que l'altre nombre, b, es denomina *terme independent.*

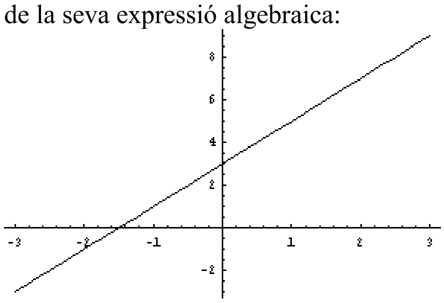
Si es representen diferents punts d'una funció afí, es pot arribar a deduir la forma de la seva gràfica. Per exemple, si es construeix una taula de la funció $f(x) = 2x + 3$, la representació resultant serà la següent:

x	$f(x)$
–3	–3
–2,5	–2
–2	–1
–1,5	0
–1	1
–0,5	2
0	3
0,5	4
1	5
1,5	6
2	7
2,5	8
3	9



Sembla evident que la gràfica d'aquesta funció ha de ser una recta, i en aquest cas concret no passa per l'origen de coordenades.

Una vegada conegut aquest fet, és fàcil representar una funció afí a partir de la seva expressió algebraica:



- Es busquen dos parells ordenats que pertanyin a la gràfica de la funció.
- Es representen aquests punts en el pla cartesià.
- S'uneixen els punts mitjançant una recta.

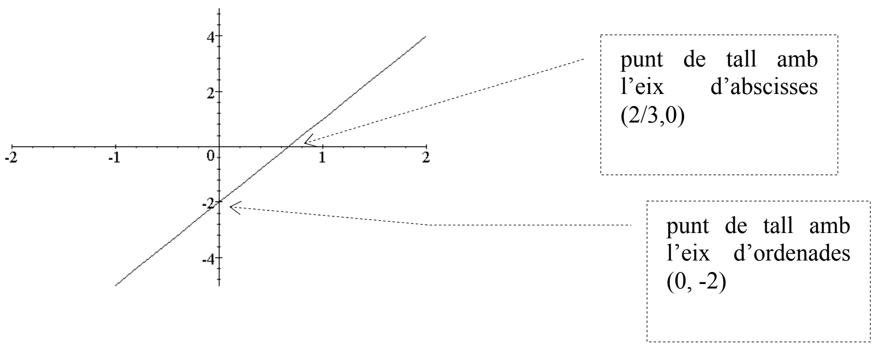
Aquesta recta ha de ser la gràfica de la funció afí.

En la gràfica d'una funció afí, f, s'han de destacar dos punts:

- La intersecció de la recta amb l'eix d'ordenades, que es pot trobar fent $f(0)$. El punt en qüestió serà, doncs, $(0, f(0))$. Per exemple, la intersecció de $f(x) = 3x – 2$ amb l'eix d'ordenades és $(0, f(0))$, és a dir, $(0, –2)$. Es pot observar que $f(0)$ és, sempre, el terme independent de l'expressió de la funció afí.

- La intersecció de la recta amb l'eix d'abscisses, que es pot trobar resolent $f(x) = 0$; si x' és la solució d'aquesta equació, el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses serà $(x',0)$. Per exemple, la funció $3x – 2$ talla l'eix d'abscisses en un punt la coordenada d'ordenades del qual compleix $f(x) = 0$, és a dir, $3x – 2 = 0$; resolent aquesta equació $x = 2/3$. El punt d'intersecció és, doncs, $(2/3,0)$.

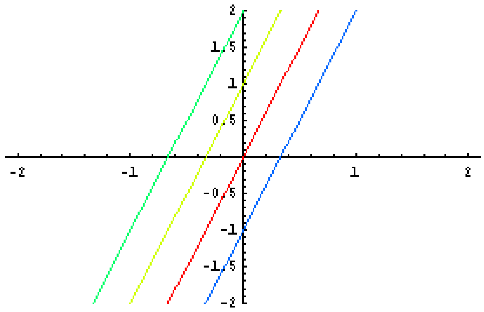
El gràfic següent mostra tots dos punts d'intersecció.



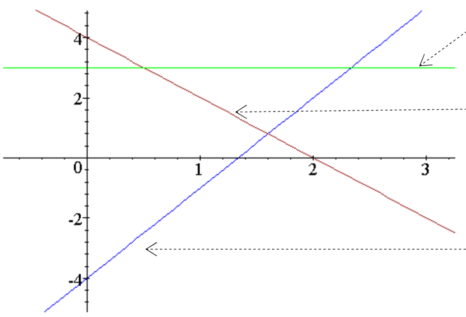
Aquestes funcions:

$(x) = 3x$ $\quad g(x) = 3x + 1$ $\quad h(x) = 3x + 2$ $\quad s(x) = 3x - 1$

tenen el mateix pendent; si observem la seva representació comprovarem que són rectes paral·leles:



És a dir, l'única modificació gràfica que s'observa al canviar el terme independent d'una funció consisteix en el desplaçament paral·lel de la recta. A més, es pot observar que una funció lineal no és més que una funció afí el terme independent de la qual és 0, o bé és aquella funció afí que passa per l'origen.
D'aquesta manera podrem observar que les funcions afins poden, o bé mantenir-se paral·leles a l'eix X, o bé anar creixent a mesura que desplacem la vista cap a la dreta, o bé anar decreixent a mesura que desplacem la vista cap a la dreta.
A més, les funcions afins que van creixent a mesura que es desplaça la vista cap a la dreta, denominades *funcions creixents*, són aquelles que tenen el pendent positiu. En canvi, les funcions afins que van decreixent a mesura que desplacem la vista cap a la dreta, denominades *funcions decreixents*, són aquelles que tenen el pendent negatiu. Evidentment, les funcions afins que són paral·leles a l'eix X tenen el pendent igual a 0. En aquest gràfic observem una funció creixent, una decreixent i una paral·lela a l'eix X.



Funció $f(x) = 3$, el pendent de la qual és 0, denominada *funció constant.*

Funció $g(x) = -2x + 4$, el pendent de la qual és -2, negatiu, por tant, decreixent.

Funció $h(x) = 3x - 4$, el pendent de la qual és 3, positiu, per tant, creixent.

...an, a mesura que augmenta el valor de la x, també augmenta el
...unci... que augmenta el valor de la x,
...na f... r de la y no canvia en variar el
De vegades és necessari descobrir la funció ... nats. Vegem com es fa seguint un exemple: suposem que volem trobar una funció afí la gràfica de la qual conté els punts $(1, -1)$ i $(-2, -7)$.
Es denomina a el pendent de la funció i b el seu terme independent. D'aquesta manera, l'expressió d'aquesta funció ha de ser $f(x) = ax + b$. S'ha de buscar un sistema d'equacions per trobar a *y* b:
Com que el punt $(1, -1)$ és de la gràfica de la funció: $f(1) = -1$, és a dir, $a + b = -1$. Com que el punt $(-2, -7)$ és de la gràfica de la funció: $f(-2) = -7$, és a dir, $-2a + b = -7$.
Es resol el sistema que ha sorgit de les condicions anteriors:

$$\begin{aligned} a + b &= -1 \\ -2a + b &= -7 \end{aligned}$$

les solucions de les quals $a = 2$ i b $= -3$. En aquest cas, doncs: $f(x) = 2x - 3$.

Què és una funció quadràtica i quines en són les característiques?

x	$f(x)$

...	...
–0,5	–3,75
–0,4	–4,32
–0,3	–4,83
–0,2	–5,28
–0,1	–5,67
0	–6.
0,1	–6,27
0,2	–6,48
0,3	–6,63
0,4	–6,72
0,5	–6,75
0,6	–6,72
0,7	–6,63
0,8	–6,48
0,9	–6,27
1	–6.
1,1	–5,67
1,2	–5,28
1,3	–4,83
1,4	–4,32
1,5	–3,75
...	...

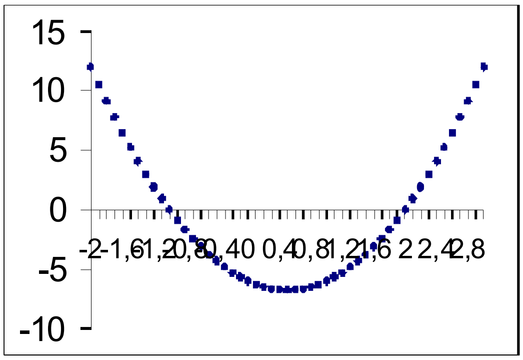
Una funció quadràtica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 2. La seva representació és una paràbola, els elements essencials de la qual són l'eix de simetria, el vèrtex i les branques.

L'expressió d'una funció quadràtica correspon a un polinomi de 2n. grau amb una única variable. Per exemple, són funcions quadràtiques:

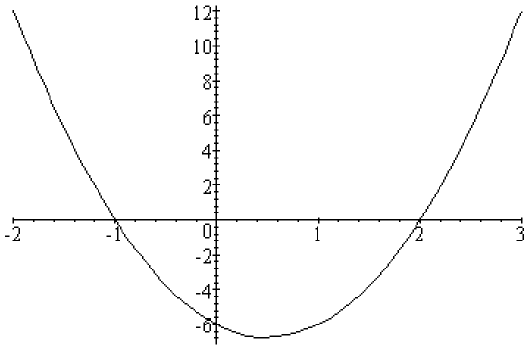
$f(x) = 3x^2 + 2x – 2.$

$g(x) = x^2 + 5$

Per representar una funció quadràtica, construirem primer una taula amb alguns dels valors de la funció. Al marge hi ha una taula de la funció $f(x) = 3x^2 –3x – 6$. No s'han inclòs més valors en la taula perquè seria massa extensa; s'han utilitzat més punts de la funció per fer la representació de la dreta.



És fàcil deduir que la representació completa de la funció quadràtica $f(x) = 3x^2 –3x – 6$, en l'interval [–2,3] és aquesta:



Aquest tipus de corba es denomina *paràbola*. Els elements més destacats d'una paràbola són:

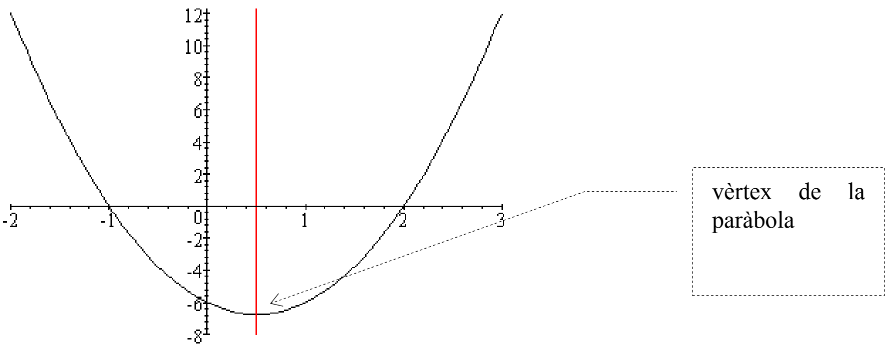
L'eix de simetria

El valor de la funció anterior quan x = 0,5 és –6,75; podem comprovar que la imatge dels valors de x equidistants de 0,5 són:

x	*f(x)*
0,4	–6,72
0,3	–6,63
0,2	–6,48
0,1	–6,27
0	–6.
–0,1	–5,67
–0,2	–5,28
–0,3	–4,83
–0,4	–4,32
–0,5	–3,75

x	*f(x)*
0,6	–6,72
0,7	–6,63
0,8	–6,48
0,9	–6,27
1	–6.
1,1	–5,67
1,2	–5,28
1,3	–4,83
1,4	–4,32
1,5	–3,75

És a dir, a banda i banda de x = 0,5, els valors de la funció es repeteixen. Aquest fet es pot observar també visualment, dibuixant una recta perpendicular a l'eix X que passi per x = 0,5; la part de la gràfica que queda a l'esquerra d'aquesta recta és la imatge reflectida de la part dreta. Aquesta propietat es denomina *simetria.* Així, una paràbola és sempre simètrica respecte d'una recta, denominada *eix de simetria.*



El vèrtex

La intersecció entre la paràbola i l'eix de simetria es denomina *vèrtex de la paràbola*. A l'exemple, el vèrtex de la paràbola coincideix amb el punt de coordenada x = 0,5, i coordenada y = –6,75, és a dir, el punt (0,5,–6,75).

En general, el vèrtex de la paràbola que representa la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, té com a coordenada d'abscisses:

$$x = -b/2a$$

a l'exemple, essent $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, sabem que a = 3 , b = –3 i c = –6; per tant, la coordenada x del vèrtex és $x = -(-3)/(2 \cdot 3) = 0{,}5$, tal com ja havíem anunciat.

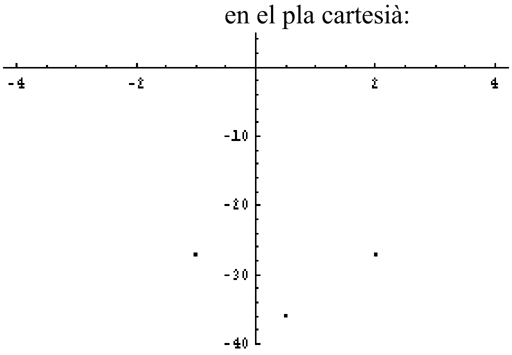
Les branques

A partir del vèrtex de la paràbola, aquesta es desenvolupa en dos traços simètrics, cadascun dels quals es denomina *branca.* En el cas de l'exemple, les dues branques es dirigeixen cap amunt, però en altres casos es podrien dirigir cap avall.

Com es construeix la gràfica d'una funció quadràtica?

Per trobar la gràfica d'una funció quadràtica s'ha de buscar, en primer lloc, el vèrtex d'aquesta gràfica. A continuació, s'han de buscar parells de punts equidistants del vèrtex; com més parells de punts es trobin, més precisa serà la representació de la paràbola. A més, en tota paràbola és convenient assenyalar els punts de talls amb els eixos.

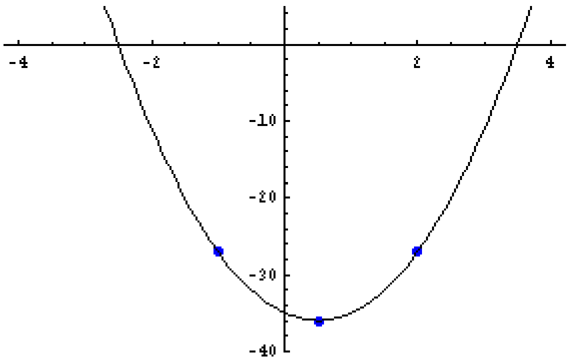
Donada l'expressió d'una funció quadràtica, aquests són els passos per aconseguir la seva representació en el pla cartesià:



1. Es troba el vèrtex de la paràbola, que té com coordenada $x = -b/2a$. Per exemple, si es vol representar la funció quadràtica $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$, el seu vèrtex té coordenada $x = 4/(2 \cdot 4) = 1/2$, la coordenada de la qual y serà $f(x) = 4 \cdot\ 1^2 - 4 \cdot 1 - 35 = -36$. Per tant, el vèrtex és (1/2, –36).
2. Es troben diferents parells de punts de la funció que tinguin la coordenada x equidistant respecte de la coordenada x del vèrtex, i es

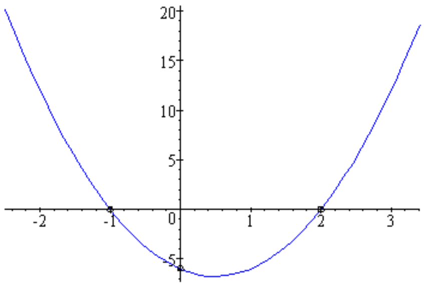
representen aquests punts juntament amb el vèrtex. N'hi ha prou de representar dos punts equidistants del vèrtex per fer-nos una idea de la forma de la paràbola. Per exemple, dos nombres equidistants de –1, podrien ser el –1 i el 2; les seves imatges són: $f(-1) = f(2) = -27$ (ja sabem que valors equidistants de la coordenada x del vèrtex tenen la mateixa imatge).

3. S'uneixen aquests punts mitjançant una corba parabòlica: el vèrtex no ha de ser de forma punxeguda, sinó arrodonida; a més, les branques de la paràbola s'han d'elevar (o dirigir cap a avall) de manera que sempre es vagin obrint més i més. Aquesta és la representació de la paràbola de l'exemple:

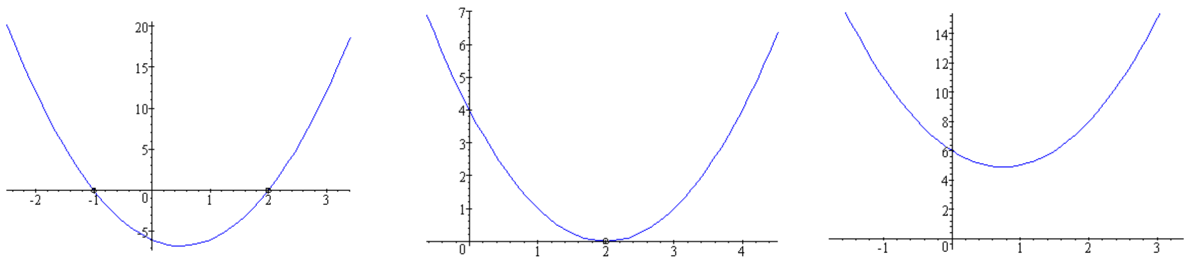


En tot cas, hi ha molts programes informàtics que permeten representar de manera més precisa una paràbola a partir de la seva expressió algebraica.
Juntament amb el vèrtex, altres punts importants d'una paràbola són les interseccions d'aquesta amb els eixos coordenats.

- Tota paràbola té una única intersecció amb l'eix d'ordenades; per trobar-la n'hi ha prou de calcular la imatge de $x = 0$; el punt intersecció serà $(0, f(0))$. Per exemple, en el cas de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $f(0) = -6$. Així, doncs, la intersecció de la paràbola amb l'eix Y serà $(0, -6)$.



Per trobar la intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses, s'ha d'igualar la funció a 0; d'aquesta manera s'obté una equació de segon grau, denominada *equació associada a la funció quadràtica*. En el cas de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, la intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses es troba resolent $3x^2 - 3x - 6 = 0$. En aquest cas, les solucions són $x = -1$ i $x = 2$. Per tant, la paràbola talla l'eix en $(-1,0)$ i $(2,0)$. En aquesta il·lustració es poden observar tots els punts de tall de la funció $f(x)$ amb els eixos.
És sabut que una equació de segon grau pot tenir dos, una o cap solució; les interseccions d'una funció quadràtica amb l'eix X es corresponen amb les solucions de l'equació associada. Per tant, una paràbola pot tenir dues, una o cap intersecció amb l'eix X. Gràficament, aquests casos es corresponen amb les representacions següents:



D'esquerra a dreta, estan representades les funcions $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$ i $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$:

- La funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ talla l'eix X en dos punts perquè l'equació $3x^2 - 3x - 6 = 0$ té dues solucions: $x = -1$, $x = 2$.

- La funció $g(x) = x^2 - 4x + 4$ talla l'eix X en un sol punt perquè l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució: $x = 2$.

- La funció $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$ no talla l'eix X perquè l'equació $2x^2 - 3x + 6 = 0$ no té cap solució.

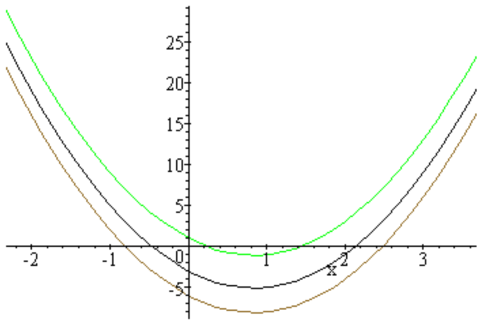
És a dir, si una paràbola talla en dos punts l'eix X, l'equació de 2n. grau associada a la funció quadràtica té dues solucions; si talla en un únic punt, l'equació té una única solució; si, en canvi, no talla en cap punt, l'equació no té cap solució.

Quina relació hi ha entre l'expressió de la funció quadràtica i la paràbola que en resulta?

> Els canvis més evidents en modificar els coeficients de l'expressió d'una funció quadràtica són els següents: si s'augmenta el terme independent de la funció, la paràbola es desplaça cap amunt; si canvia de signe el coeficient de grau 2, s'inverteixen les branques de la paràbola; si s'augmenta, en valor absolut, aquest coeficient, les branques de la paràbola tendeixen a tancar-se.

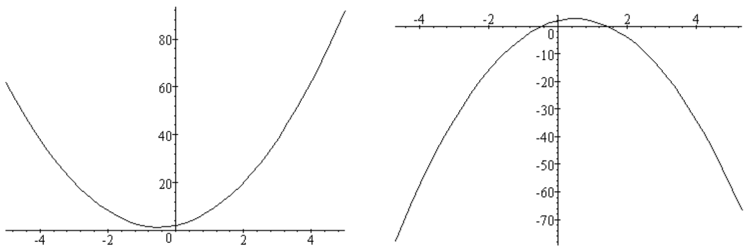
Si es modifiquen els coeficients d'una funció quadràtica, la paràbola resultant reflecteix aquestes modificacions:

- La modificació del terme independent d'una funció quadràtica provoca el desplaçament vertical de tota la paràbola: si el terme augmenta, la paràbola s'eleva; si el terme disminueix, la paràbola descendeix. Per exemple, si $f(x) = 3x^2 - 5x - 3$, i es representa juntament amb $g(x) = 3x^2 - 5x + 1$ i $h(x) = 3x^2 - 5x - 6$ observarem el següent:



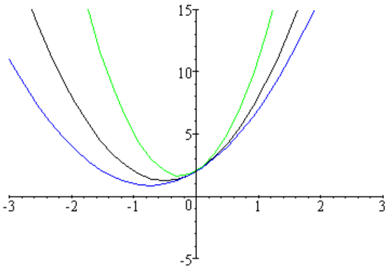
és a dir, si s'augmenta el terme independent, la paràbola s'eleva; en cas contrari, descendeix, tal com s'havia afirmat.

- El coeficient de grau 2 pot tenir signe positiu o negatiu. Si el terme és positiu, les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt, si és negatiu, es dirigeixen cap avall, tal com s'observa en aquesta il·lustració:



Funcions $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$ i $g(x) = -3x^2 + 3x + 2$

La modificació del valor absolut del coeficient de grau 2 també produeix, bàsicament, un canvi regular en la paràbola: si el valor absolut d'aquest coeficient disminueix, les branques de la paràbola se separen; en canvi, si el valor absolut del coeficient augmenta, les branques de la paràbola s'acosten, com es pot observar en la il·lustració. És clar que el vèrtex també canvia en modificar-se el coeficient de grau 2.



Funcions $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$ i $h(x) = 6x^2 + 3x + 2$

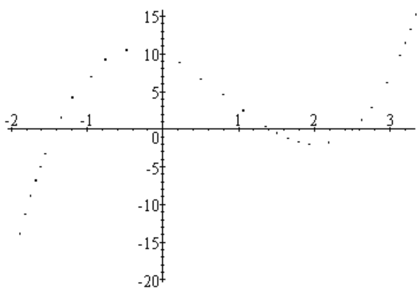
Què és una funció polinòmica i quines en són les característiques?

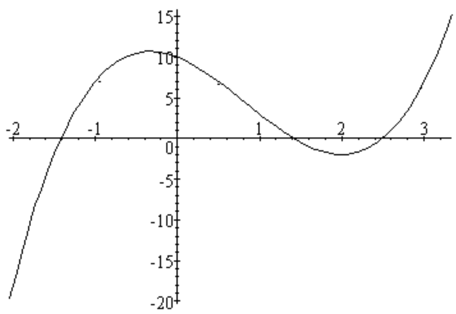
> Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi; per això, de vegades, es denomina simplement *polinomi.* En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central. En la part central la funció polinòmica es plega diverses vegades, com a molt, tantes com el grau del polinomi.

Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi; per això, de vegades, es denomina simplement *polinomi.* Las funcions afins i les funcions quadràtiques són exemples de funcions polinòmiques. Ara bé, també hi ha funcions polinòmiques de major grau. Un exemple de funció polinòmica de grau 3 és:

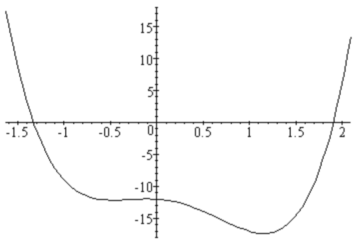
$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$$

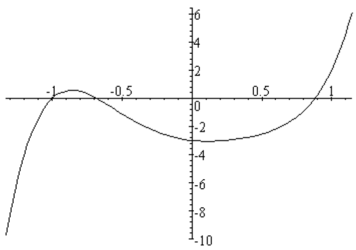
Per fer la gràfica d'aquesta funció podem crear una taula amb un bon nombre de punts i, posteriorment, representar-los. Una representació d'una taula d'aquesta funció (que no s'afegeix per la seva extensió) i la

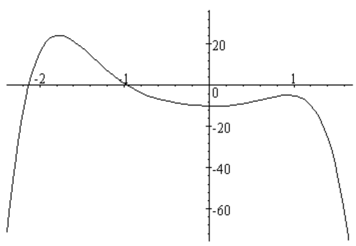




gràfica dibuixada d'un sol traç en l'interval [–2,3] són:
altres exemples de gràfiques de funcions polinòmiques són:







corresponents a les funcions:

$f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 12$ $\qquad g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$

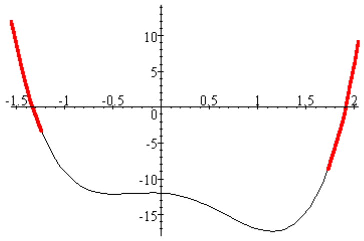
$h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$

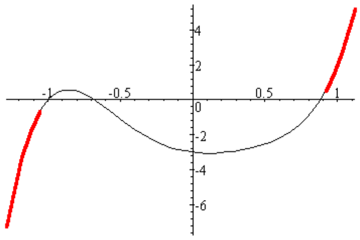
Normalment, es poden diferenciar, de manera genèrica, dues zones en la gràfica d'una funció polinòmica:

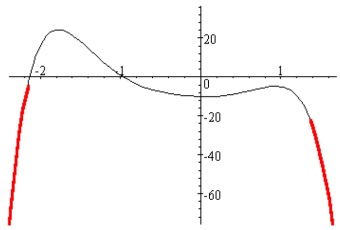
- Les branques

No són mai arriben a ser completament rectes, tot i que poden semblar-ho quan el domini representat és molt gran. Poden dirigir-se ambdues cap amunt, ambdues cap avall, o bé, una branca cap amunt i una altra cap avall. Si es representés la gràfica d'un polinomi en un interval major, la forma de les branques pràcticament no variaria; és a dir, les branques d'una gràfica ens donen una idea de com continua la gràfica d'una funció polinòmica més enllà de la part representada. Aquests exemples mostren les branques de les gràfiques anteriors:

Les branques de la funció $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 12$ es dirigeixen ambdues cap amunt; té 3 plecs en la part central.



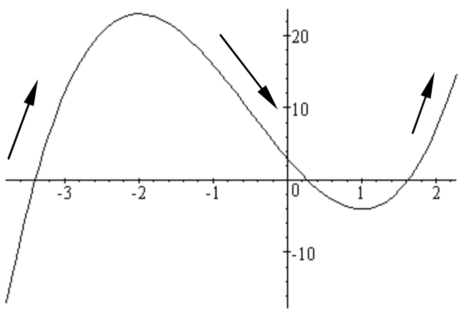




Les branques de la funció $g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$ es dirigeixen una cap avall i l'altra cap amunt; té 2 plecs.
Les branques de la funció $h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$ es dirigeixen ambdues cap avall; té 3 plecs.
N'hi haurà prou amb unes normes senzilles per conèixer cap a on s'han de dirigir les branques d'una funció polinòmica:

- La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.

- La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall bé quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.



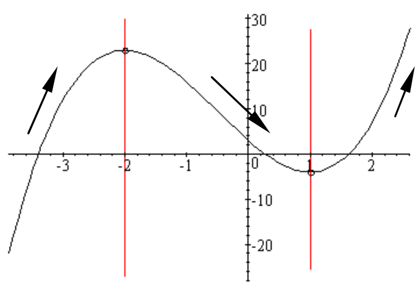
- La part central

En aquesta part la gràfica es plega diverses vegades; el nombre de plecs depèn del grau del polinomi (com més gran sigui, la gràfica en pot tenir més). El màxim de plecs d'una funció polinòmica és el seu grau menys 1; així, com sabem, un polinomi de grau 1 no pot tenir cap plec; en canvi, un polinomi de grau dos té exactament un plec; un polinomi de grau 3 té dos plecs i un de grau 4, com a màxim 3.

Com sabem, la gràfica d'una funció s'ha de contemplar d'esquerra a dreta. Així, per exemple, observant la gràfica del marge, corresponent $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, comprovem que al principi la funció es dirigeix cap amunt, després cap avall i, finalment, una altra vegada cap amunt. De manera més rigorosa podem dir:

- La funció es denomina *creixent* quan, a mesura que augmenta la x, el valor de la funció també augmenta.

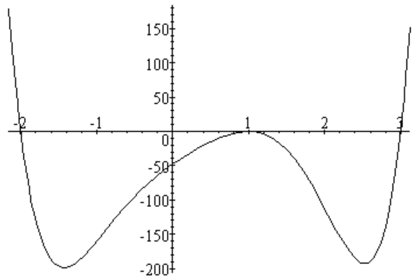
- La funció es denomina *decreixent* quan, a mesura que augmenta la x, el valor de la funció disminueix.



Així, doncs, en l'exemple anterior, la funció és creixent quan x és menor que –2, és decreixent entre –2 i 1, i torna a ser creixent a partir d'1, com mostra la il·lustració.
Els punts més destacats d'una gràfica són:

- Els extrems (màxims i mínims): denominem *màxim relatiu d'una funció* el punt en què la funció passa de ser creixent a ser decreixent; el valor de la funció en aquest punt és més gran que el de qualsevol altre punt de la gràfica que es trobi a prop. En canvi, un mínim relatiu d'una funció és aquell punt en el qual la funció passa de ser decreixent a ser creixent; el valor de la funció en aquest punt és menor que el de qualsevol altre punt de la gràfica que es trobi proper. Per exemple, en la funció anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, podem observar en la gràfica que un màxim relatiu es troba en $(-2, f(-2))$, és a dir, $(-2, 23)$; mentre que es troba un mínim en $(1, f(1))$, és a dir, $(1, -4)$.

- La intersecció amb l'eix Y: evidentment, només hi ha un punt intersecció entre la gràfica d'un polinomi i l'eix Y. Aquest punt és el que té coordenada $x = 0$. Per exemple, si $f(x) = 2x^3 – 5x^2 – 4x + 10$, el punt d'intersecció d'aquesta funció amb l'eix Y és $(0, f(0))$, és a dir, $(0, 10)$.



- La intersecció amb l'eix X: en aquest cas hi pot haver un nombre d'interseccions igual al grau del polinomi (encara que no sempre s'arriba a aquest nombre). Per trobar els punts d'intersecció s'ha de resoldre l'equació $f(x) = 0$, cosa que, en general, és difícil. Els valors de x que compleixen que $f(x) = 0$ es denominen *arrels del polinomi* $f(x)$. Un polinomi que tingui arrels es descompon com a producte de polinomis, alguns dels quals seran de grau 1. Per exemple, el polinomi $f(x) = 4x^6 – 10x^5 – 10x^4 + 14x^3 – 26 x^2 + 76x - 4$ té com a arrels 1, 3 i –2; la seva descomposició serà la següent:

$f(x) = 4x^6 – 10x^5 – 10x^4 + 14x^3 – 26 x^2 + 76x – 4 = 2(x – 1)^2(x – 3)(x + 2)(2x^2 + x +4)$

es pot comprovar com l'1 és una arrel doble en la gràfica adjunta.

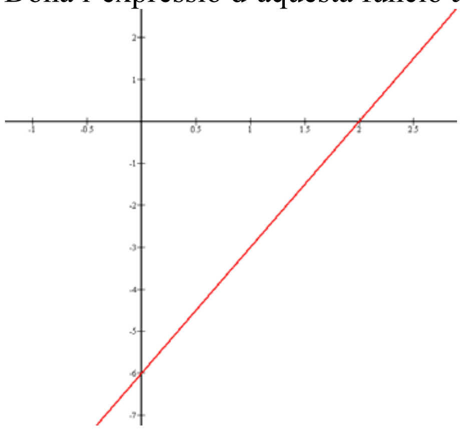
Exercicis

1. Sabem que una funció lineal compleix que $f(4)=12$. Quina és aquesta funció?

2. Una funció afí compleix que $f(2)=5$ i $f(0)=1$, quina és l'expressió d'aquesta funció?

3. Hi ha cap funció lineal que compleixi que $f(2)=-4$ i $f(-5)=-10$?

4. Dóna l'expressió d'aquesta funció afí:

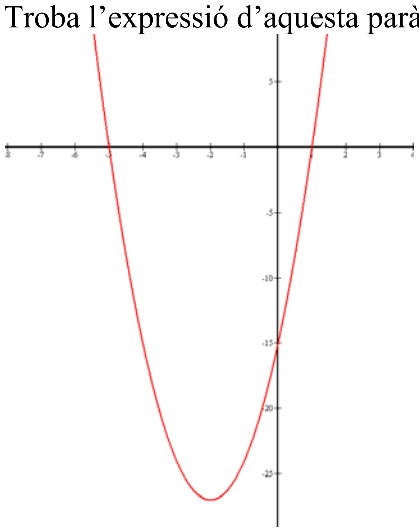


5. Troba el vèrtex de la paràbola: $f(x)=3x^2-x+1$.

6. Troba l'expressió d'una paràbola que compleixi:
   $f(1)=2$
   $f(-2)=11$
   $f(0)=1$

7. Troba l'expressió d'una paràbola, $f(x)$, que té una arrel a $x=2$ i el seu vèrtex a $x=-1$. A més, el valor al vèrtex és $f(-1)=-27$.

8. Troba l'expressió d'aquesta paràbola:



9. Troba el domini i els punts de tall amb els eixos (si n'hi ha), de les següents funcions:
   a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
   b. $g(x) = 1/x$
   c. $h(x) = 3$
   d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
   e. $b(x) = \sqrt{x + 1}$
   f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

Solucions

1. $f(x) = ax$, per tant, si $f(4) = 12$, aleshores, $a = 3$.

2. La funció ha de ser $f(x) = ax + b$, per tant, si $f(2) = 5$ i $f(0) = 1$
   $2a + b = 5$
   $b = 1$
   per tant, $a = 2$. Així la funció és $f(x) = 2x + 1$.

3. La funció ha de ser $f(x) = ax + b$, per tant si $f(2) = -4$ i $f(-5) = -10$, aleshores:
   $2a + b = -4$
   $-5a + b = -10$
   si restem les equacions comprovem que $-7a = -6$. Per tant, $a = \frac{6}{7}$. Substituint a les dues equacions anteriors comprovem que $b = -\frac{40}{7}$. Per tant, la funció és $f(x) = \frac{6}{7}x - \frac{40}{7}$.

4. La funció passa pels punts (0,-6) i (2,0), per tant, $f(0) = -6$ i $f(2) = 0$. Fent un procediment semblant a l'anterior i resolent el sistema resultant, la funció resultant és: $f(x) = 3x - 6$.

5. Usant la fórmula del vèrtexs obtenim que és el punt $(\frac{1}{6}, \frac{11}{12})$.

6. Si la paràbola és $f(x) = ax^2 + bx + c$, usant que $f(0) = 1$ ja podem assegurar que $c = 1$. Si apliquem les altres dues condicions:
   $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(-2) = 11 \end{array}$ obtenim que $\begin{array}{l} a + b + 1 = 2 \\ 4a - 2b + 1 = 11 \end{array}$
   i resolent el sistema obtenim que l'expressió és $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

7. En aquest cas, la paràbola és $f(x) = a(x-2)(x-b)$. Sabem que les arrels són equidistants del vèrtex, per tant, si l'arrel 2 es troba a 3 unitats del vèrtex -1, l'altra arrel també es trobarà a la mateixa distància. Per tant, l'altra arrel és $x = -4$. D'aquesta manera, podem assegurar que la funció és $f(x) = a(x-2)(x+4)$. Si, a més, $f(-1) = -27$, aleshores, és fàcil deduir que $a = 3$ i, per tant, $f(x) = 3(x-2)(x+4)$.

8. Només cal adonar-se que passa per (-5,0), (1,0) i (0,-15). Resolent el sistema resultant, obtenim que $f(x) = 3(x-1)(x+5)$.

9.
   a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
      El domini és tota la recta real perquè és un polinomi.
      Els punts de tall són:
      Eix Y: Si $x = 0$, $f(x) = 1$, per tant, (0,1)
      Eix X: $f(x) = 0$ --> $x = 1$, per tant, (1,0)

b. $g(x) = 1/x$
El domini es tota la recta real excepte els números que anul·len el denominador, és a dir, menys 0. Així R\{0}
Els punts de tall són:
Eix Y: Ja que x no pot ser 0, no existeixen.
Eix X: Si $g(x) = 0$ --> no existeix cap x que ho compleixi. Per tant, no hi ha punts de tall.

c. $h(x) = 3$
El domini és tota la recta real, perquè qualsevol número té la imatge igual a 3..
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $h(x) = 3$, per tant (0,3)
Eix X: $h(x)$ no pot ser mai 0.

d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
El domini es tota la recta real, excepte aquells nombres que anul·len el denominador. per tant, el domini és R\{-2}
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $a(0) = -1/2$, per tant, (0,-1/2)
Eix X: si $a(x) = 0$ --> $x^2 - 1 = 0$ --> $x = 1$, o be, $x = -1$. Per tant, (1,0), (-1,0)

e. $b(x) = \sqrt{x+1}$
L'interior de l'arrel ha de ser positiu, per tant, $x + 1 \geq 0$, és a dir, $x \geq -1$. Així, el domini és $[-1,+\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: Si $x = 0$ --> $b(0) = 1$, per tant, (0,1)
Eix X: Si $b(x) = 0$ --> $x+1=0$ --> $x = -1$, per tant, (-1,0)

f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
Com en el cas anterior, $x^2-1 \geq 0$, per tant, el domini és $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $c(0)$ no existeix, per tant, no hi ha punts de tall,
Eix X: si $h(x) = 0$ --> $x = 1$ ó $x = -1$, per tant, (-1,0) (1,0).

g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$
En aquest cas s'ha d'acomplir: $x^2-4 \geq 0$, és a dir, x ha de pertànyer a $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

a més, $x+5$ no ha de ser 0, d'aquí que x no pugui ser -5.
En definitiva, el domini és: $(-\infty, -5) \cup (-5,-2] \cup [2, \infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> no es possible.
Eix X: $d(x) = 0$ --> $x = -2$ ó $x = 2$. Per tant, (2,0), (-2,0)

Les funcions exponencials i logarítmiques

Les funcions exponencials i logarítmiques

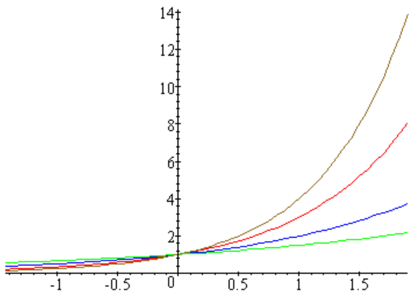
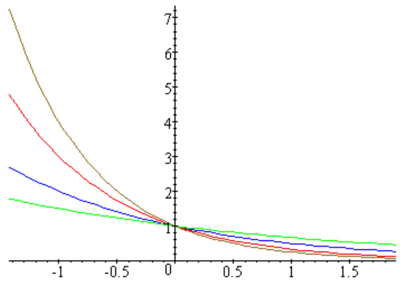
Les funcions exponencials

Una funció exponencial de base a és la que es defineix a partir de les potències dels nombres. La seva expressió és de la forma:

$$a^x \text{, essent } a > 0.$$

Les seves característiques són:

Domini: $(-\infty,+\infty)$.
Imatge: $(0, +\infty)$.
No tenen ni màxims ni mínims.
Passen pel punt (0,1).

$a > 1$	$a < 1$
Funció creixent si x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a 0 si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$ 	Funció decreixent si x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a $+\infty$ si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a 0 
a^x i $(1/a)^x$ són simètriques respecte de l'eix Y	
Una de les funcions exponencials més importants és e^x, és a dir, funció exponencial la base de la qual és el nombre e = 2,71828182845904523...	

Equacions exponencials

Una equació exponencial és una equació que inclou funcions exponencials. Per resoldre una equació exponencial s'han d'agrupar al màxim les potències per substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. Per exemple, els passos per resoldre:

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

són:

$$7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$$
$$7^x (1 + 7 + 7^2) = 2793$$
$$7^x \cdot 57 = 2793$$
$$7^x = 2793/57 = 49$$

per tant: $x = 2$ resol $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$.

El mateix procediment s'ha de seguir per resoldre un sistema d'equacions exponencial. Per resoldre:

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

S'han de seguir aquests passos:

$$5^x = 5^i \cdot 5^4 \quad \rightarrow \quad 5^{x-y} = 5^4$$
$$2^x \cdot 2^i = 2^8 \quad \rightarrow \quad 2^{x+y} = 2^8$$

el sistema inicial es converteix en $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$

la solució del qual és $x = 6$ i $y = 2$, que són també solucions del primer sistema.

Composició de funcions i funció inversa

La composició de la funció f amb la funció g és altra funció, designada gof, que compleix:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

Dues funcions, f i g, es diu que són inverses una de l'altra, si

$$(gof)(x) = x, \text{ i } (fog)(x) = x$$

La funció inversa de f es denota f^{-1}.

El logaritme i les seves propietats

El logaritme sobre la base de ($a > 0$) d'un nombre real positiu, x, es calcula de la manera següent:

$$\log_a x = y \qquad \text{si} \qquad x = a^y$$

i té les propietats següents:

1. $\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0.$
2. El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
3. El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base: $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$.
4. El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador: $$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \, .$$
5. És possible relacionar logaritmes de diferents bases, a i b, amb aquesta fórmula: $$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_b x \, .$$

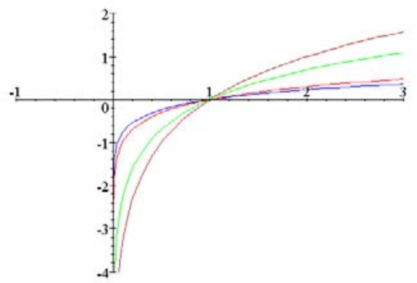
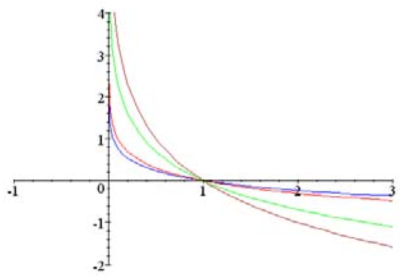
Les funcions logarítmiques

La funció logaritme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) és la funció inversa de la funció exponencial de base a

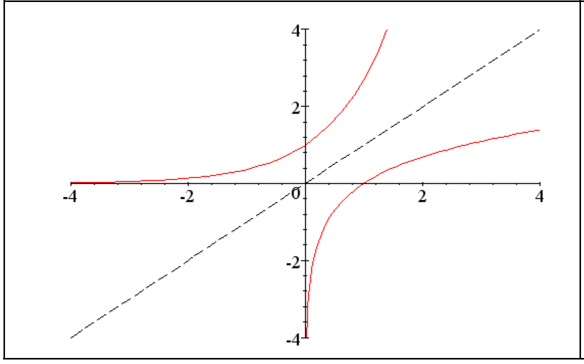
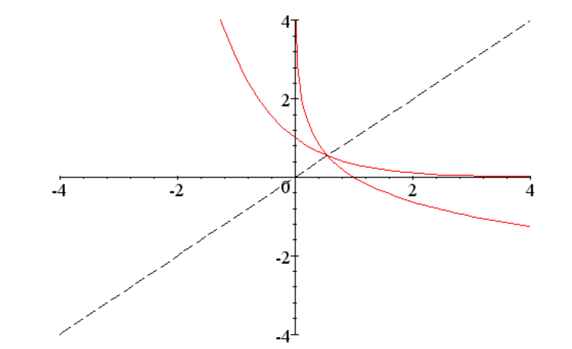
$$y = \log_a x \text{ si } \qquad x = a^y$$

Les seves característiques són:

Domini: $(0, +\infty)$.
Imatge: $(-\infty, +\infty)$.
No tenen ni màxims ni mínims.
Passen pel punt (1,0).

<table>
<tr><th>$a > 1$</th><th>$a < 1$</th></tr>
<tr><td>Funció creixent
si x tendeix a 0, la funció tendeix a $-\infty$
si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$
</td><td>Funció decreixent
si x tendeix a 0, la funció tendeix a $+\infty$
si x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $-\infty$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">les gràfiques de $\log_a x$ i $\log_{1/a} x$ són simètriques respecte de l'eix X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Una de les funcions logarítmiques més importants és la x, funció logaritme neperià, és a dir, funció logarítmica la base de la qual és el nombre $e = 2{,}71828182845904523...$</td></tr>
</table>

Relació entre les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques

Les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques de la mateixa base són simètriques respecte de la recta $y = x$	
$a > 1$	$a < 1$
	

Les equacions logarítmiques

Una equació logarítmica és una equació amb funcions logarítmiques. Per resoldre una equació logarítmica s'han d'agrupar al màxim els logaritmes per substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. Per exemple, els passos per resoldre:

$$2 \log x - \log (x - 16) = 2$$

són:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = 2$$

$$\log x^2 - \log (x - 16) = \log \frac{x^2}{x-16}$$

$$\log \frac{x^2}{x-16} = \log 100$$

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

les solucions són $x = 20$ i $x = 80$

De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmics, convertint-los en sistemes d'equacions lineals, manipulant convenientment els logaritmes. Per exemple, els passos per resoldre:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

són:

$$\log x + \log y = \log(x \cdot y) = 3 = \log 1000$$

així, doncs, s'ha de resoldre:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

les solucions de la qual són $x = 40$ i $y = 25$, o bé, $x = 25$ i $y = 40$.

Els orígens del logaritme

L'origen del concepte de *logaritme* es troba en un problema de matemàtica aplicada: es tracta de simplificar la pesada tasca dels calculadors, excessivament complicada quan es tracta de fer multiplicacions, divisions, fins i tot potències o extracció d'arrels, en problemes relacionats en principi amb l'agrimensura i l'astronomia, en particular en les seves aplicacions a la navegació.
Arquímedes ja té una idea fonamental que generaria els logaritmes, idea que trobem en la seva obra *Arenari*. Ara bé, no és fins a John Napier quan s'aprofita aquesta idea llançada per Arquímedes. John Napier (del nom del qual procedeix el qualificatiu *neperià*) va néixer el 1550. Procedent de la baixa noblesa escocesa, va mostrar tota la seva vida un esperit curiós i dinàmic, a pesar d'una vida allunyada dels centres culturals de l'època. La introducció dels logaritmes no és la seva única aportació, ja que va escriure també un text sobre les equacions i va imaginar a més un sistema de càlcul per mitjà de regletes graduades (rabdologia).
En 1614 va publicar el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, en què posa en relació una progressió geomètrica amb una progressió aritmètica. La primera és la de les distàncies recorregudes amb velocitats proporcionals a elles mateixes; la segona, la de les distàncies recorregudes amb velocitat constant; aquestes són llavors els "logaritmes" de les primeres (el neologisme és del propi Napier). La unitat triada és 10^7, i l'obra comprèn una taula de logaritmes de sinus, amb els angles variant de minut en minut. En 1619 va aparèixer una segona obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, on l'autor explica com calcular els logaritmes. Aquesta obra és pòstuma, ja que Napier va morir el 1617.
Mentrestant, un eminent matemàtic de Londres, Henry Briggs, havia descobert la importància d'aquests treballs i va viatjar a Escòcia per trobar-se amb l'autor. Reprenent la idea fonamental, però considerant una progressió geomètrica simple, la de les potències de 10, publica el 1617 una primera taula, amb 8 decimals. El logaritme d'un nombre x és, per tant, definit com l'exponent n de 10, tal que x sigui igual a 10 elevat a n.
Van seguir altres taules que van permetre la difusió del mètode, en particular en el continent. En realitat, la idea surava a l'aire; un col·laborador de Kepler, el suís Bürgi, proposava en la mateixa època, per simplificar els càlculs que havia de fer, fer correspondre una progressió aritmètica (en nombres vermells) i una progressió geomètrica (en nombres negres); tanmateix, els seus treballs no van ser publicats fins a 1620.
La difusió en el continent europeu d'aquesta nova noció es deu sobretot a les taules publicades pel flamenc Adrien Ulacq, el 1628, reprenent les taules de Griggs. L'objectiu era fer un tractat de càlcul pràctic, en particular per ús dels agrimensors. Les primeres taules van ser seguides per unes altres, cada cop més precises, i s'hi esmenta que la seva principal aplicació són els càlculs trigonomètrics.
Els logaritmes seran de gran ajuda per al naixement de la física matemàtica a les darreries del segle XVII. Així passa amb *el Discurs sobre la causa de la gravetat* de Huygens, i també amb els diferents treballs sobre la pressió atmosfèrica, en particular els de Mariotte.
L'ús dels logaritmes, sorgits d'una idea de fet molt simple, continuen sent un instrument tal vegada modest, però malgrat tot essencial pel coneixement científic.

John Napier

Què és una funció exponencial i quines en són les característiques?

> Una funció exponencial es defineix a partir de les potències dels números. La seva expressió és de la forma a^x , essent $a > 0$. El domini d'aquestes funcions són tots els nombres reals i la seva imatge són tots els nombres positius. La funció és sempre creixent si $a > 1$, i sempre decreixent si
> $a < 1$. Aquestes funcions no tenen màxims ni mínims. Les funcions exponencials resulten molt útils en l'estudi de processos de creixement/decreixement de poblacions, per exemple.

La funció exponencial de base a es defineix a partir de les potències de nombres. Així, per exemple, la funció exponencial de base 3 és igual a

$$g(x) = 3^x$$

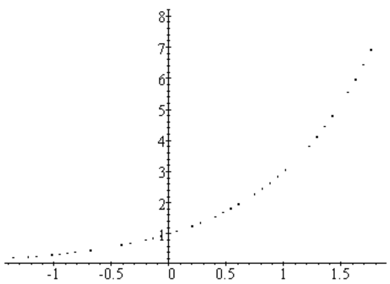
En aquest cas, doncs,

$g(0) = 3^0 = 1$, $g(1) = 3^1 = 3$, $g(2) = 3^2 = 9$, $g(-1) = 3^{-1} = 1/3$, $g(1/2) = 3^{1/2} = \sqrt{3}$, etc.

En general, si a és un nombre positiu, la funció exponencial de base a és igual a

$$a^x$$

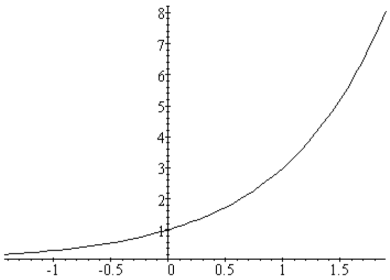
Si representem alguns dels punts de la gràfica de la funció $g(x) = 3^x$ obtindrem una gráfica com aquesta:
És evident que qualsevol valor de la funció és sempre positiu perquè la potència d'un nombre sempre és



un nombre positiu. Així, doncs, la gràfica d'una funció exponencial sempre es representarà per sobre de l'eix X.
És a dir:

- El domini de qualsevol funció exponencial és $(-\infty,+\infty)$.
- La imatge de qualsevol funció exponencial ($a \neq 1$) és $(0,+\infty)$.

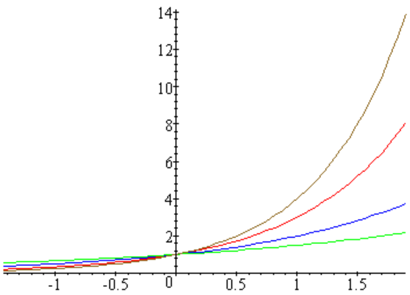
Observant la representació anterior, no és difícil deduir la gràfica de la funció exponencial de base 3:

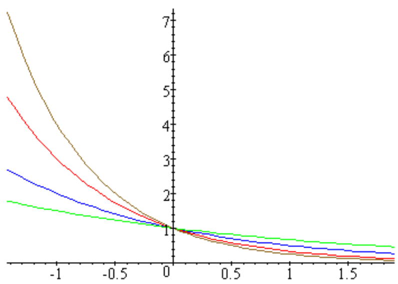


Podem observar que la gràfica d'una funció exponencial sempre conté el punt (0,1), i la funció sempre és positiva. A més, també es pot afirmar que:

- Si la base a és més gran que 1:
    - si $x < y$, llavors, $a^x < a^y$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és creixent. A més, el creixement és més gran com més gran sigui la base;
    - com més petita és la x, el valor de y més s'acosta a 0, encara que mai arriba a assolir-lo. Això es pot comprovar en les gràfiques de l'esquerra: més a l'esquerra de, posem per cas, $x = -1$, el valor de les funcions s'aproxima molt ràpidament a 0, però mai és 0.
- Si la base a és menor que 1:
    - si $x < y$, llavors, $a^x > a^y$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és decreixent. A més, el decreixement és més gran com més petita sigui la base;
    - com més gran és la x, el valor de y més s'acosta a 0, sense arribar a assolir-lo a mai. Això es pot comprovar en les gràfiques de la dreta: més a la dreta de, posem per cas, $x = 1$, el valor de les funcions s'aproxima ràpidament a 0, però mai no és 0.
- Evidentment, si la base és 1, la funció és una constant ja que $1^x = 1$.

Es pode comprovar aquests fets en aquestes gràfiques: la gràfica de l'esquerra conté les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $(3/2)^x$; l'altra gràfica conté les gràfiques de $(1/4)^x$, $(1/3)^x$, $(1/2)^x$ i $(2/3)^x$.





Podem observar que les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $(3/2)^x$; són simètriques, respectivament de $(1/4)^x$, $(1/3)^x$, $(1/2)^x$ i $(2/3)^x$, cosa que és evident, ja que,

$$(1/a)^x = a^{-x}$$

La funció exponencial és una de les funcions més importants per les seves aplicacions, ja que és capaç de descriure una gran varietat de fenòmens, especialment, els de creixement; de vegades, aquestes funcions també es denominen *funcions de creixement*, i s'apliquen a fets tan importants com el creixement d'una població de bacteris en un laboratori, el creixement demogràfic del nombre d'animals, la manera com decreix la matèria radioactiva (creixement negatiu), la raó amb la qual un obrer aprèn un cert procés, la velocitat amb què una malaltia contagiosa es dissemina amb el temps. Les funcions exponencials també són útils pel càlcul de l'interès obtingut en un compte bancari, és a dir, descriuen l'augment monetari a un interès compost, etc.

Una de les funcions exponencials essencials és la que té com base el nombre e, que, com sabem, és un nombre irracional els primers decimals del qual són: 2,71828182845904523... Quan no es diu el contrari, s'entén per funció exponencial la funció e^x.

Què és una equació exponencial i com es resol?

> Una equació exponencial és una equació amb funcions exponencials. Per resoldre una equació exponencial s'han d'agrupar al màxim les potències per substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials, convertint-los en sistemes d'equacions lineals, manipulant convenientment les potències.

Una equació exponencial és una equació amb funcions exponencials. Per exemple, una equació exponencial pot ser: $2^{x+1} = 2^2$. En aquest cas, la resolució és molt senzilla, observant que les bases són

iguals i, per tant, que els exponents han de ser iguals; és a dir, $x + 1 = 2$, per la qual cosa $x = 1$. Efectivament, $2^{1+1} = 2^2$.
L'equació pot ser més complicada. Per exemple:

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

En aquest cas, s'ha d'intentar treure 7^x com a factor comú, recordant les propietats de les potències:

$$7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$$

$$7^x\,(1+ 7 + 7^2) = 2793$$

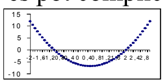
s'operen els elements entre parèntesis:

$$7^x \cdot 57 = 2793$$

per tant:

$$7^x = 2793/57 = 49$$

Es evident que $x = 2$.
Fins i tot es pot complicar més:



En aquest cas s'ha d'intentar, en primer lloc, eliminar el denominador, multiplicant-ho tot per 5^{x-2}:

$$5^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$$

operant

$$5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

es pot reescriure de la manera següent:

$$5^{2x-4} \cdot 5 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

agrupant

$$5(5^{x-2})^2 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Es tracta, doncs, d'una equació de segon grau, la incògnita del qual és $5^{x-2} = y$, és a dir:

$$5y^2 - 2y - 3 = 0$$

Les solucions són: $y = 1$, $y = -3/5$. Aquesta última és impossible, ja que 5^{x-2} no pot ser negatiu. Per l'altra solució obtenim que:

$$5^{x-2} = 1 = 5^0$$

per tant, $x - 2 = 0$; és a dir, $x = 2$.
Així, doncs, per resoldre una equació exponencial, s'han d'agrupar al màxim les potències per intentar substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica.
De la mateixa manera, també es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials, convertits en sistemes d'equacions lineals en manipular convenientment les potències. Per exemple, per resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

es pot reescriure's la primera equació:

$$5^x = 5^y \cdot 5^4 \quad \rightarrow \quad 5^{x-y} = 5^4$$

i també la segona equació:

$$2^x \cdot 2^y = 2^8 \quad \rightarrow \quad 2^{x+y} = 2^8$$

és fàcil substituir el primer sistema per aquest:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

la solució del qual és $x = 6$ i $y = 2$

Què és la composició de funcions i la inversa d'una funció?

> La composició de la funció f amb la funció g és una altra funció, designada gof, que a cada element del domini hi fa correspondre $g(f(x))$. Dues funcions, f i g, es diu que són inverses l'una de l'altra si $(gof)(x) = x$, i $(fog)(x) = x$. La funció inversa de f es denota f^{-1}.

Donades dues funcions f i g, es pot definir la funció f composta amb g, o composició de f amb g, gof, de la manera següent:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

S'ha de tenir en compte que per perquè es pugui calcular la composició de f amb g en un punt $(a, f(a))$, ha de pertànyer al domini de g.
Per exemple, si $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x$, llavors:

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$
$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2$

Es pot observar en aquest exemple que la composició de funcions no és commutativa, és a dir, *gof* no sol ser igual a *fog*; dit d'una altra manera, no és el mateix la composició de *f* amb *g* que la composició de *g* amb *f* .

A partir del concepte de *composició de funcions* es pot definir el concepte de *funció inversa* d'una altra funció.

Si *f* és una funció, es diu que *g* és la funció inversa de *f* si

$(gof)(x) = x$ per x pertanyent al domini de f

i $(fog)(x) = x$ per x pertanyent al domini de g

S'ha de complir, per tant, que el domini de *f* sigui igual a la imatge de *g*.

Vegem què significa aquest fet. Si, per exemple, *f* és una funció tal que $f(3) = 5$, sabem que s'ha de complir:

$(gof)(3) = 3$ això és $(gof)(3) = g(f(3)) = g(5) = 3$

És a dir, si la imatge del 3 en la funció *f* és 5, llavors, la imatge del 5 en la funció *g* és el 3. I així per qualsevol valor de *f* . En definitiva, *g* és la inversa de *f* si es compleix el següent:

si $f(x) = y$ llavors $g(y) = x$

La funció inversa de *f* es denota f^{-1}. Finalment, es pot demostrar que si una funció té inversa, ambdues funcions han de ser bijectives.

Què és el logaritme i quines en són les propietats?

El logaritme de base *a* d'un nombre és l'operació inversa de la potència de base *a*. Per això, el logaritme només es pot calcular per nombres positius i, a més, la base només pot ser positiva. Les propietats dels logaritmes es deriven de les propietats de les potències.

El logaritme de base *a* ($a > 0$) d'un nombre real positiu, *x*, es calcula de la manera següent:

$\log_a x = y$ si $x = a^y$

$\log_a$ indica precisament aquesta operació: el logaritme en base *a*. Per exemple, el logaritme de base 2 de 8 és igual a 3 perquè $2^3 = 8$; és a dir:

$\log_2 8 = 3$ perquè $2^3 = 8$.

Altres exemples, amb diferents bases:

$\log_3 81 = 4$ perquè $3^4 = 81$
$\log_5 25 = 2$ perquè $5^2 = 25$
$\log_7 49 = 2$ perquè $7^2 = 49$

Les propietats del logaritme es deriven de manera senzilla de les propietats de les potències, per la relació entre ambdues operacions, sigui quin sigui el valor de $a > 0$, i són les següents:

1. $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$
2. El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes:
   $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ ja que
   $a^{\log_a (x\cdot y)} = x\cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_b y} = a^{\log_a x + \log_a y}$
3. El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:
   $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ ja que
   $a^{\log_a (x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y\cdot \log_a x}$
4. El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador:
   $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ ja que
   $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$
5. És possible relacionar logaritmes de diferents bases, *a* i *b*, amb aquesta fórmula:
   $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_b x$ ja que
   si denominem $y = \log_a x$, $z = \log_b x$, aleshores

$x = a^y = b^z$

a més, com $b = a^{\log_a b}$ podem dir que

$a^x = \left(a^{\log_a b}\right)^y = a^{y \cdot \log_a b}$ és a dir

$\log_a x = y = z \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \log_a b$, i d'aquí es dedueix la propietat enunciada.

Què són les funciones logaritme i quines són les seves característiques?

> La funció logaritme de base a és la funció inversa de la funció exponencial de base a. La seva expressió és de la forma $\log_a x$, essent $a > 0$. El domini d'aquestes funcions són tots els nombres reals positius, i la seva imatge són tots els nombre reals. La funció és sempre creixent si $a > 1$, i sempre decreixent si $a < 1$. Aquestes funcions no tenen màxims ni mínims. Les funcions logarítmiques són molt útils en l'estudi de processos de descomposició radioactiva, per exemple.

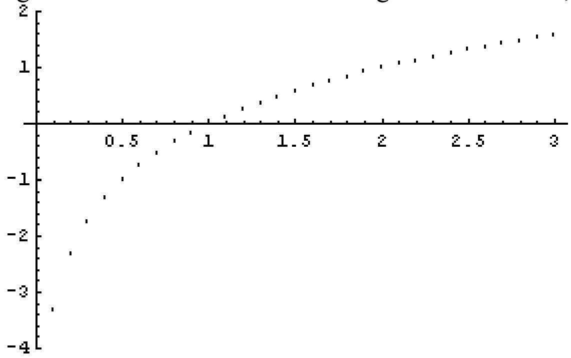
La funció logaritme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) és la funció inversa de la funció exponencial de base a. És a dir,

$y = \log_a x$ si $x = a^y$

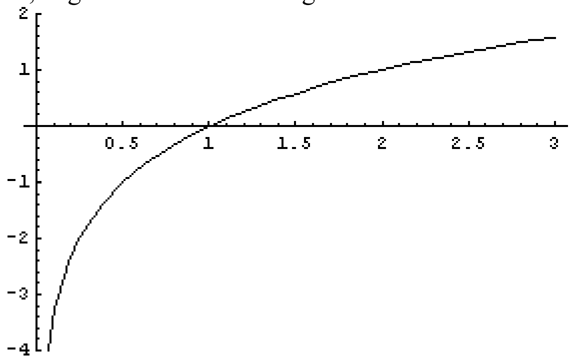
En altres paraules, la funció logaritme de base a és la funció inversa de la funció exponencial de base a. Així, doncs:

- El domini de la funció logaritme de base a és igual a $(0,+\infty)$, ja que correspon a la imatge de la funció exponencial de base a.
- La imatge de la funció logaritme de base a és igual a tots els nombres reals, és a dir, $(-\infty,+\infty)$, ja que aquest és el domini de la funció exponencial de base a.

Si es fa la gràfica d'una taula de la funció logaritme en base 2, s'obtindrà un conjunt de punts com aquest:



Així, doncs, la gràfica de la funció logaritme en base 2 en el domini [0,3] és:



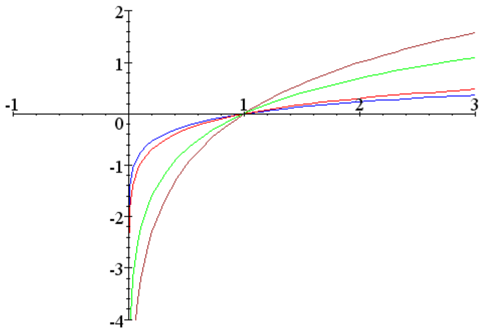
Podem observar que la gràfica d'una funció logarítmica sempre conté el punt (1,0). A més, també es pot afirmar:

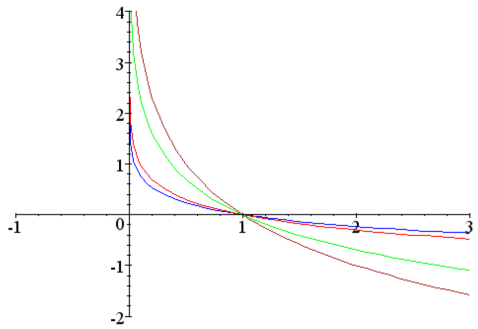
- Si la base a és més gran que 1
  - si $x < y$, llavors, $\log_a x < \log_a y$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és creixent. A més, no hi ha límit per al creixement de la funció: quan x augmenta, la *i* també augmenta. Aquest creixement es més gran com més petita és la base;

- com més a prop de 0 es troba la x, el valor de $\log_a x$ és menor; per això es diu que la funció $\log_a x$ tendeix a $-\infty$ quan la x tendeix a 0. Això es pot comprovar en les gràfiques de l'esquerra: més a l'esquerra de, posem per cas, $x = 1$, el valor de les funcions decreix molt ràpidament, sense límit.

- Si la base a és menor que 1:
    - si $x < y$, llavors, $\log_a x > \log_a y$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable; dit d'una altra manera, la funció és decreixent. A més, no hi ha límit per al decreixement de la funció. Aquest decreixement és més gran com més gran és la base;
    - com més gran és la x, el valor de y més s'acosta a 0, sense arribar a assolir-lo mai. Això es pot comprovar en les gràfiques: més a la dreta de, posem per cas, $x = 1$, el valor de les funcions s'aproxima ràpidament a 0, però mai no és 0.

Es poden comprovar aquests fets en aquests gràfics: el gràfic de l'esquerra conté les gràfiques de $\log_2 x$, $\ln x$, $\log x$, $\log_{20} x$; l'altre gràfic conté les gràfiques dels logaritmes amb les bases inverses de les anteriors (és a dir, les bases són: ½, $1/e$, 1/10 i 1/20). Cal destacar que $\ln x$ és el logaritme la base del qual és el nombre e, i es denomina *logaritme neperià*, mentre que $\log x$ (sense indicar la base) significa que es tracta del logaritme de base 10.





Podem observar que les gràfiques de $\log_a x$ i $\log_{1/a} x$ són simètriques respecte de l'eix X; això és així perquè:

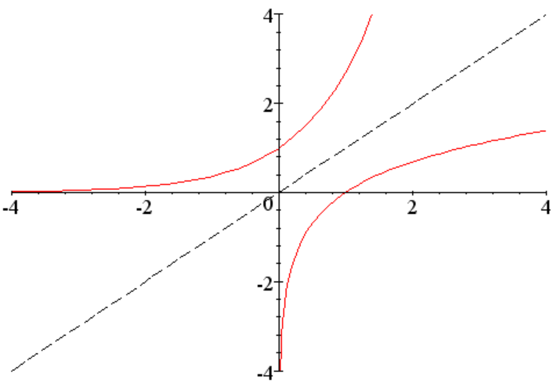
$$\log_{1/a} x = -\log_a x$$

Les funcions logarítmiques són molt importants per l'estudi de molts fenòmens físics, per exemple, la descomposició radioactiva.

Quina és la relació entre les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques?

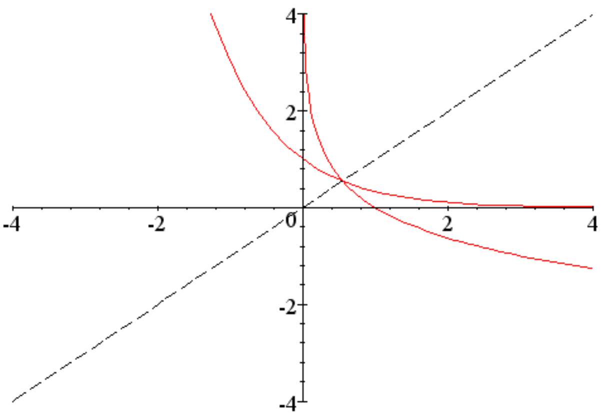
> Les gràfiques de la funció logarítmica de base a i la funció exponencial de la mateixa base són simètriques respecte de la recta $y = x$. De fet, si f i g són dues funcions qualssevol, inverses una de l'altra, llavors, les seves gràfiques són simètriques respecte de la recta $y = x$. Això és així perquè la funció inversa intercanvia els papers de la x i la y de la funció original.

Hi ha una íntima relació entre les gràfiques d'una funció exponencial i una funció logarítmica amb la mateixa base. Per exemple, si es considera la funció logaritme neperià, $\ln x$, i la funció e^x, les seves gràfiques són:



La gràfica d'una funció s'ha d'analitzar amb precaució perquè sempre és aproximada i, per això, és possible malinterpretar-la. En el cas deFunció $f(x) = 3$, el pendent de la qual és 0, també denominada *funció constant.* aben unint-se als eixos, la primera a l'eix X, la segona a l'eix Y, cosa impossible per la mateixa definició d'aquestes funcions.

Es pot observar que ambdues funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$. És a dir, si es doblega el paper amb les dues funcions per la recta $y = x$, llavors ambdues rectes coincidiran després de plegat. De la mateixa manera, si les funcions tenen la base menor que 1, passa exactament el mateix; per exemple, les funcions $(1/3)^x$ i $\log_{1/3}x$ tenen aquestes gràfiques:



Es pot observar que les funcions són també simètriques respecte de la recta $y = x$.
Aquest fet no és solament aplicable a aquestes funcions. Si dues funcions qualssevol són inverses una de l'altra, les seves gràfiques compleixen aquesta propietat: són simètriques respecte de la recta $y = x$. Això és fàcil d'explicar, ja que la inversa d'una funció intercanvia els papers de la x i la y. Per tant, la funció inversa ha de tenir la mateixa forma que la funció original, llevat que els eixos X i Y s'han d'intercanviar.

Què és una equació logarítmica i com es resol?

> Una equació logarítmica és una equació amb funcions logarítmiques. Per resoldre una equació logarítmica han d'agrupar-se al màxim els logaritmes, per substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, poden resoldre's sistemes d'equacions logarítmics, convertint-los en sistemes d'equacions lineals, manipulant convenientment els logaritmes.

Una equació logarítmica és una equació en la qual apareixen funcions logarítmiques. Per resoldre-la, s'han d'aplicar les propietats dels logaritmes convenientment, per agrupar les expressions i, així, poder substituir-la per una equació lineal o quadràtica. Per exemple, per resoldre:

$$2 \log x - \log (x - 16) = 2$$

s'han d'agrupar els termes de l'esquerra. Es compleix que $2 \log x = \log x^2$, per tant:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = 2$$

aplicant la propietat del logaritme del quocient:

$$\log x^2 - \log (x - 16) = \log \frac{x^2}{x-16}$$

i ja que $2 = \log 100$, s'arriba a l'equació:

$$\log\frac{x^2}{x-16} = \log 100$$

és a dir:

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

Per tant, es tracta de resoldre $x^2 - 100x + 1600 = 0$; les solucions són $x = 20$ i $x = 80$, i observem que ambdues són solució de l'equació inicial.

També es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques intentant sempre agrupar els logaritmes per convertir les equacions inicials en equacions lineals o quadràtiques. Per exemple:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

La primera equació ja és lineal; intentem transformar la segona en una equació lineal:

$$\log x + \log y = \log(x \cdot y) = 3 = \log 1000$$

per tant, s'ha de substituir l'equació logarítmica per:

$$x \cdot y = 1000$$

així, doncs, s'ha de resoldre:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

les solucions de la qual són $x = 40$ i $y = 25$, o bé, $x = 25$ i $y = 40$.

Exercicis

1. Troba una funció exponencial del tipus $f(x) = a^x$ que compleixi que $f(6) = 64$.

2. Quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents: $f(x) = 11^x$, $g(x) = 13^x$, $h(x) = 0.1^x$ i $t(x) = 0.3^x$? Ordena-les de major creixement a major decreixement.

3. Considera aquestes funcions: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x + 1$ i $f(x) = e^x$. Fes aquestes composicions:
   a. $fog(x)$
   b. $gof(x)$
   c. $foh(x)$
   d. $hogof(x)$

4. Calcula aquests logaritmes sense usar la calculadora:
   $\log_2 32$, $\log_9 81$, $\log_5 5^3$, $\log_3 \sqrt{243}$

5. Troba una funció logarítmica del tipus $f(x) = \log_a x$ que compleixi que $f(125) = 3$.

6. Quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents: $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_{0.2} x$, $h(x) = \log_{13} x$ i $t(x) = \log_{0.1} x$? Ordena-les de major creixement a major decreixement.

7. Troba la funció inversa de $f(x) = e^{3x}$ i $g(x) = \ln(4x+3)$.

8. Troba la x que compleix aquestes igualtats:
   $\log_4 x = 4$, $\log_x 27 = x$, $\log_{1/2} 4 = x$, $\log_3 \sqrt{x} = \dfrac{3}{2}$

9. Resol aquestes equacions pas a pas:
   a. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$
   b. $2\log 10x - \log(12 - 4x) = 2$

10. Resol aquestes equacions logarítmiques i exponencials:
    a. $\ln x + \ln(x-1) = 0$
    b. $\log x - \log x^2 = \log 7$

Solucions

1. S'ha de complir que $f(6) = a^6 = 64$, per tant, $a = 2$.

2. $f(x) = 11^x$ i $g(x) = 13^x$ són creixents, perquè la seva base és major que 1. Les altres són decreixents. De major creixement a major decreixement l'ordre és aquest: $g(x) = 13^x$, $f(x) = 11^x$, $t(x) = 0.3^x$ i $h(x) = 0.1^x$.

3.
   a. $fog(x) = 18x^2 + 3x$
   b. $gof(x) = 6x^2 - 9x + 4$
   c. $foh(x) = 2(e^x)^2 - 3e^x + 1$
   d. $hogof(x) = e^{6x^2-9x+4}$

4.
$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5$$
$$\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$$
$$\log_5 5^3 = 3$$
$$\log_3 \sqrt{243} = \log_3 243^{1/2} = \log_3 (3^5)^{1/2} = \log_3 3^{5/2} = \frac{5}{2}$$

5. $f(x) = \log_3 x$.

6. Només són creixents $f(x) = \log_3 x$ i $h(x) = \log_{13} x$. De major creixement a major decreixement: $f(x) = \log_3 x$, $h(x) = \log_{13} x$, $t(x) = \log_{0.1} x$ i $g(x) = \log_{0.2} x$.

7. $f^{-1}(x) = \ln x^{1/3}$ i $g^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 3}{4}$.

8. $\log_4 x = 4$ $\quad x = 256$
   $\log_x 27 = x$ $\quad x^x = 27$ per tant $x = 3$
   $\log_{1/2} 4 = x$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ per tant, $x = -2$
   $\log_3 \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ $\quad \sqrt{x} = 3^{3/2}$ per tant, $x = 3^3$

9.

a. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$

$$3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$$
$$\left(3^x\right)^2 - 5 \cdot 3^x - 36 = 0$$

es tracta d'una equació de 2n grau amb incògnita 3^x, les solucions de la qual són

9 i –4. Aquesta darrera no és possible. Per tant, $3^x = 9 = 3^2$. Així, $x = 2$, com es pot comprovar fàcilment.

b. $2\log 10x - \log(12 - 4x) = 2$

Aplicant les diverses propietats dels logaritmes:

$\log 100x^2 - \log(12 - 4x) = \log 10^2$

$\log \frac{100x^2}{12-4x} = \log 10^2$

per tant,

$\frac{100x^2}{12-4x} = 100$

$\frac{x^2}{12-4x} = 1$

$x^2 = 12-4x$
$x^2 + 4x - 12 = 0$

les solucions de la qual són $x = 2$, $x = -6$. La solució $x=-6$ no és possible perquè $\log 10x = \log -60$ que es una expressió errònia.

en canvi $x=2$, sí que es una solució correcta:

$2\log 10\cdot2 - \log(12 - 4\cdot2) = 2$
$2\log 20 - \log 4 = 2$

10.

h. $\ln x + \ln(x-1) = 0$
$\ln(x(x-1)) = 0$
$x(x-1)=1$
$x^2 - x - 1 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

i. $\log x - \log x^2 = \log 7$
$\log(x/x^2)=\log 7$
$x/x^2 = 7$
$x = 7x^2$
$x = 1/7$

Les funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques són les funcions obtingudes a partir de les raons trigonomètriques d'un angle. En general, l'angle s'expressa en radians.

Aquesta taula recull les principals característiques de les diferents funcions trigonomètriques:

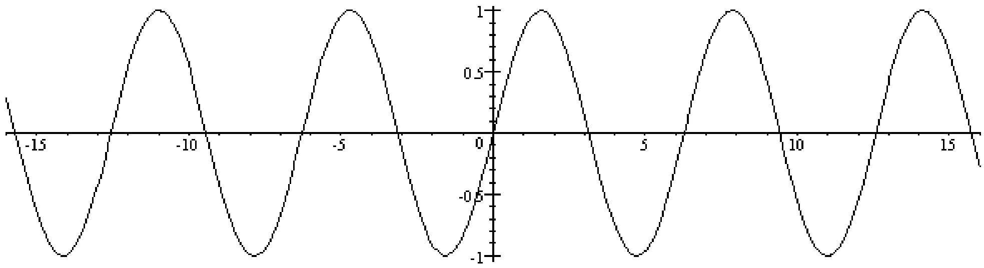
	funcions trigonomètriques					
	sinus sin *x*	cosinus cos *x*	tangent tg *x* (o tan *x*)	secant sec *x*	cosecant cosec *x*	cotangent cotg *x*
Domini	Tots els reals	Tots els reals	Els reals excepte $\pi/2 + k\pi$, on k és un enter	Els reals excepte $k\pi$, on k és un enter	Els reals excepte $\pi/2 + k\pi$, on k és un enter	Els reals excepte $k\pi$, on k és un enter
Imatge	[–1,1]	[–1, 1]	Tots els reals	Tots els reals menys (–1,1)	Tots els reals menys (–1,1)	Tots els reals
Punts de tall	$(k\pi,0)$ on k és un nombre enter	$((2k + 1)\pi/2,0)$ on k és un nombre enter, i (0,1)	$(k\pi, 0)$ on k és un nombre enter	(0,1)	cap	$((2k + 1)\pi/2,0)$ on k és un nombre enter
Creixement	decreixent: $((4k + 1)\pi/2,(4k + 3)\pi/2)$ creixent: $((4k + 3)\pi/2,(4k + 5)\pi/2)$	decreixent: $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ creixent: $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$	sempre creixent	creixent: $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ decreixent: $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$	creixent: $((4k + 1)\pi/2,(4k + 3)\pi/2)$ decreixent: $((4k + 3)\pi/2,(4k + 5)\pi/2)$	sempre decreixent
Màxims	$((4k + 1)\pi/2,1)$ on k és un nombre enter	$(2k\pi, 1)$ on k és un nombre enter.	no en té	$((4k + 3)\pi/2, –1)$ on k és un nombre enter	$((2k + 1)\pi,–1)$ on k és un nombre enter	no en té
Mínims	$((4k + 3)\pi/2, –1)$ on k és un nombre enter	$((2k + 1)\pi,–1)$ on k és un nombre enter.		$((4k + 1)\pi/2,1)$ on k és un nombre enter	$(2k\pi,1)$ on k és un nombre enter	

Les funcions inverses de les funcions sinus, cosinus i tangent són les funcions arc sinus, arc cosinus i arc tangent. Les gràfiques d'aquestes funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$, tal com passa amb totes les funcions inverses.

- La funció inversa de la funció sinus: només s'utilitzen els valors dels angles entre $[–\pi/2, \pi/2]$. Es designa amb el símbol arc sin.
- La funció inversa de la funció cosinus: només s'utilitzen els valors dels angles entre $[0, \pi]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc cos.
- La funció inversa de la funció tangent es denomina arc tangent: només s'utilitzen els valors dels angles entre $(–\pi/2, \pi/2)$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc tan.

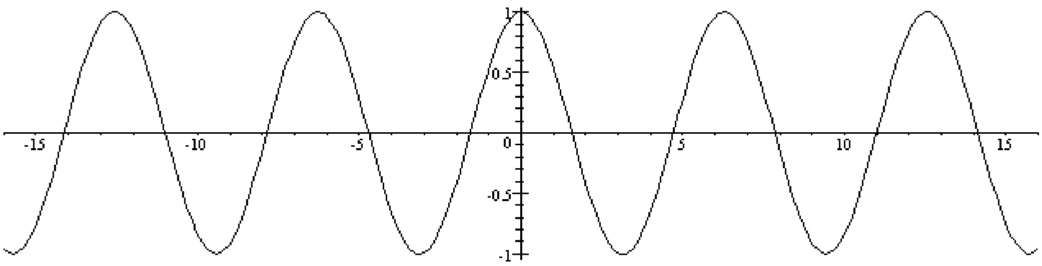
Gràfiques de les funcions trigonomètriques

Funció sinus



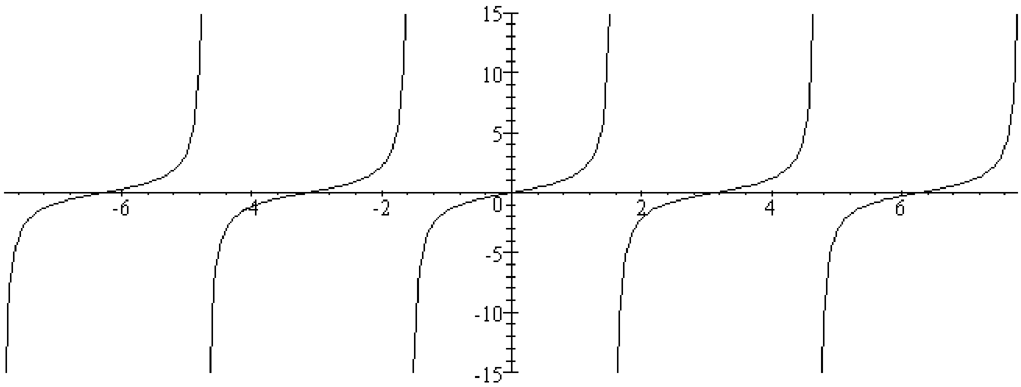
$y = \sin x$

Funció cosinus



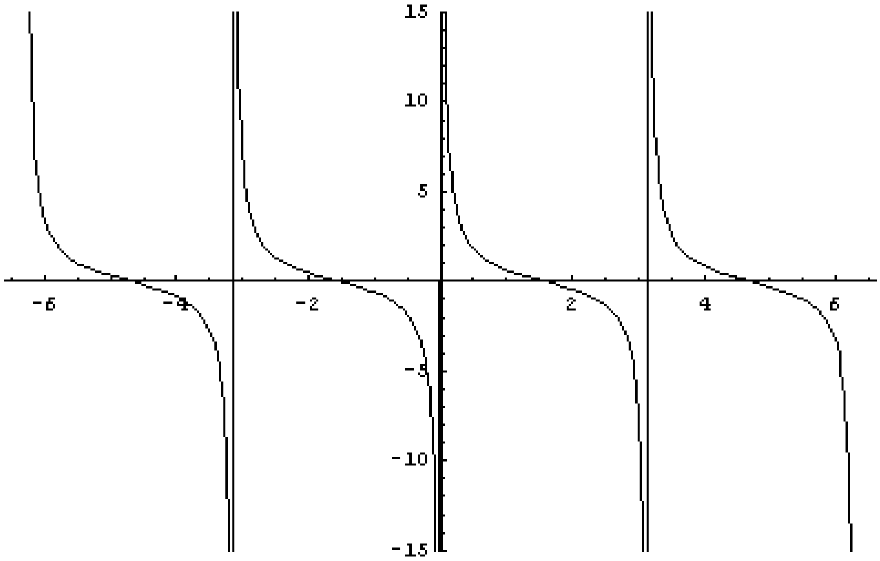
$y = \cos x$

Funció tangent



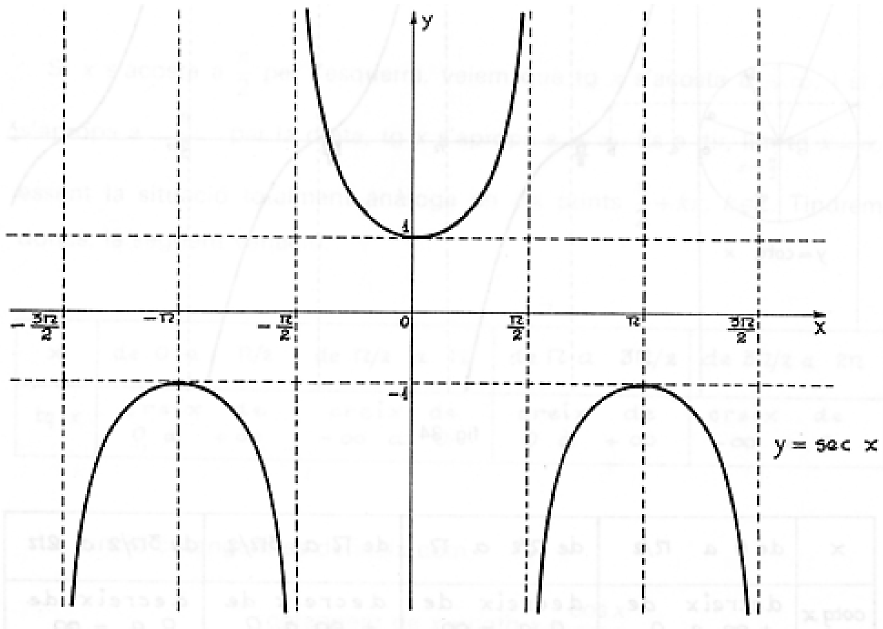
$y = \text{tg } x$

Funció cotangent

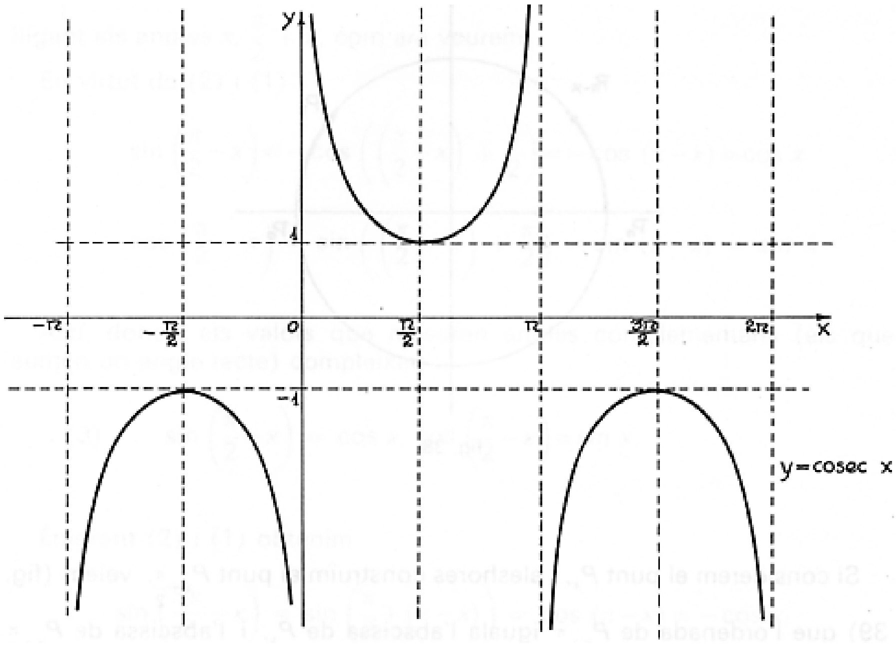


y = cotg *x*

Funció secant

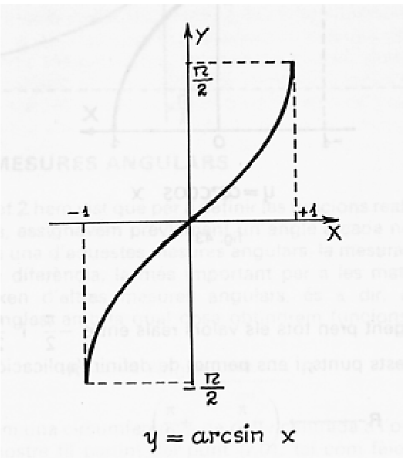


Funció cosecant

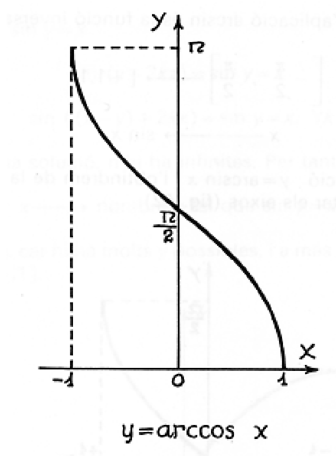


Funcions inverses

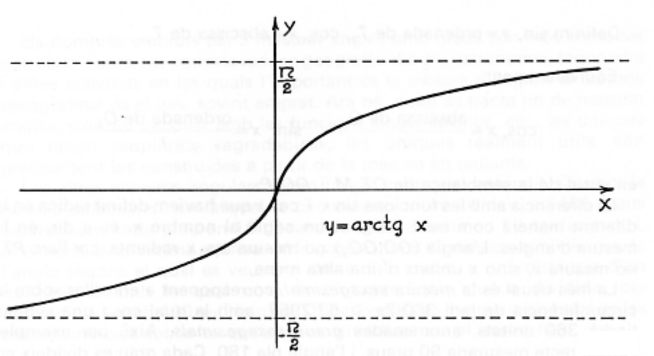
funció arc sinus



funció arc cosinus



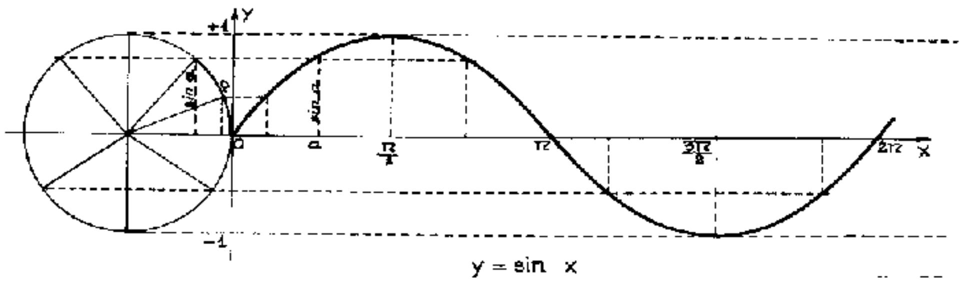
Funció arc tangent



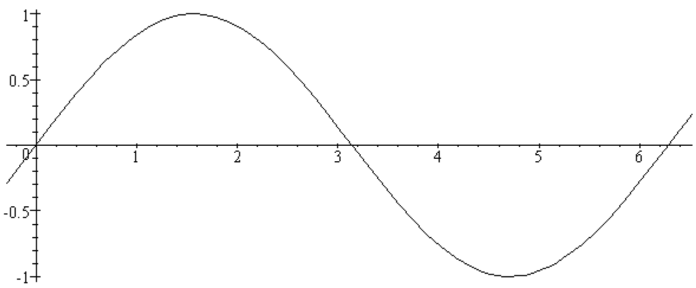
Què és la funció sinus i quines en són les característiques?

> Una funció trigonomètrica és una funció associada a una raó trigonomètrica. Les més importants són la funció sinus, la funció cosinus i la funció tangent. La funció sinus és aquella funció que a cada valor (en radians) hi fa correspondre el seu sinus. La funció sinus és una funció periòdica, de període 2π. El seu domini són tots els nombres i la seva imatge és [–1,1].

Les funcions circulars o trigonomètriques són les funcions associades a les raons trigonomètriques; les més importants són la funció sinus, la funció cosinus i la funció tangent. La variable d'aquestes funcions circulars sempre s'expressa en radians i no en graus sexagesimals.
La funció sinus és aquella funció que associa a un angle en radians, el seu sinus; la gràfica d'aquesta funció es construeix d'aquesta manera, quan l'angle es troba entre 0 i 2π:



Cada valor del sinus en la circumferència unitat de l'esquerra es traslllada a la seva posició corresponent en el valor de l'angle en l'eix d'abscisses. Així, per exemple, $\sin \pi/2 = 1$, o $\sin \pi = -1$; si α és del primer quadrant, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.
D'aquesta manera s'obté la gràfica següent:



Algunes de les característiques fonamentals de la funció sinus en l'interval $[0, 2\pi)$ són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$.
- Els punts de tall són $(0,0)$ i $(\pi,0)$.
- És creixent en $(0, \pi/2)$ i $(\pi,3\pi/2)$ i decreixent en $(\pi/2, \pi)$ i $(3\pi/2, 2\pi)$.
- Té un màxim en el punt $(\pi/2,1)$ i un mínim en el punt $(3\pi/2, -1)$.

Sabem que per a angles més grans de 2π n'hi ha prou de recórrer a la fórmula:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

i per a angles negatius:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

D'aquesta manera, es pot estendre la funció sinus a tot nombre real; la gràfica en un interval major seria com una ona i se sol denominar sinusoïdal. Observem que la gràfica repeteix els valors de la funció cada 2π; és a dir, n'hi ha prou de conèixer els valors de la funció en l'interval $[0, 2\pi)$ per a conèixer els valors de la funció en qualsevol altre punt perquè es tracta de repetir la gràfica en aquest interval. Per aquest motiu la funció sinus és una funció periòdica, de període 2π. Així, doncs, les seves característiques globals són:

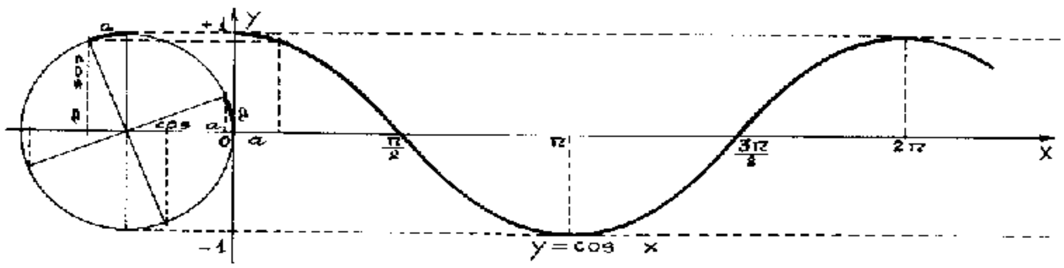
- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$ i el domini són tots els reals.

- Els punts de tall són ($k\pi$,0) on k és qualsevol nombre enter, i (0,1).
- Decreixent: ((4k + 1)π/2,(4k + 3)π/2), creixent: ((4k + 3)π/2,(4k + 5)π/2), on k és qualsevol nombre enter
- Té un màxim en ((4k + 1)π/2, 1) i un mínim en ((4k + 3)π/2, –1), essent k un nombre enter.

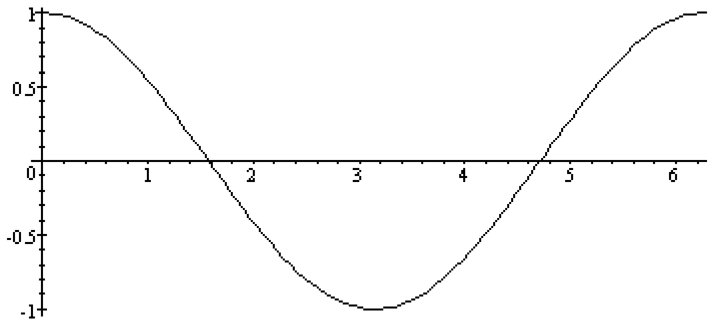
Què és la funció cosinus i quines en són les característiques?

> La funció cosinus és una altra de les funcions trigonomètriques que a cada valor (en radians) li fa correspondre el seu cosinus. La funció cosinus és una funció periòdica, de període 2π. El seu domini són tots els nombres i la seva imatge és [–1,1].

La funció cosinus és aquella funció que associa a un angle en radians el seu cosinus; la gràfica d'aquesta funció es construeix com segueix, quan l'angle es troba entre 0 i 2π, de manera semblant a com es construeix la funció sinus:



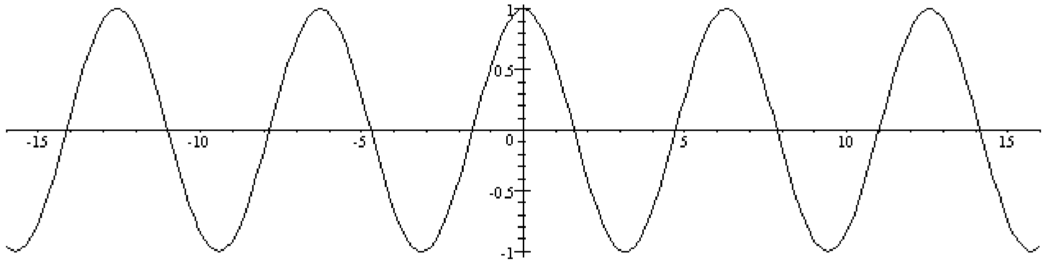
Així, doncs, la gràfica de la funció cosinus en l'interval [0,2π) és com segueix:



Algunes de les característiques de la funció cosinus en l'interval [0, 2π) són:

- La imatge de la funció és l'interval [–1,1].
- Els punts de tall són (0, 1), (π/2,0) i (3π/2,0).
- És creixent en (π,2π) i decreixent en (0, π).
- Té un màxim en el punt (0,1) i un mínim en el punt (π,–1).

Com la funció sinus, la funció cosinus és una funció periòdica perquè es repeteix en intervals d'amplada 2π; d'aquesta manera, la gràfica de la funció cosinus en un interval més gran presenta aquesta forma:
Algunes de les característiques fonamentals de la funció cosinus:



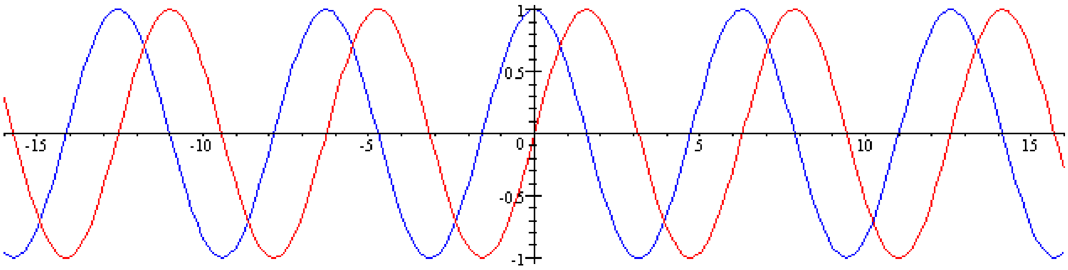
- La imatge de la funció és l'interval [–1, 1] i el domini són tots els reals.

- Els punts de tall són $((2k + 1)\pi/2,0)$ on k és qualsevol nombre enter, i (0,1).
- Decreixent: $(2k\pi,(2k + 1)\pi)$, creixent:$((2k + 1)\pi,(2k + 2)\pi)$, on k és qualsevol nombre enter.
- Té un màxim en $(2k\pi,1)$ i un mínim en $((2k + 1)\pi,-1)$, essent k un nombre enter.

Quina és la relació entre la funció sinus i la funció cosinus?

> La forma de les funcions sinus i cosinus és la mateixa, encara que hi ha un desfasament de $\pi/2$ entre l'una i l'altra. Això és així perquè és sabut que
> $\cos x = \sin (x + \pi/2)$.

A primer cop d'ull, es pot comprovar que la funció sinus i la funció cosinus són molt semblants. Si representem ambdues funcions en un mateix gràfic, aquesta semblança és més palesa:



Observem que la seva forma és exactament la mateixa, però la funció sinus (en vermell) està lleugerament "avançada" (en $\pi/2$) respecte de la funció cosinus (en blau). Això és així perquè com és sabut:

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

En aquesta taula es mostra aquesta relació de manera més detallada, descrivint cadascuna de les funcions segons el quadrant:

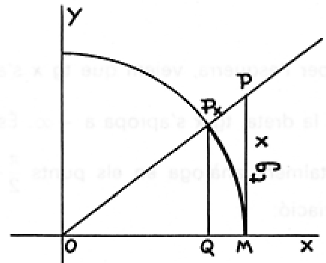
x	0	de 0 a $\pi/2$ 1r quadrant	$\pi/2$	de $\pi/2$ a. π 2n quadrant	π	de π $3\pi/2$ 3r quadrant	$3\pi/2$	de $3\pi/2$ a 2π 4t quadrant	$2.\pi$
sin x	0	positiva i creixent	1	positiva i decreixent	0	negativa i decreixent	–1	negativa i creixent	0.
cos x	1	positiva i decreixent	0	negativa i decreixent	–1	negativa i creixent	0	positiva i creixent	1.

Què és la funció tangent i quines en són les característiques?

> La funció tangent és una altra de les funcions trigonomètriques que a cada valor (en radians) hi fa correspondre la seva tangent. La funció tangent és una funció periòdica, de període π. El seu domini són tots els nombres excepte alguns punts i la seva imatge són tots els nombres.

La funció tangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians, la seva tangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte que:

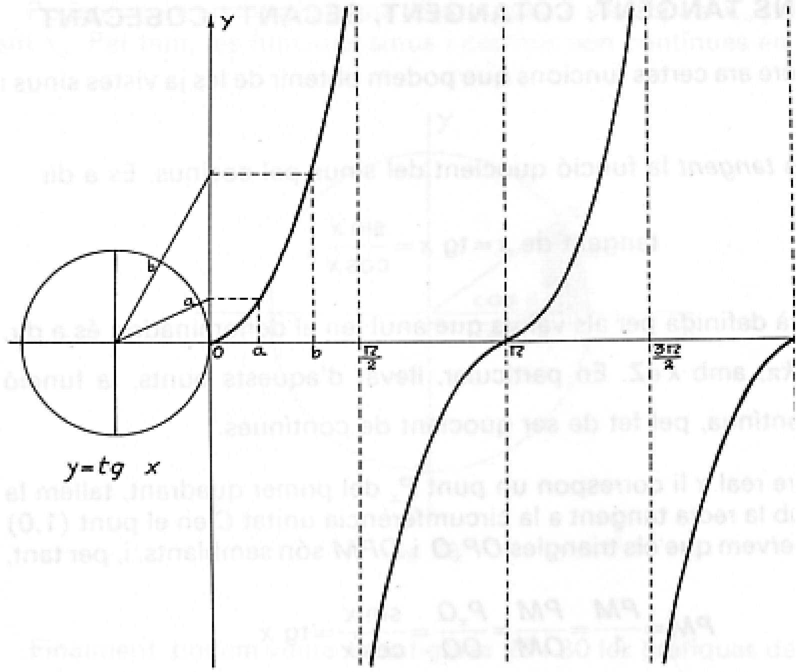
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{(també tan } x\text{)}$$

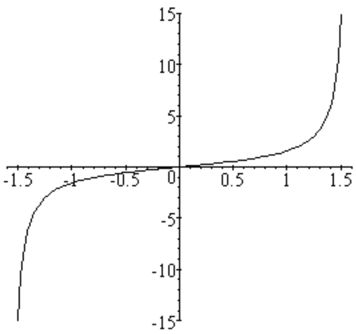


Per a representar aquesta funció, s'ha de recórrer a la interpretació geomètrica de la tangent. En aquest gràfic es pot observar el primer quadrant d'una circumferència de radi 1. El sinus de l'angle representat és QP_x, el cosinus és OQ i la tangent és MP.

Per tant, es pot representar la funció tangent de la manera següent:

Així, doncs, si es representa la funció tangent entre $-\pi/2$ i $\pi/2$, aquesta és la seva gràfica:

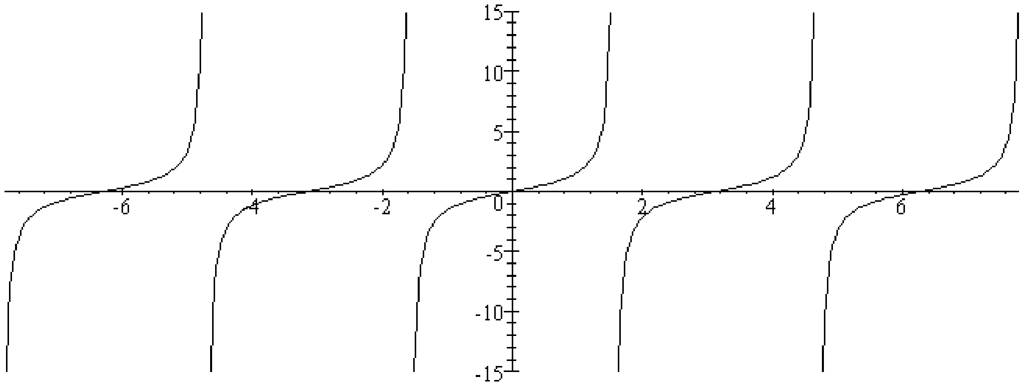




Algunes de les característiques fonamentals de la funció tangent en l'interval $[-\pi/2,\pi/2)$ són:

- La imatge d'aquesta funció es compon de tots els nombres reals, positius i negatius.
- L'únic punt de tall és (0,0).
- És una funció creixent.
- No té ni màxims ni mínims.

La funció tangent, com les funcions sinus i cosinus, és una funció periòdica, en aquest cas de període π. Així, doncs, si representem la seva gràfica en un interval més gran, la seva representació serà la següent: Les propietats d'aquesta funció són:



- A diferència de la majoria de les funcions estudiades fins al moment, el domini d'aquesta funció no inclou tots els nombres: per als valors en els quals el cosinus és 0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible); això passa quan x és igual a $\pi/2 + k\pi$ (essent k un nombre enter qualsevol), és a dir, per a ... $-7\pi/2$, $-5\pi/2$, $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, $7\pi/2$ ...
- La imatge d'aquesta funció són tots els nombres reals, positius o negatius.
- La tangent és sempre una funció creixent.
- La coordenada x dels punts de tall amb els eixos és un múltiple de π, és a dir, els punts de tall amb els eixos són $(k\pi,0)$, on k és un nombre enter.

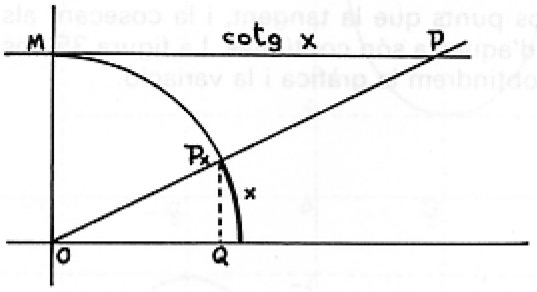
Què és la funció cotangent i quines en són les característiques?

> La funció cotangent és una altra de les funcions trigonomètriques que a cada valor (en radians) hi fa correspondre la seva cotangent. La funció cotangent és una funció periòdica, de període π. El seu domini són tots els nombres excepte alguns punts i la seva imatge són tots els nombres.

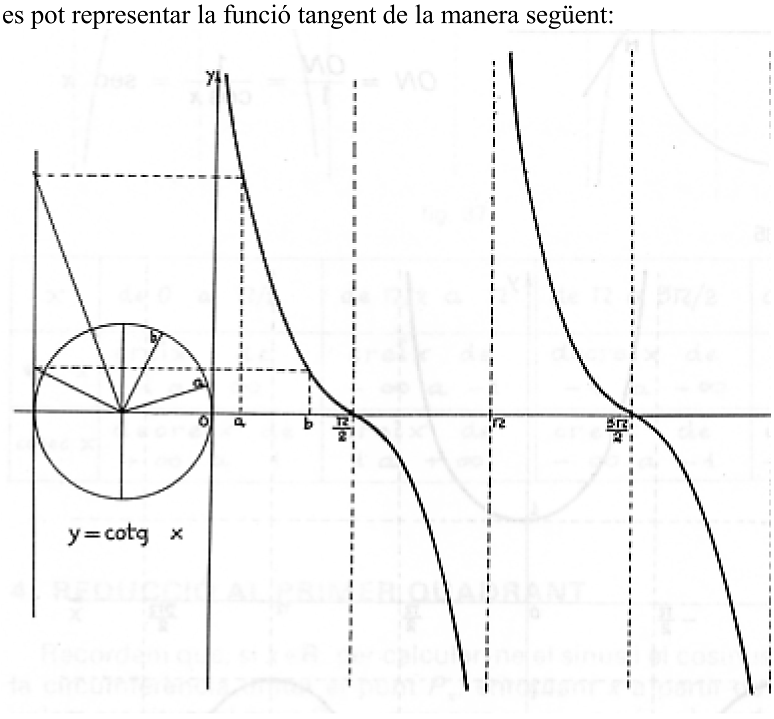
La funció cotangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians la seva cotangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte que:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

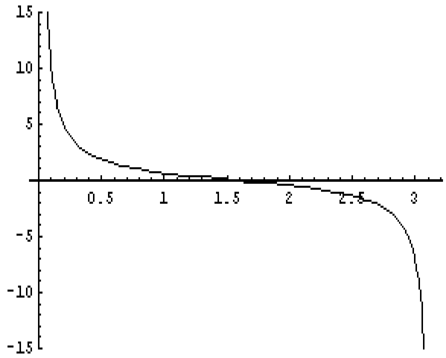
Per a representar aquesta funció, s'ha de recórrer a la interpretació geomètrica de la cotangent. En aquest gràfic es pot observar el primer quadrant d'una circumferència de radi 1. El sinus de l'angle representat és QP_x, el cosinus és OQ i la tangent és MP.



Per tant, es pot representar la funció tangent de la manera següent:



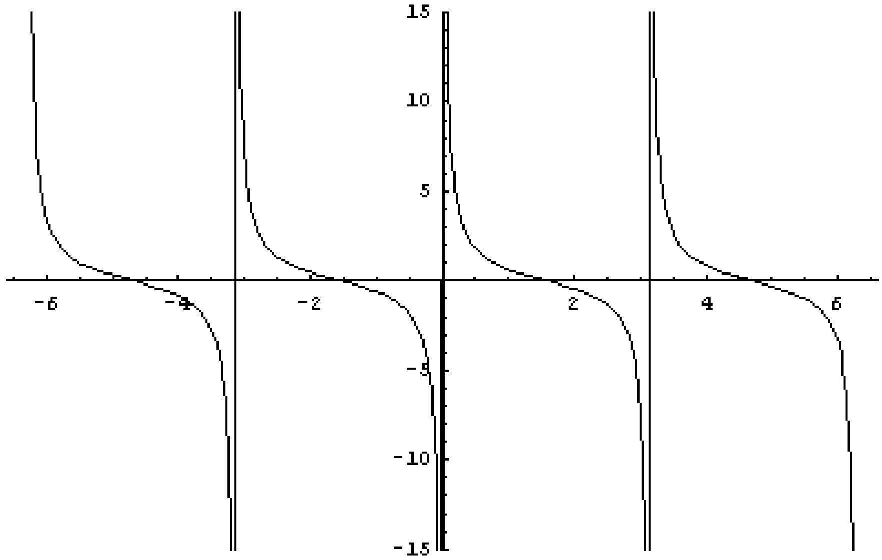
Així, doncs, si es representa la funció tangent entre 0 i π , aquesta és la seva gràfica:



Algunes de les característiques fonamentals de la funció cotangent en l'interval $[0,\pi)$ són:

- La imatge d'aquesta funció es compon de tots els nombres reals, positius o negatius.
- L'únic punt de tall és $(\pi/2,0)$.
- És una funció decreixent.
- No té ni màxims ni mínims.

La funció cotangent, com les funcions sinus, cosinus i tangent, és una funció periòdica, en aquest cas el període π; per tant, si representem la seva gràfica en un interval major, la seva representació serà la següent:



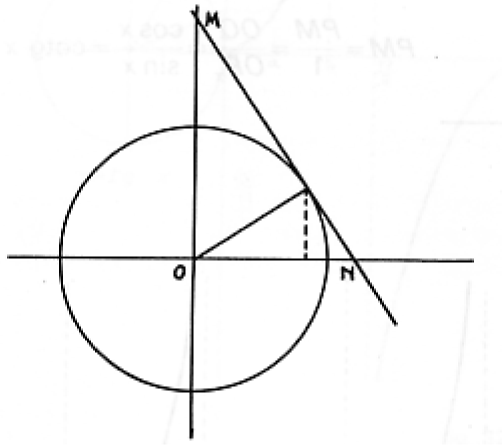
Les propietats d'aquesta funció són:

- El domini no inclou tots els nombres, com en el cas de la tangent: per als valors en els quals el sinus és 0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible); això passa quan x és igual a $k\pi$ (essent k un nombre enter qualsevol), és a dir, per a ...-2π, $-\pi$, 0, π, 2π...
- La imatge es compon de tots els nombres reals, positius o negatius.
- La cotangent és sempre una funció decreixent.
- Els punts de tall amb els eixos són $(\pi/2 + k\pi, 0)$, on k és un nombre enter.

Què són les funcions secant i cosecant i quines en són les característiques?

> De manera semblant a la funció cotangent, les funcions secant i cosecant són les funcions que es calculen dividint 1 entre les funcions cosinus i sinus, respectivament. També són funcions periòdiques de període 2π.

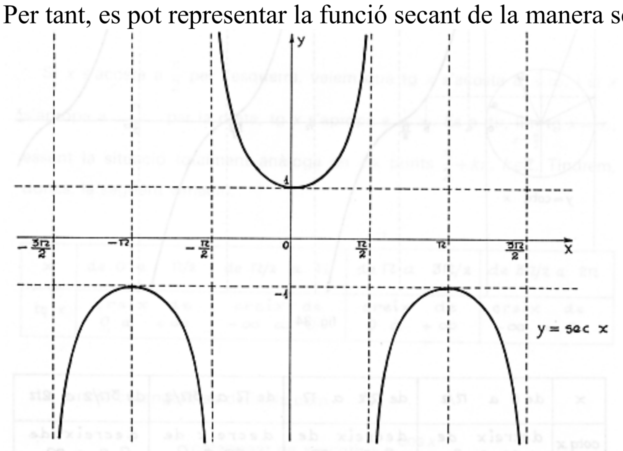
Les funcions secant i cosecant es defineixen de la manera següent:



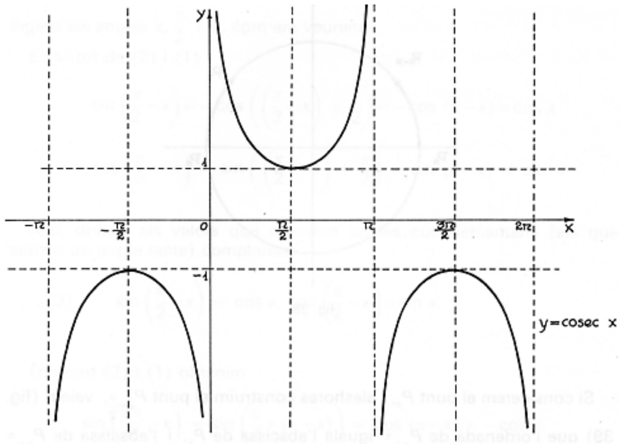
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Per a representar aquesta funció, cal recórrer a la interpretació geomètrica: el segment ON es correspon amb la secant i el segment OM es correspon amb la cosecant.
Per tant, es pot representar la funció secant de la manera següent:



i la funció cosecant:



Es tracta, doncs, de funcions periòdiques de període 2π les característiques essencials de les quals són:

- Els dominis són:
    - la funció secant: tots els nombres excepte $\pi/2 + k\pi$, essent k un nombre enter;
    - la funció cosecant: tots els nombres excepte $k\pi$, essent k un nombre enter.
- La imatge es compon de tots els nombres reals, excepte l'interval $(-1,1)$.
- Els intervals de creixement són (sense comptar els punts que no són del domini):
    - secant:
      creixent: $(2k\pi,(2k + 1)\pi)$, decreixent: $((2k + 1)\pi,(2k + 2)\pi)$, on k és qualsevol nombre enter.
    - cosecant:
      creixent: $((4k+1)\pi/2,(4k+3)\pi/2)$, decreixent: $((4k+3)\pi/2,(4k+5)\pi/2)$, on k és qualsevol nombre enter.
- Màxims i mínims:
    - secant:
      Té un mínim en $(2k\pi,1)$ i un màxim en $((2k + 1)\pi,-1)$, essent k un nombre enter.
    - cosecant:
      Té un mínim en $((4k+1)\pi/2,1)$ i un màxim en $((4k+3)\pi/2, -1)$, essent k un nombre enter.
- La secant té un únic punt de tall, el $(0,1)$, mentre que la tangent no en té cap.

Quines són les funcions inverses de les funcions trigonomètriques?

> Les funcions inverses de les funcions sinus, cosinus i tangent són les funcions arc sinus, arc cosinus i arc tangent. Les gràfiques d'aquestes funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$, tal com passa amb totes les funcions inverses.

Totes les funcions trigonomètriques tenen inversa en l'interval de periodicitat propi de la funció. En qualsevol cas, les més importants són les funcions inverses del sinus, cosinus i tangent. Per a denominar-les, totes elles precedeixen el nom de la funció original del terme arc.

- La funció inversa de la funció sinus es denomina *arc sinus* i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1,1]$ l'angle el sinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en què passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $[-\pi/2, \pi/2]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc sin. Per exemple, arc $\sin(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor del sinus 0 és l'angle 0 radians.

- La funció inversa de la funció cosinus es denomina *arc cosinus* i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1,1]$ l'angle el cosinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $[0, \pi]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arc cos. Per exemple, arc $\cos(0) = \pi/2$, ja que l'angle que correspon al valor del cosinus 0 és l'angle $\pi/2$ radians.

- La funció inversa de la funció tangent es denomina *arc tangent* i és una funció que assigna a cada valor real l'angle la tangent del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $(-\pi/2, \pi/2)$. Aquesta funció es designa amb el símbol
arc tan. Per exemple, arc $\tan(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor de la tangent 0 és l'angle 0 radians.

Aquestes són les representacions d'aquestes funcions, que, com sabem, són funcions simètriques de la funció original respecte de la recta $y = x$:

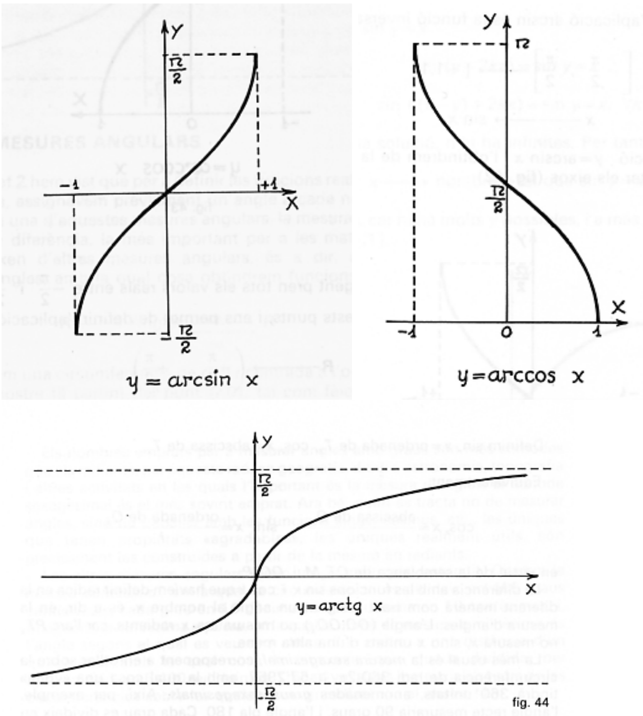


fig. 44

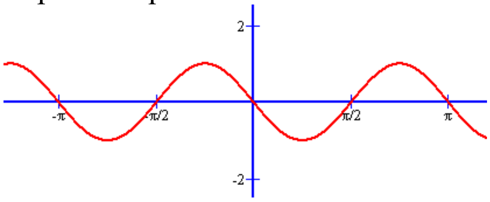
Exercicis

1. Quines són les característiques bàsiques de la funció $f(x)=\cos(2x)$ (domini, imatge, període, punts de tall, creixement i decreixement, màxims i mínims, ...)?

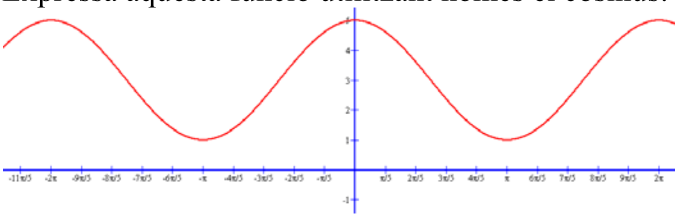
2. Hi ha cap punt que compleixi que $\sin x=\tan x$?

3. Quina és la imatge de les funcions $f(x)=3\sin x$ i $g(x)=3+2\cos x$.

4. Expressa aquesta funció utilitzant només el sinus:



5. Expressa aquesta funció utilitzant només el cosinus:



Solucions

1. $f(x)=\cos(2x)$ és molt semblant a la funció cosinus, amb la diferència que el seu argument augmenta/disminueix més ràpidament, per tant la seva gràfica serà més "comprimida":
   - La imatge de la funció és l'interval [–1,1].
   - El seu període és π .
   - Els punts de tall són (0, 1), (π/4,0) i (3π/4,0).
   - És creixent en (π/2,π) i decreixent en (0, π/2).
   - Té un màxim en el punt (0,1) i un mínim en el punt (π/2,–1).

2. Només cal resoldre $\sin x=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, és a dir,

   $1=\dfrac{1}{\cos x}$, per tant, $\cos x=1$. Així $x=0+2\pi k$.

3. $f(x)=3\sin x$: la imatge és [-3,3], perquè els valor del sinus es multipliquen per 3.

   $g(x)=3+2\cos x$: La imatge de $2\cos x$ és [-2,2], si hem de sumar 3, la seva imatge serà [1,5].

4. El període és π i el valor a 0 és 0 i a continuació és negatiu. Per tant, podria ser $f(x)=\sin(2x+\pi)$

5. La imatge és [1,5] i el valor a 0 és el màxim. El període és 2π . Per tant, pot ser $f(x)=2\cos x+3$

Límits de funcions

Límits de funcions

Definició de límit d'una funció en un punt
El límit funcional és un concepte relacionat amb la variació dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat d'x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor. Aquest fet s'indica així:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

i es llegeix de qualsevol d'aquestes formes:

el límit d'una funció f en un valor a és igual a b;
la funció f té límit b quan la x tendeix a a.

La manera més rigorosa de definir aquest concepte és la següent:

donat nombre real $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $|x - a| < \delta$, llavors es compleix que $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Regles del càlcul de límits

- El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b+c$$

- El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = b\times c$$

Seguint aquestes dues primeres regles, podem afirmar que si la funció $f(x)$ és un polinomi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que el denominador no sigui 0, és a dir:

si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a}(f/g)(x) = b/c$$

- El límit de la potència de dues funcions en un punt és igual a la potència de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que ambdues funcions no siguin 0 al mateix temps, és a dir:

si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim_{x\to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c$$

Límit d'una funció quan x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$

- El límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $+\infty$ quan, donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x > k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a del principi. Això es nota així:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

- El límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan la x tendeix a $-\infty$ quan, donat un interval qualsevol de centre a, hi ha un nombre k de manera que si $x < k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a del principi. Això es nota així:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

Aquests límits es poden calcular mitjançant l'ús de taules.

x	$f(x)$
1	1
10	0,1
100	0,01
200	0,005
300	0,003333
1000	0,001
5000	0,0002
10000	0,00001

Per exemple, donada la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ si es vol buscar

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge amb valors de x cada vegada més grans, i comprovar si hi ha cap valor límit per la funció. Es pot observar que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Límits infinits

- Es diu que una funció tendeix a $+\infty$ quan x tendeix a a, si la funció creix sense límit quan la x tendeix al valor a. Això es denota així:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

- Es diu que una funció tendeix a $-\infty$ quan x tendeix a a, si la funció decreix sense límit quan la x tendeix al valor a. Això es denota així:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Límits laterals

- El límit lateral per la dreta d'una funció en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors majors que el punt, i es denota així:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

- El límit lateral per l'esquerra d'una funció en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors menors que el punt:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b$$

Així, doncs, el límit d'una funció f en un punt a existeix si:

1. Existeixen els seus límits laterals, per l'esquerra i per la dreta.
2. Ambdós límits són iguals al mateix nombre, b:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

En aquest cas, el límit serà:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Indeterminacions

Un límit el resultat del qual no sigui un nombre ni tampoc $+\infty$, ni $-\infty$, es diu que és una indeterminació i, per això, s'ha d'estudiar amb més deteniment per resoldre'l:

$$\lim_{x\to p} f(x) \text{ és indeterminat quan dóna, en un primer moment, } \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty$$

Resolució d'aquests tipus principals d'indeterminacions:

- Indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$

Generalment es tracta d'un quocient de polinomis, de manera que ambdós polinomis s'anul·len en el punt p en el qual es calcula el límit. Per resoldre aquests casos s'ha de dividir el numerador i el denominador entre $x - p$.

- Indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

Generalment es tracta d'un quocient de polinomis essent $p = +\infty$ o $-\infty$. El resultat d'aquest tipus de límits s'ofereix en aquesta taula, en la qual es recullen els graus del numerador (gn) i denominador (gd), el quocient dels signes dels coeficients de grau màxim de numerador i denominador (s), i el signe de p:

	gn > gd		gn = gd		gn < gd	
s	+	–	+	–	+	–
$p = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	quocient de coeficients de grau màxim		0.	
$p = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$				

- Indeterminació del tipus $0 \cdot \infty$

Els límits són del tipus:

$$\lim_{x\to p} f(x)g(x)$$

que es pot resoldre amb aquesta modificació:

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

D'aquesta manera es transforma en una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

- Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Aquesta indeterminació és molt usual entre funcions que contenen arrels, en una expressió amb una diferència de funcions. En aquests casos se sol multiplicar i dividir la funció per la seva conjugat (és a dir, per la mateixa expressió en la qual s'ha canviat el – pel +).

Asímptotes a una funció

Una asímptota a una funció és una recta que al tendir la x a un nombre, a $+\infty$, o a $-\infty$ s'acosta a la funció de manera constant fins a fer-se "tangent en l'infinit."

Les asímptotes poden ser:

- Asímptotes verticals

La funció té una asímptota vertical quan la x tendeix a un valor, i la funció tendeix a $+\infty$ o $-\infty$:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \text{ o bé, } \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

En aquest cas, la recta $x = a$ és una asímptota vertical.

- Asímptotes horitzontals

La funció té una asímptota horitzontal quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i la funció tendeix a un valor concret:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \text{ o bé, } \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

El concepte d'*infinit*

En el llenguatge quotidià no és difícil escoltar expressions que incloguin el terme *infinit* o els seus derivats: normalment fan referència a un nombre enorme, gairebé impensable; si algú digués "t'ho he dit infinites vegades", tots entenem que qui parla ha dit moltíssimes vegades la mateixa cosa a l'oïdor.
En matemàtiques, el concepte d'*infinit* no agradava als matemàtics ni als pensadors antics; només a partir del segle XVII es comença a utilitzar aquest concepte assíduament (encara que amb moltes reticències) per designar allò que és és gran que qualsevol altra cosa imaginable, és a dir, més gran que qualsevol nombre real. Per això, aquest concepte queda fora dels nombres reals.
A partir del segle XVII es comença a usar com a símbol de l'infinit una corba denominada *lemniscata*, ∞, símbol que, curiosament, apareix en les populars cartes del Tarot com un barret sobre el cap del mag o joglar, en la carta del mateix nom.

Carta de tarot corresponent al mag.

El matemàtic John Wallis, a l'obra *Arithmetica infinitorum,* va ser el primer a usar aquest símbol per representar l'infinit. Kant, el segle XIX, coincidia amb Aristòtil a assenyalar que el límit absolut és impossible en l'experiència, és a dir, mai no podem arribar a l'infinit. I el gran matemàtic Karl Friedrich Gauss, el 1831, emfasitzava la seva protesta contra l'ús de l'infinit com un fet consumat: "Protesto contra l'ús d'una quantitat infinita com una entitat actual; aquesta mai no es pot permetre en matemàtica. L'infinit és només una forma de parlar, quan en realitat hauríem de parlar de límits als quals certes raons es poden aproximar tant com es vulgui, mentre que a unes altres els és permès de créixer il·limitadament".
Gauss no va ser l'únic matemàtic de la seva època que va rebutjar l'infinit com a quantitat existent.
El teòleg i matemàtic txec Bernhard Bozen va ser el primer a tractar de fonamentar la noció d'*infinit*; en la seva obra pòstuma, *Paradoxes de l'infinit* (1851), va defensar l'existència d'un infinit i va emfasitzar que el concepte d'equivalència entre dos conjunts era aplicable tant a conjunts finits com a infinits. Bozen va acceptar com una fet normal que els conjunts infinits fossin equivalents a una part d'ells mateixos. Aquesta definició de l'infinit va ser utilitzada posteriorment per Cantor i Dedekind. A pesar que l'obra de Bozen *Paradoxes de l'infinit* era més aviat de tall filosòfic que matemàtic, ja que no tenia conceptes crucials com conjunt i nombre cardinal, podríem dir que Bozen va ser el primer matemàtic a establir les bases per la construcció d'una teoria de conjunts.

Quina és la noció intuïtiva de límit funcional?

El límit funcional és un concepte relacionat amb la tendència dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat de x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor, encara que no acaba de ser-ho mai.

El límit d'una funció en un valor determinat de x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor (però mai no arriba a ser-ho). Si el límit d'una funció f en un valor a és igual a b, s'escriu d'aquesta manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

També es diu que "la funció f té límit b quan la x tendeix a a". Per exemple, si $f(x)$ és una funció que compleix que, quan la x tendeix a 3, la funció tendeix a 1, llavors aquest fet s'escriurà així:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

Així, doncs, el límit d'una funció en un valor a dóna una idea de la tendència de la funció quan el valor de la x tendeix a aquest valor. Per estudiar el límit d'una funció en un valor, es pot crear una taula amb diferents valors de la funció el component de la qual x tendeix al valor a (però que mai sigui a). Per exemple, si la funció és $f(x) = 2x + 1$, i es vol calcular:

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

x	$f(x)$
0	1.
0,1	1,2
0,5	2.
0,7	2,4
0,9	2,8
0,99	2,98

es pot construir una taula com la del marge. Sembla evident que com més a prop d'1 es troba la x, més a prop de 3 es troba $f(x)$. Així, doncs, podem deduir

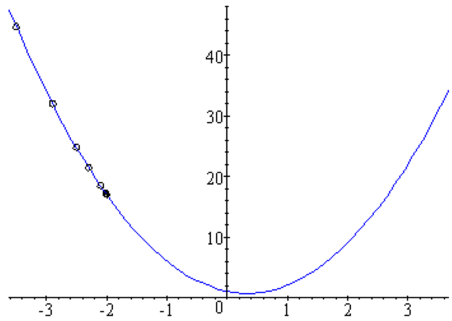
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Un altre exemple: si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, podem intentar calcular el límit d'aquesta funció quan x tendeix a –2. Una vegada feta la taula és fàcil deduir que:

x	$f(x)$
–3	34.
–2,9	32,03
–2,5	24,75
–2,3	21,47
–2,1	18,43
–2,01	17,1403
–2,001	17,014003

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

cosa que es pot observar en la gràfica:



Els punts de la taula s'acosten cada vegada més a –(2,17).

Aquesta no és una definició rigorosa del límit d'una funció en un punt, però és molt senzilla i efectiva en la majoria de les funcions que s'han estudiat.

Quin és el concepte rigorós de límit d'una funció en un punt?

Una funció f té límit b quan x tendeix a a, si i solament si, donat un interval qualsevol centrat en b, hi ha un interval de centre a de manera que tots els punts d'aquest últim interval, excepte el punt a, tenen la seva imatge en l'interval de centre b anterior. En general, no es recorre a la definició de *límit* per buscar el límit d'una funció en un punt, sinó que es recorre als límits ja coneguts, a unes regles senzilles de càlcul amb límits i a l'ús de taules de valors, amb successions el límit de les quals sigui el valor en què es vol buscar el límit.

Una funció f té límit b quan x tendeix a a, si i solament si, donat un interval qualsevol centrat en b, hi ha un interval de centre a de manera que tots els punts d'aquest últim interval, excepte el punt a, tenen la seva imatge en l'interval de centre b anterior, és a dir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

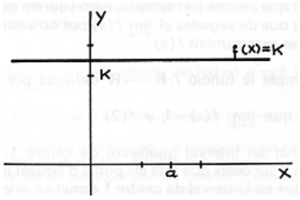
si i solament si es compleix el següent:

donat qualsevol nombre real $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $|x - a| < \delta$, llavors es compleix que $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Vegem exemples senzills que expliquin aquesta definició, i l'enllacin amb la noció intuïtiva de límit funcional:

- Donada una funció $f(x) = k$, essent k un nombre qualsevol, compleix que

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

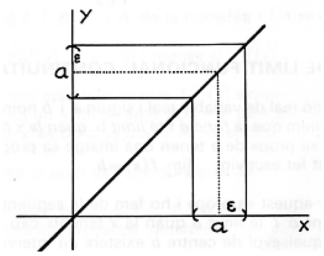


sigui quin sigui el valor d'a.

Vegeu com, donat un interval centrat en k, tan petit com vulguem, sempre podem trobar un interval centrat en a, la imatge del qual caigui tota dintre de l'interval inicial. En aquest cas, l'interval centrat en a pot ser qualsevol, ja que totes les imatges són igual a k i, per tant, cauen dintre de l'interval centrat en k.

- Donada la funció $f(x) = x$, es compleix que

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$



sigui el que sigui el valor d'a.

Vegeu com totes les imatges de l'interval $(a–ε, a +ε)$ es troben en l'interval $(a–ε, a+ε)$. Per tant, es compleix la definició de límit, en aquest cas, si es tria $\delta = \varepsilon$.

En general, no es recorre a la definició de *límit* per buscar el límit d'una funció en un punt, sinó que es recorre als límits ja coneguts, a unes regles senzilles de càlcul amb límits i a l'ús de taules de valors, amb successions el límit de les quals sigui el valor en què es vol buscar el límit funcional.

Quines són les regles principals per al càlcul de límits?

> Les regles per al càlcul de límits s'apliquen a les operacions principals: si s'opera amb dues funcions, essent les operacions suma, resta, multiplicació, divisió o potència, i es calcula el seu límit en un punt, el resultat és igual a la mateixa operació aplicada al resultat dels límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió.

Aquestes són les regles principals per al càlcul de límits:

- El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = b + c$$

- El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = b \times c$$

Seguint aquestes dues primeres regles, podem afirmar que si la funció $f(x)$ és un polinomi, el límit en qualsevol punt és igual al valor del polinomi en aquest punt, és a dir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Això es pot comprovar de manera senzilla, ja que un polinomi és una suma de productes de nombres i la variable x. Per exemple, per trobar el límit en cada punt de la funció $x – 2$, es construeixen $f(x) = x$ i $g(x) = –2$, i es busca el límit quan x tendeix a

$$\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a \\ \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} -2 = -2 \end{array} \quad \text{i llavors} \quad \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} x - 2 = a - 2$$

- El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que el denominador no sigui 0, és a dir:

si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$

llavors

$$\lim_{x \to a} (f / g)(x) = b / c$$

- El límit de la potència de dues funcions en un punt és igual a la potència de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que ambdues funcions no siguin 0 al mateix temps, és a dir:

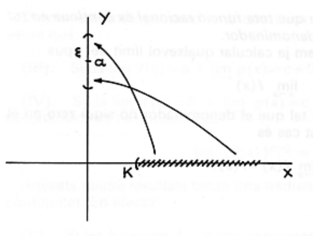
$$\text{si } \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c$$

llavors

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c$$

Què significa el límit quan la variable tendeix a +∞ o –∞?

Es diu que el límit d'una funció *f*(*x*) és un nombre *a* quan la *x* tendeix a +∞, quan donat un interval qualsevol de centre *a*, hi ha un nombre *k* de manera que si *x* > *k*, llavors *f*(*x*) es troba en l'interval de centre *a* del principi. La definició és molt semblant si la *x* tendeix a –∞, i només s'ha de canviar *x* > *k*, per *x* < *k*. Una manera senzilla de trobar aquest tipus de límits consisteix a crear una taula de la funció amb valors que vagin creixent (o decreixent) sense límit, encara que no és un mètode fiable.

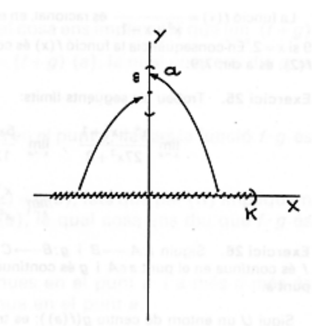


Es diu que el límit d'una funció *f*(*x*) és un nombre *a* quan la *x* tendeix a +∞, quan donat un interval qualsevol de centre *a*, hi ha un nombre *k* de manera que si *x* > *k*, llavors *f*(*x*) es troba en l'interval de centre *a* de el principi. Això es denota així:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$$

Dit d'una altra manera, es compleix que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$, si i solament si, donat un nombre positiu ε, hi ha un nombre *k* tal que si *x* > *k* llavors *a* – ε < *f*(*x*) < *a* + ε.

En aquest gràfic es representa aquest fet: els valors de la funció a partir de *k* sempre cauen dintre de l'interval de centre *a*.



Es diu que el límit d'una funció *f*(*x*) és un nombre *a* quan la *x* tendeix a –∞ quan donat un interval qualsevol de centre *a*, hi ha un nombre *k* de manera que si *x* < *k*, llavors *f*(*x*) es troba en l'interval de centre *a* del principi. Això es denota així:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

Dit d'una altra manera, es compleix que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$, si i solament si, donat un nombre positiu ε, hi ha un nombre *k* tal que si *x* < *k* llavors

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

els valors de la funció a partir de *k* sempre cauen dintre de l'interval de centre *a*

Una manera senzilla de buscar aquests límits quan la variable tendeix a +∞ o –∞, encara que no sempre fiable, consisteix a construir una taula de valors que creixin indefinidament (o que decreixin indefinidament) i comprovar si hi ha cap valor al qual tendeixi la funció. Per exemple, donada la funció:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

si es vol buscar

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge amb valors de *x* cada vegada més grans i comprovar si hi ha cap valor límit per la funció. Es pot observar que el valor límit ha de ser 0, ja que com més gran és la *x*, més a prop de 0 es troba el valor de la funció. Per tant,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

x	*f*(*x*)
1	1.
10	0,1
100	0,01
200	0,005
300	0,003333
1000	0,001
5000	0,0002
10000	0,00001

Si es vol buscar

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

es pot construir una taula com la del marge amb valors de *x* cada vegada més petits, i comprovar si hi ha algun valor límit per la funció. Es pot observar que el valor límit ha de ser 0, ja que com més petita és la *x*, més a prop de 0 es troba el valor de la funció. Per tant,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

x	*f(x)*
–1	–1.
–10	–0,1
–100	–0,01
–200	–0,005
–300	–0,003333
–1000	–0,001
–5000	–0,0002
–10000	–0,00001

Què són els limitis laterals i els límits infinits?

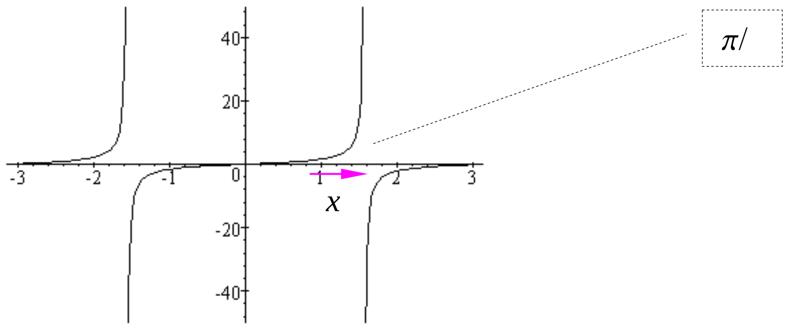
El límit lateral per la dreta d'una funció en un punt és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors més gran que el punt; en canvi, el límit lateral per l'esquerra d'una funció en un punt és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot tenir valors menors que el punt. Així, doncs, el límit d'una funció existeix si existeixen aquests dos límits laterals i, a més, són iguals. De vegades, el límit pot ser infinit (+∞, o bé, –∞), és a dir, el valor de la funció creix o decreix sense cap límit.

Hi ha límits especials que no tendeixen a un nombre quan *x* tendeix a un valor determinat (o quan tendeix a +∞ o a –∞). Per exemple, la funció tangent, quan *x* és $\pi/2$, no existeix. Però si s'intenta calcular quin és el límit de la funció tangent quan *x* tendeix a $\pi/2$, essent la *x* menor que $\pi/2$, observem a la taula següent com el valor de la funció creix sense límit. En un cas com aquest, en el qual la funció creix sense límit quan la *x* tendeix a un determinat valor, es diu que la funció tendeix a més infinit (+∞ , tal com es pot veure a la taula), quan *x* tendeix a aquest valor. En el cas concret de la funció tangent,

x	*tg x*
1,5	14,1014199
1,55	48,0784825
1,57	1255,76559
1,5705	3374,65254
1,57075	21585,7799
1,570775	46889,3711
1,570785	88286,2283

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

el signe – com a exponent de $\pi/2$ indica que *x* ha de ser sempre menor que aquest valor; dit d'una altra manera, la *x* s'ha d'acostar a $\pi/2$ per la seva esquerra (en la recta real), tal com es comprova en la gràfica de la funció:



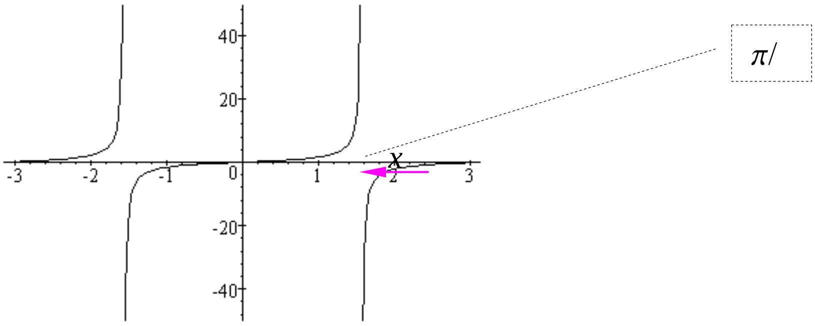
En aquest cas s'ha calculat el límit per l'esquerra de la funció tangent en el punt $\pi/2$.

De la mateixa manera, si construïm una taula de la funció tangent quan la x tendeix a $\pi/2$, sempre essent x més gran que aquest nombre, observarem que el valor de la funció cada vegada és menor. És a dir, com més propera és la x de $\pi/2$, menor és el valor de la tangent; a més, no hi ha límit inferior per aquest valor de la funció. En un cas com aquest, en el qual la funció no té límit inferior quan la x tendeix a un determinat valor, es diu que la funció tendeix a menys infinit ($-\infty$) quan x tendeix a aquest valor. En el cas concret de la funció tangent,

x	tg x
1,64159265	–14,1014199
1,59159265	–48,0784825
1,57159265	–1255,76559
1,57109265	–3374,65254
1,57084265	–21585,7799
1,57081765	–46889,3711
1,57080765	–88286,2283

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

el signe + com exponent de $\pi/2$ indica que x ha de ser sempre més gran que aquest valor; dit d'una altra manera, la x s'ha d'acostar a $\pi/2$ per la seva dreta (en la recta real), tal com es comprova en la gràfica de la funció:



En aquest cas, s'ha calculat el límit per la dreta de la funció tangent en el punt $\pi/2$.
Per tant, es pot dir que el límit d'una funció f en un punt a existeix si existeixen els seus límits laterals, per l'esquerra i per la dreta, i són iguals al mateix nombre, b; és a dir, si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

En aquest cas, el límit serà, evidentment,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Per exemple, en el cas de la funció tg x, no existeix el límit de la funció en el punt $\pi/2$ perquè els límits per la dreta i per l'esquerra no coincideixen.
En el cas d'una funció anterior, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, ja s'ha calculat una taula amb valors de x a l'esquerra de –2 (és a dir, valors menors que –2); per tant, s'havia calculat

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 17$$

Podem intentar calcular el límit d'aquesta funció quan x tendeix a –2 per la dreta (és a dir amb valors més grans que –2). Fem una taula:

x	$f(x)$
–1	6.
–1,1	6,83
–1,5	10,75
–1,7	13,07
–1,9	15,63
–1,99	16,8603
–1,999	16,986003

És fàcil deduir que:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 17$$

per tant,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 17$$

per la qual cosa es pot afirmar que, com ja havíem afirmat intuïtivament, el límit d'aquesta funció en el punt –2 és igual a 17:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

En aquest altre exemple, la funció és:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x-3 & x\le -1 \\ 2-3x & x>1 \end{cases}$$

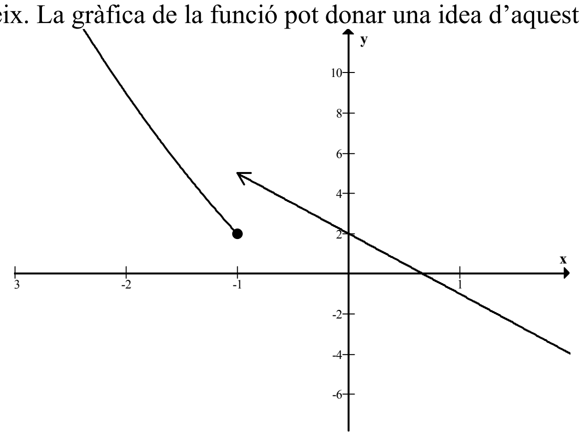
Si calculem el límit en $x = -1$, observem que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 2$$

En canvi, el límit per la dreta s'ha de calcular amb l'altra expressió, $2 - 3x$, ja que la funció per la dreta s'obté amb aquesta:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 2-3x = 5$$

Per tant, encara que existeixin els límits per ambdós costats, aquests no són iguals i, per tant, el límit de la funció en $x = -1$ no existeix. La gràfica de la funció pot donar una idea d'aquest fet:



Què és una indeterminació, quins tipus d'indeterminació hi ha i com es resolen?

Alguns límits, en un primer moment, no es poden calcular perquè el seu resultat no és ni un nombre, ni tampoc infinit. En aquests casos es diu que ens trobem davant una indeterminació. Existeixen diferents tipus d'indeterminació i per cadascuna d'elles hi ha un mètode general per resoldre-la i, així, poder trobar el límit en qüestió.

En certs casos, alguns límits d'una funció en un punt no es poden calcular, en un primer moment, perquè el seu resultat no és ni un nombre, ni infinit. En aquests casos es diu que ens trobem davant una indeterminació. Hi ha diferents tipus d'indeterminacions i cadascuna d'elles es resol d'una manera especial que veurem a continuació. El tipus d'indeterminació rep el nom del *valor del límit* que es troba en primera instància i, com que és un límit indeterminat, s'ha de resoldre per algun mètode adequat. Per això, cal recordar que aquest nom no és el resultat del límit, ni pot ser-ho, ja que només un nombre o infinit són els valors vàlids d'un límit. Per exemple, si diem que un límit és del tipus 0/0, això no vol dir que aquest valor sigui possible; ben al contrari, 0/0 no és un valor correcte i, per aquest motiu, s'ha de buscar algun mètode per trobar el límit correcte.
Per tots aquests casos, se suposarà que p és un nombre real, o bé que és $+\infty$ o $-\infty$, segons els casos (això es fa per simplificar les fórmules i els casos). Els límits seran del tipus:

$$\lim_{x\to p} f(x) \quad \text{Indeterminat}$$

- Indeterminació del tipus $\dfrac{0}{0}$

Es tracta d'aquells límits el resultat dels quals és precisament $\dfrac{0}{0}$. Generalment es tracta d'un quocient de polinomis, de manera que ambdós polinomis s'anul·len en el punt p en el qual es calcula el límit. Per exemple:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0} \quad \text{Indeterminat}$$

Per resoldre aquests casos s'ha de dividir el numerador i el denominador entre $x - p$, és a dir, en el cas de l'exemple, s'ha de dividir numerador i denominador entre $x - 2$, de la manera següent:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-4}{x-2}}{\frac{x-2}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{1}=\lim_{x\to 2}x+2=4$$

D'aquesta manera, en aquest cas, el límit inicialment indeterminat és igual a 4.

- Indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

Es tracta d'aquells límits el resultat dels quals és precisament $\frac{\infty}{\infty}$, independentment del signe dels infinits.

Generalment es tracta d'un quocient de polinomis essent $p = +\infty$ o $-\infty$. Per exemple:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{+\infty}{-\infty} \qquad \text{Indeterminat}$$

El resultat d'aquest tipus de límits s'ofereix en aquesta taula, en la qual es recullen els graus del numerador (gn) i denominador (gd), el quocient dels signes dels coeficients de grau màxim de numerador i denominador (s), i el signe de p :

	gn > gd		gn = gd		gn < gd	
s	+	–	+	–	+	–
$p = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	quocient de coeficients de grau màxim		0	
$p = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$				

En l'exemple anterior, el grau del numerador és més gran que el grau del denominador, el quocient dels signes dels coeficients de grau màxim de numerador i denominador és + i $p = -\infty$, per tant, el límit ha de ser $-\infty$. És a dir,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=-\infty$$

- Indeterminació del tipus $0 \cdot \infty$

Es tracta d'aquells límits el resultat dels quals és precisament $0 \cdot \infty$, amb independència del signe de l'infinit. Ens trobem en aquesta situació en límits del tipus:

$$\lim_{x\to p} f(x)g(x)$$

S'ha de tenir en compte que:

$$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

D'aquesta manera, es pot transformar aquesta indeterminació en una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

- Indeterminació del tipus $\infty - \infty$

Aquesta indeterminació és molt usual entre funcions que contenen arrels, en una expressió amb una diferència de funcions, com per exemple:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=\infty-\infty \quad \text{Indeterminació}$$

En aquests casos se sol multiplicar i dividir la funció per la seva conjugada, és a dir, per la mateixa expressió en la qual s'ha canviat el + pel –:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}$$

Això és així, ja que sabem que $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Així, doncs, continuem amb el límit anterior:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}=\frac{-1}{2}$$

L'últim pas és senzill si es té en compte que, en el càlcul d'un límit quan x tendeix a infinit, per saber l'exponent d'una expressió dintre d'una arrel, s'ha de dividir entre 2 el seu exponent. Així, doncs, si l'expressió dintre de l'arrel és $x^2 + x$, el terme de grau màxim és x^2, i com que es troba dintre d'una arrel el seu exponent és 2/2 = 1. Per tant, el grau màxim de l'arrel és 1. Per tant, el grau màxim del denominador és també 1 i el coeficient de grau màxim del denominador és 1 + 1 = 2 (el primer 1 de l'arrel i el segon, com a coeficient de x).

Exercicis

1. Calcula aquests límits raonadament:
   a. $\lim\limits_{x\to 3} x^2-2$
   b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+1}$
   c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$
   d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6}$
   e. $\lim\limits_{x\to 1} 2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$
   f. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-3$
   g. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{4x}$
   h. $\lim\limits_{x\to \infty} x-\sqrt{x^2-3x}$

2. Calcula els següents límits, si existeixen, pas a pas:
   a. $\lim\limits_{x\to 3} x^3-2x^2+1$
   b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-4x}{3x-5}$
   c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]$
   d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-x^2+1}{2x^3+x^2-9}$
   e. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-19}{(x-2)^3}$
   f. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$
   g. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ (difícil)
   h. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solucions

1.

a. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 2 \;= 7$

b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+1} \;= 0$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)}{(x+1)(x-2)} \;=$ -3/2

d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{5x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{8x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{6}{x^3}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{8-\dfrac{2}{x^1}+\dfrac{6}{x^3}} \;= 2/8$

e. $\lim\limits_{x\to 1} 2e^{\frac{1}{(x-1)^2}} \;= +\infty$

f. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-3 = +\infty$

g. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{4x} \;= 0$

h. $\lim\limits_{x\to \infty} x-\sqrt{x^2-3x} \;= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-3x})(x+\sqrt{x^2-3x})}{(x+\sqrt{x^2-3x})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-(x^2-3x)}{(x+\sqrt{x^2-3x})} =$

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x}{(x+\sqrt{x^2-3x})} \;= 3/2$

2.

a. $\lim\limits_{x\to 3} x^3-2x^2+1=10$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-4x}{3x-5}=0$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right]$

en principi dóna la indeterminació ∞ - ∞, per tant,

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2+x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\dfrac{-x-1}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2+x}{x^2}}+\dfrac{(x+1)}{x}}\right] = \frac{-1}{2}$$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{2x^3+x^2-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3-x^2+1}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-9}{x^3}}=\dfrac{1}{2}$

e. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-19}{\left(x-2\right)^3}$ en aquest cas el resultat dóna -19/0, per tant, s'ha d'investigar el límit per la dreta i per l'esquerra.

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-19}{\left(x-2\right)^3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-19}{\left(x-2\right)^3}=+\infty$

per tant, el límit no existeix, només existeixen el límits laterals.

f. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$ dóna la indeterminació 1^∞ i per tant,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}=e$

g. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\left(a+1\right)x+a}{x^3-a^3}$ en principi dóna la indeterminació 0/0, per tant,

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\left(a+1\right)x+a}{x^3-a^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x-1\right)\cancel{\left(x-a\right)}}{\cancel{\left(x-a\right)}\left(x^2+ax+a^2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x-1\right)}{\left(x^2+ax+a^2\right)}=\dfrac{a-1}{3a^2}$

l'únic valor conflictiu és a = 0, perquè s'anul·la el denominador. En aquest cas, el límit queda:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}=-\infty$ en qualsevol cas, perquè el denominador sempre és positiu, independentment que la x sigui major o menor que 0.

h. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x+2\right)}{\cancel{x-2}}=4$

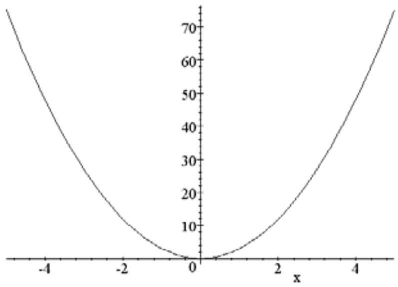
Funcions contínues

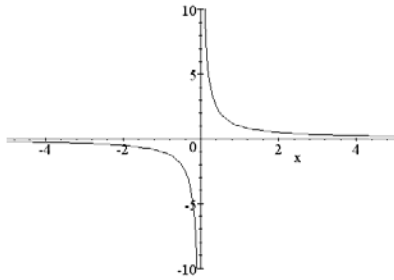
Funcions contínues

Continuïtat d'una funció
Si x_0 és un nombre, la funció $f(x)$ és contínua en aquest punt si el límit de la funció en aquest punt coincideix amb el valor de la funció en el punt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Gràficament: una funció és contínua en un punt si en aquest punt el seu gràfica no es trenca





Funció contínua en $x = 0$ Funció no contínua en $x = 0$

Una funció es diu que és contínua si ho és en qualsevol punt. Així, doncs, la gràfica d'una funció contínua s'ha de poder dibuixar d'un sol traç.

Discontinuïtats
Si una funció no és contínua en un punt, també es diu que aquesta funció té una discontinuïtat en aquest punt.
Els principals tipus de discontinuïtat són:

- Evitables: la funció f té una discontinuïtat evitable en el punt x_0 si existeix el límit de la funció en el punt x_0 però no coincideix amb el valor de la funció en aquest punt, o bé aquest no existeix, és a dir,

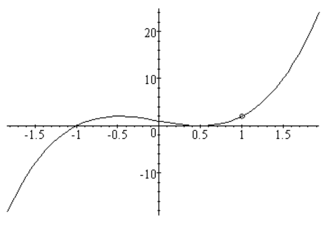
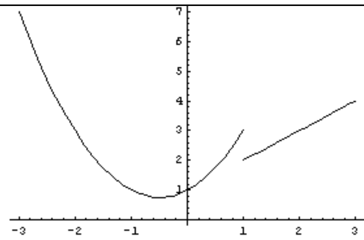
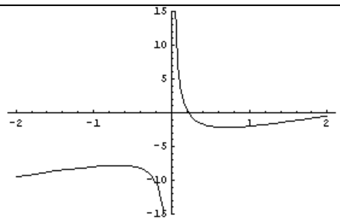
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$$

- Inevitables: discontinuïtats en les quals els límits laterals no coincideixen. És a dir, $f(x)$ té una discontinuïtat inevitable en x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Són, bàsicament, de dos tipus:

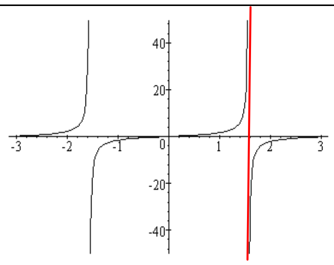
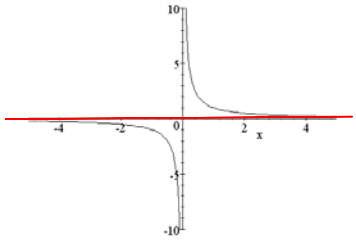
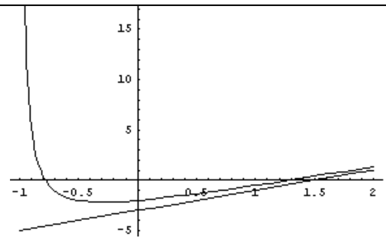
- de primera espècie o de salt finit, quan ambdós límits laterals són nombres reals.
- asimptòtica, quan els límits laterals són infinits.

 Discontinuïtat evitable	 Discontinuïtat inevitable de 1a espècie o de salt finit	 Discontinuïtat asimptòtica o de salt infinit

Asímptotes obliqües

La funció té una asímptota obliqua en la recta $y = ax + b$ quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i algun dels límits següents són 0:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad \text{o bé,} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

 asímptota vertical	 asímptota horitzontal	 asímptota obliqua

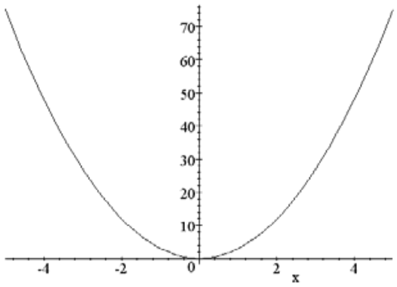
Quan una funció és contínua en un punt?

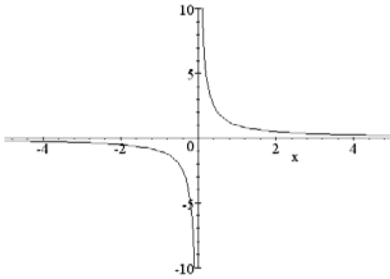
> Una funció és contínua en un punt quan el límit de la funció en aquest punt coincideix amb el valor de la funció en aquest punt. Una funció es diu que és contínua quan és contínua en qualsevol punt. Gràficament es pot observar que una funció és contínua si el seu traçat no presenta talls.

A partir del concepte de límit en un punt es pot definir el concepte de *funció contínua* en un punt: una funció és contínua en un punt quan el límit de la funció en aquest punt és igual al valor de la funció en el punt. És a dir, si x_0 és un nombre, la funció f és contínua en aquest punt si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

A més, una funció es diu que és contínua si ho és en qualsevol punt. Això es pot observar a la gràfica de la funció: una funció és contínua quan el seu traçat no conté talls. En l'exemple següent es pot observar una funció contínua i una altra que no ho és (dreta).

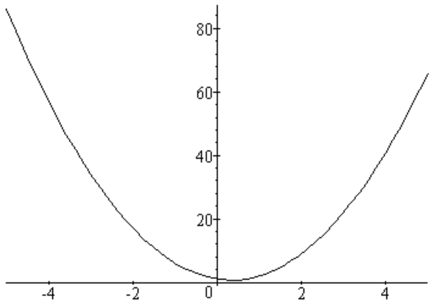




Vegem, per exemple, que la funció $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ és una funció contínua; és fàcil comprovar que el límit de la funció en el punt $x_0 = -2$ és 17. Falta, doncs, calcular el valor de la funció en aquest punt, $f(-2) = 17$. Per tant, en aquest cas es compleix que:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

Per tant, la funció $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ és contínua en el punt $x_0 = -2$. Per demostrar que tota la funció f és contínua s'hauria de comprovar aquesta condició per a tot punt x_0; normalment, això no cal fer-ho, perquè la idea de continuïtat en un punt podem associar-la, com s'ha dit, al fet de que el traç de la gràfica al voltant d'aquest punt s'ha de fer sense separar el llapis del paper (perquè quan ens acostem al valor, el traç del llapis s'acosta al valor de la funció en aquest punt). Així, doncs, contemplar la gràfica de la funció és la forma més útil (tot i que poc rigorosa) de saber si la funció és contínua: sempre que es pugui dibuixar amb un sol traç, sense separar el llapis del paper, la funció serà contínua.
En el cas de l'exemple, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, en podem obtenir fàcilment la representació, una paràbola:

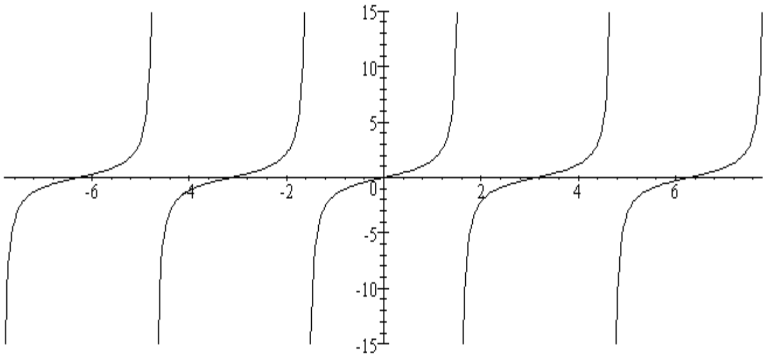


Aquesta funció és contínua perquè es pot dibuixar amb un sol traç sense aixecar el llapis del paper. De fet, totes la funcions polinòmiques són contínues pel mateix motiu. També les funcions exponencials, logarítmiques, la funció sinus i la funció cosinus són contínues; només cal recordar les seves gràfiques, que es poden dibuixar amb un sol traç. En canvi, la funció tangent, cotangent, secant i cosecant no són funcions contínues. Tampoc no són contínues les funcions que tenen en la seva expressió un quocient: quan el denominador és 0, la funció no és contínua, entre altres coses perquè en aquest punt la funció no existeix.

Què és una discontinuïtat i quins en són els tipus?

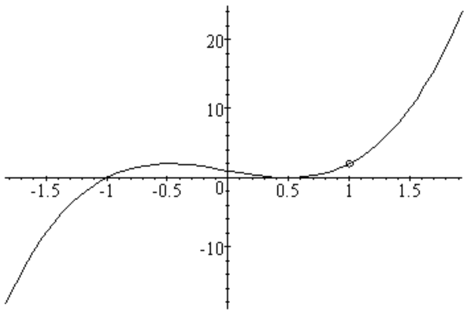
> Si una funció no és contínua en un punt, també es diu que aquesta funció té una discontinuïtat en aquest punt. Bàsicament, hi ha dos tipus de discontinuïtats: les evitables, quan existeix el límit de la funció en el punt de discontinuïtat; i les inevitables, en les quals els límits laterals en aquests punts són diferents. En aquest últim cas, si els límits són nombres, la discontinuïtat és de primera espècie o de salt finit, mentre que si els límits són infinits, la discontinuïtat és asimptòtica.

La funció tangent, en el punt $\pi/2$, no és contínua perquè ni existeix la funció en aquest punt, ni els seus límits laterals coincideixen. De fet, la gràfica d'aquesta funció mostra clarament els punts en els quals no és contínua (anomenats *punts de discontinuïtat* o, senzillament, *discontinuïtats*), és a dir, punts en els quals la gràfica "es trenca", de manera que no es podria dibuixar d'un sol traç sense aixecar el llapis; aquests punts són, en aquest cas, els punts que no pertanyen al domini de la funció, com mostra la gràfica de la funció tangent:



Altres funcions tenen discontinuïtats de diferent tipus: per exemple, la funció:

$$g(x) = \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x - 1}$$



no és contínua quan en $x_0 = 1$, ja que el valor d'aquesta funció no existeix, ja que el denominador de la funció dóna 0 en aquest valor de x (i no es pot dividir mai entre 0). Ara bé, en aquest cas, es pot comprovar que el valor del límit en aquest punt (fent una taula, per exemple) és 2, com es pot veure a la gràfica.
És a dir, la gràfica només s'interromp en aquest punt; de fet, podríem modificar lleugerament la funció perquè fos contínua afegint-hi aquest únic punt que falta. D'aquesta manera, la gràfica es dibuixaria amb un sol traç sense aixecar el llapis del paper. Aquest tipus de discontinuïtats es denominen *evitables*, ja que és molt fàcil resoldre-les afegint un sol punt; en el cas anterior (de la funció tangent) es denominen *discontinuïtats asimptòtiques*. Així, doncs, hi ha dos tipus bàsics de discontinuïtats:

- Evitables

La funció f té una discontinuïtat evitable en el punt x_0 si existeix el límit de la funció en el punt x_0 però no coincideix amb el valor de la funció en aquest punt, o bé aquest no existeix, és a dir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$$

El cas de la funció

$$g(x) = \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x - 1}$$

correspon a aquest tipus de discontinuïtats: en el punt $x = 1$, la funció no existeix, però el límit en aquest punt és 2. Per aconseguir que la funció sigui contínua, n'hi ha prou d'atorgar el valor del límit a la funció en aquest punt. És a dir, si es defineix la funció

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^4-4x^3-3x^2+4x-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ 2 & \text{si } x=1\end{cases}$$

només s'ha modificat la funció anterior en un punt, i amb aquest canvi ja s'evita la discontinuïtat.

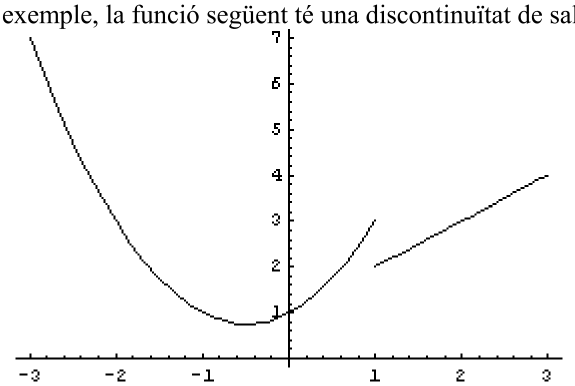
- Inevitables

Són inevitables les discontinuïtats en les quals els límits laterals no coincideixen. És a dir, $f(x)$ té una discontinuïtat inevitable en x_0 si:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

i són de dos tipus:

- o De primera espècie o de salt finit, quan ambdós límits laterals són nombres reals. Per exemple, la funció següent té una discontinuïtat de salt finit en $x_0 = 1$:



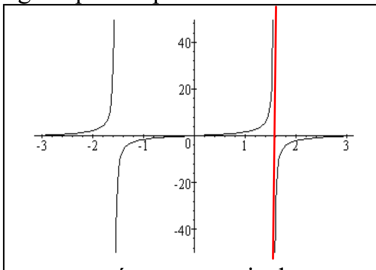
ja que el límit per l'esquerra és 3, i el límit per la dreta, 2.

- o Asimptòtica, quan els límits laterals són infinits. Per exemple, la funció tangent té discontinuïtats asimptòtiques en tots els punts que no són del seu domini, com es pot comprovar fàcilment a la seva gràfica.

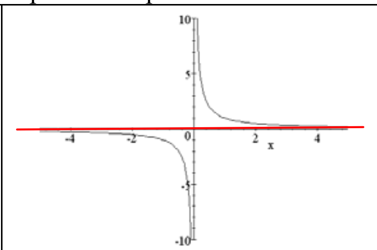
Què és una asímptota i quants tipus d'asímptotes existeixen?

> Una asímptota a una funció és una recta que en tendir la x a un nombre, a $+\infty$, o a $-\infty$, s'acosta a la funció de manera constant fins a fer-se, per dir-ho d'alguna manera, tangent a l'infinit. Segons la seva inclinació, les asímptotes poden ser verticals, horitzontals i obliqües.

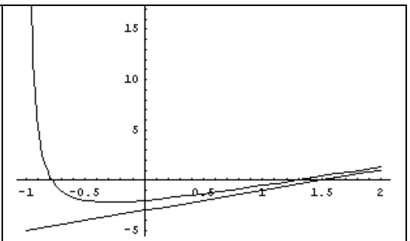
Una asímptota a una funció $f(x)$ és una recta que en tendir la x a un nombre, a $+\infty$, o a $-\infty$ s'acosta a la funció de manera constant fins a fer-se, per dir-ho d'alguna manera, tangent en l'infinit. En aquestes gràfiques es poden veure diferents tipus d'asímptotes:



asímptota vertical



asímptota horitzontal



asímptota obliqua

En la gràfica de l'esquerra es pot veure que quan la x tendeix al punt on la recta talla l'eix X, la funció, per ambdós costats, tendeix a la recta vertical; en la gràfica del centre, quan la x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a l'asímptota. Finalment, en la gràfica de l'esquerra es pot observar que quan x tendeix a $-\infty$, la recta i la funció tendeixen a acostar-se.

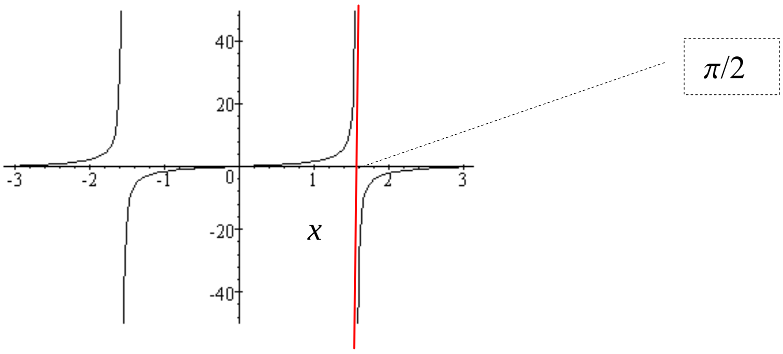
Aquestes gràfiques presenten els tres tipus bàsics d'asímptotes:

- Asímptotes verticals

La funció té una asímptota vertical quan la x tendeix a un valor, i la funció tendeix a $+\infty$ o $-\infty$, és a dir:

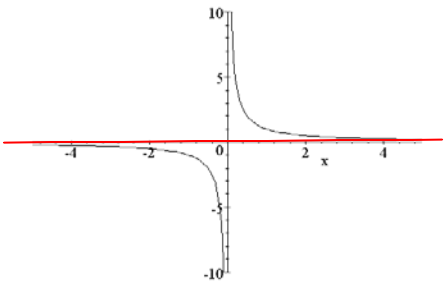
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty \text{ o bé } \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$$

En aquest cas, la recta $x = a$ és una asímptota vertical. Per exemple, en el cas de la funció $f(x)$ = tg x, sabem que en $x = \pi/2$ el límit de la funció és $+\infty$ per l'esquerra i $-\infty$ per la dreta. Per tant, la recta $x = \pi/2$ és doblement asímptota vertical.



- Asímptotes horitzontals

La funció té una asímptota horitzontal quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i la funció tendeix a un valor concret, és a dir:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \text{ o bé } \lim_{x\to-\infty} f(x)=a$$

En aquest cas, la recta $y = a$ és una asímptota horitzontal. Per exemple, per la funció $f(x) = 1/x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$$

Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal, tal com es pot veure en la gràfica adjunta.

- Asímptotes obliqües

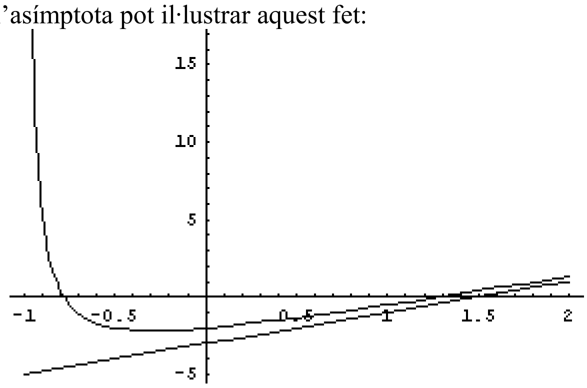
La funció té una asímptota obliqua en la recta $y = ax + b$ quan la x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$, i algun dels límits següents són 0:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0 \text{ o bé } \lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$$

Per exemple, la funció $f(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{x+1}$ té una asímptota obliqua en $y = 2x - 3$, ja que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x+2}{x+1}-(2x-3)=0$$

La gràfica de la funció i l'asímptota pot il·lustrar aquest fet:



Exercicis

3. Troba el domini i els punts de tall amb els eixos (si n'hi ha), de les següents funcions:
    a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
    b. $g(x) = 1/x$
    c. $h(x) = 3$
    d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
    e. $b(x) = \sqrt{x + 1}$
    f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
    g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

4. Indica els punts en què aquestes funcions no són contínues. Raona la resposta.
    a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
    b. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x}$
    c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
    d. $f(x) = \ln(\ln(\sin x))$ (un pèl difícil)

5. Considera la funció $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x}$. Quin valor cal assignar a $f(0)$ perquè la funció f sigui contínua a $x = 0$? Explica-ho.

6. Considera la següent funció:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

Troba el límit de la funció quan x tendeix a aquests valors: 0, 1, -2, $+\infty$, $-\infty$. Estudia la continuïtat d'aquesta funció, dient si presenta discontinuïtats, i de quin tipus.

Solucions

1.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
El domini és tota la recta real perquè és un polinomi.
Els punts de tall són:
Eix Y: Si $x = 0$, $f(x) = 1$, per tant, (0,1)
Eix X: $f(x) = 0$ --> $x = 1$, per tant, (1,0)

b. $g(x) = 1/x$
El domini es tota la recta real excepte els números que anul·len el denominador, és a dir, menys 0. Així R\{0}
Els punts de tall són:
Eix Y: Ja que x no pot ser 0, no existeixen.
Eix X: Si $g(x) = 0$ --> no existeix cap x que ho compleixi. Per tant, no hi ha punts de tall.

c. $h(x) = 3$
El domini és tota la recta real, perquè qualsevol número té la imatge igual a 3..
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $h(x) = 3$, per tant (0,3)
Eix X: $h(x)$ no pot ser mai 0.

d. $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
El domini es tota la recta real, excepte aquells nombres que anul·len el denominador. per tant, el domini és R\{-2}
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $a(0) = -1/2$, per tant, (0,-1/2)
Eix X: si $a(x) = 0$ --> $x^2 - 1 = 0$ --> $x = 1$, o be, $x = -1$. Per tant, (1,0), (-1,0)

e. $b(x) = \sqrt{x+1}$
L'interior de l'arrel ha de ser positiu, per tant, $x + 1 \geq 0$, és a dir, $x \geq -1$. Així, el domini és
$[-1,+\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: Si $x = 0$ --> $b(0) = 1$, per tant, (0,1)
Eix X: Si $b(x) = 0$ --> $x+1=0$ --> $x = -1$, per tant, (-1,0)

f. $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
Com en el cas anterior, $x^2-1 \geq 0$, per tant, el domini és
$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> $c(0)$ no existeix, per tant, no hi ha punts de tall,
Eix X: si $c(x) = 0$ --> $x = 1$ ó $x = -1$, per tant, (-1,0) (1,0).

g. $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$
En aquest cas s'ha d'acomplir: $x^2-4 \geq 0$, és a dir, x ha de pertànyer a $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
a més, $x+5$ no ha de ser 0, d'aquí que x no pugui ser -5.

En definitiva, el domini és: $(-\infty, -5) \cup (-5,-2] \cup [2, \infty)$
Els punts de tall són:
Eix Y: si $x = 0$ --> no es possible.
Eix X: $d(x) = 0$ --> $x = -2$ ó $x = 2$. Per tant, (2,0), (-2,0)

2.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Aquesta funció no és contínua (més concretament, no existeix) en els punts en que l'arrel és negativa, que corresponen als punts de l'interval (-2,2).

b. $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

La funció pot no ser contínua al punts on el denominador es fa 0, és a dir, quan x = 0. En aquest cas el límit és igual a infinit i la funció no existeix en aquest punt.

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En aquest cas, els límits per l'esquerra i per la dreta de la funció quan x tendeix a 0 és igual a $+\infty$, si la x és positiva, i $-\infty$ si la x és negativa; en canvi, el valor de la funció en aquest punt és 1. Per tant, és una funció que no és contínua.

d. $f(x) = \ln(\ln(\sin x))$ (aquest, un pèl difícil)

L'única dificultat d'aquest exercici és comprovar que el domini d'aquesta és buit, és a dir, no hi ha cap nombre que pugui substituir-se en aquesta funció. per tant, ja no es pot parlar de continuïtat de la funció en cap punt, perquè la funció no existeix per a cap punt. Anem a veure-ho.

ln (ln (sin x))): el ln només es pot aplicar a nombres estrictament positius, per tant, ln (sin x) > 0. Per a que aquest ln sigui més gran que 0, la funció ha d'estar avaluada en punts que siguin més grans que 1. Per tant, sin x > 1. Però no és possible que el sinus sigui més gran que 1. En definitiva, el domini d'aquesta funció és el conjunt buit, com ja havíem avançat.

3. Cal que el límit en el 0 sigui igual al valor de la funció; per tant, cal calcular, si existeix, aquest límit:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{8x^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

Per tant, el valor de la funció en 0 ha de ser 1/3, $f(0) = 1/3$

4. $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{-3}{4}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{-2}{9}$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

És continua a tots els reals, excepte a $x = 1$, $x = 2$, perquè es tracta d'una funció racional.

Discontinuïtat evitable a $x = 1$
Discontinuïtat de asimptòtica a $x = -2$

Derivada d’una funció

Derivada d'una funció

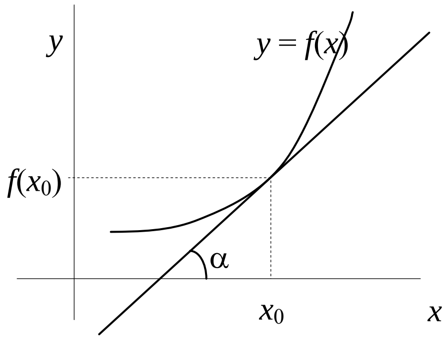
La derivada d'una funció, f, en un punt, x_0, i que s'indica $f'(x_0)$ es defineix com el límit:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Si aquest límit no existeix, es diu que la funció $f(x)$ no és derivable en x_0.

Interpretació de la derivada:
La derivada de la funció $f(x)$ en el punt x_0 és el pendent de la recta tangent en aquest punt. És a dir,

$$f'(x_0) = \text{tg}\ \alpha$$



La derivada d'una funció $f(x)$ és aquella funció que associa a cada valor la derivada d'aquesta funció. La funció derivada es designa per $f'(x)$. En aquesta taula s'exposen les derivades principals:

Taula de derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	Exemple
k essent k un nombre	0	$f(x) = 3$ $f'(x) = 0$
x	1	
x^n essent n un nombre enter	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
sin x	cos x	
cos x	–sin x	
tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$f(x) = 3^x$ $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$ $g(x) = e^x$ $g'(x) = e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$f(x) = \log_3 x$ $f'(x) = (1/x) \cdot \log_3 e$ $g(x) = \ln x$ $g'(x) = 1/x$
arc sin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
arc cos x	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	
arc tan x	$\frac{1}{1+x^2}$	

Regles de derivació

- Si f i g són dues funcions, la derivada del producte d'ambdues, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, és igual a:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada del quocient d'ambdues, $h(x) = f(x)/g(x)$, és igual a:

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada de la composició d'ambdues es calcula utilitzant la denominada *regla de la cadena*. Si $h(x) = f(g(x))$, la seva derivada és igual a:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Per derivar una potència de dues funcions $h(x) = f(x)^{g(x)}$, primer cal extreure el ln d'aquesta funció:

$$\ln h(x) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln\left(f(x)\right)$$

derivant aquesta funció s'obté:

$$h'(x) = h(x)\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

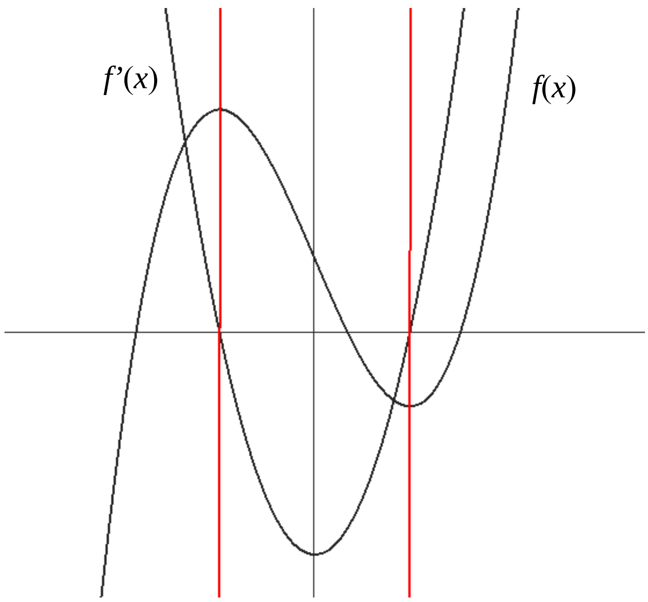
El creixement d'una funció i la seva funció derivada

- Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és positiva; a més, com més ràpidament creix la funció, més gran serà el valor de la derivada en el punt i viceversa:

$f'(x_0) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ és creixent en x_0.

- Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és negativa; a més, com més ràpidament decreix la funció, més petit serà el valor de la derivada en el punt, i viceversa.

$f'(x_0) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ és decreixent en x_0.



$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$ creixent	$f(x)$ decreixent	$f(x)$ creixent

El desenvolupament del càlcul diferencial i integral

El càlcul diferencial (és a dir, el càlcul de derivades) i integral constitueix una de les grans conquestes intel·lectuals de la humanitat. Després del seu descobriment, la matemàtica va canviar completament: la geometria, l'àlgebra, l'aritmètica i la trigonometria es s'observarien des d'una nova perspectiva teòrica. Els nous conceptes i mètodes també tindrien un impacte extraordinari en la descripció i manipulació de la realitat física.
Alguns ja s'havien acostat al concepte de límit, com Zenó d'Elea, Eudox de Cnidos, Arquimedes de Siracusa, a la Grècia Antiga. Però es va haver d'esperar, tanmateix, fins al segle XVII per tenir la maduresa social, científica i matemàtica que permetria construir el càlcul diferencial i integral que avui coneixem.
Els grans creadors del càlcul diferencial van ser l'anglès Isaac Newton (1642-1727) i l'alemany Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De manera diferent i independent, aquests grans intel·lectuals dels segles XVII i XVIII sistematitzaren i van generalitzar idees i procediments que havien estat abordats i amb èxit parcial des de l'Antiguitat. Abans de Newton i Leibniz es van fer diferents aportacions d'importància associades al nom de grans personalitats, com, per exemple, Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (l596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Galileo Galilei (1564-1642), Christian Huygens (1629-1695, amic de Leibniz), John Wallis (1616-1703, amic de Newton), Bonaventura Cavalieri (1598-1647, deixeble de Galileu), Evangelista Torricelli (1608-1647, deixeble de Galileu) i Isaac Barrow (1630-1677, mestre de Newton). Cal destacar la contribució decisiva per al treball de Newton i Leibniz que va representar la geometria analítica (l'expressió de punts geomètrics en coordenades i l'ús de mètodes algebraics), creada independentment per Descartes i Fermat.
La construcció del càlcul va ser una part important de la revolució científica que va viure l'Europa del segle XVII. A part dels noms que hem esmentat, els de William Harvey (1578-1657), Francis Bacon (1561-1626), Pierre Gassendi (1592-1655), Robert Boyle (1627-1691), Robert Hooke (1635-1703) estan vinculats a grans contribucions en l'anatomia, la física, la química, etc.
En aquest sentit, el nom de Newton no només s'associa a la creació del càlcul, sinó també al que fou la principal expressió de la revolució científica del segle XVII: la síntesi de l'astronomia i la mecànica que va fer en la seva obra *Principis matemàtics de la filosofia natural*, publicada el 1687. Mostrant matemàticament que el sistema del món se sostenia per la llei de la gravitació universal, els seus textos es van convertir en la base de la nova ciència. La física newtoniana només va a començar a ser "superada" per la física relativista d'Albert Einstein a les primeries del segle XX.

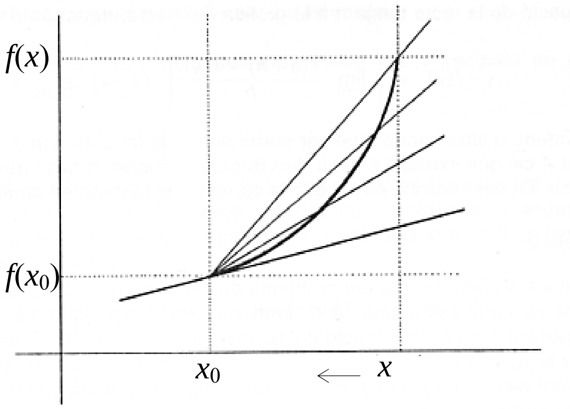
Què és la derivada d'una funció en un punt i quina és la seva interpretació?

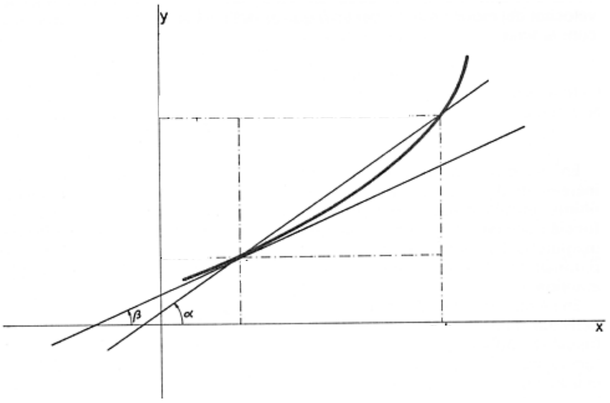
> La derivada d'una funció en un punt és igual a cert límit que coincideix, geomètricament, amb el pendent de la recta tangent en aquest punt. La derivada d'una funció *f*(x) en un punt x_0 s'indica de la manera següent: $f'(x_0)$.

La derivada d'una funció en un punt és un dels conceptes que han revolucionat la matemàtica moderna. No és un concepte senzill però, a canvi, té moltíssimes aplicacions. A més, el procés de càlcul de derivades no és excessivament complicat si se segueixen unes senzilles regles.
La derivada d'una funció, *f*, en un punt, x_0, i que s'indica $f'(x_0)$ es defineix a partir del càlcul d'un límit:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Evidentment, és possible que aquest límit no es pugui calcular en el punt x_0; en aquest cas, es diu que la funció no és ***derivable*** en el punt x_0. Ara bé, pràcticament totes les funcions que s'han introduït són derivables en tot el seu domini.
Aquesta estranya definició de derivada d'una funció en un punt està íntimament lligada a la recta tangent a la funció en aquest punt. En efecte, en la gràfica següent es pot observar una funció *f*, la seva tangent en el punt (x_0,$f(x_0)$) i diferents rectes que passen per aquest punt i per punts de la funció (x,$f(x)$) que es van acostant a (x_0,$f(x_0)$).





El quocient $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ és el quocient dels dos costats d'un triangle la hipotenusa del qual és la recta que passa per (x_0,$f(x_0)$) i (x,$f(x)$). Ara bé, sabem que aquest quocient no és més que la tangent de l'angle que forma aquesta recta amb l'eix X, és a dir, el pendent d'aquesta recta. Com més a prop està x de x_0, més a prop es troba la recta que passa per (x_0,$f(x_0)$) i (x,$f(x)$) de la recta tangent a la funció en x_0. Per tant, en el límit, aquestes rectes coincideixen i, per això, el límit del quocient anterior ha de ser el pendent de la recta tangent en el punt (x_0,$f(x_0)$). Aquest pendent no és més que la tangent de l'angle β, angle al qual tendeix l'angle α.

Com es calcula la derivada d'una funció en un punt en alguns monomis?

> El càlcul de la derivada d'una funció en un punt és senzill, encara que resulta una mica complicat perquè requereix el càlcul d'un límit. És molt útil realitzar-lo en diversos monomis senzills per poder deduir una fórmula general per la derivació de polinomis.

Es pot calcular la derivada d'una funció en un punt en alguns exemples aplicant la definició de derivada d'una funció en x_0:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

- Sigui $f(x) = 3$, una funció constant; calculem la seva derivada en el punt $x = 2$, aplicant la definició:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-f(x)}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{3-3}{2-x}=0$$

És a dir, la derivada de la funció $f(x) = 3$ en el punt $x = 2$ és igual a 0. De fet, la derivada d'aquesta funció en qualsevol punt és igual a 0 perquè el límit es calcula de manera semblant. En general, la derivada d'una funció sempre constant en un punt qualsevol és sempre igual a 0.

- Sigui $f(x) = x$; calculem la seva derivada en el punt $x = 3$ aplicant la mateixa definició:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(3)-f(x)}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{3-x}=1$$

Per tant, la derivada de $f(x) = x$ en el punt $x = 3$ és igual a 1, $f'(3) = 1$. No costa gaire adonar-se que la derivada en qualsevol punt d'aquesta funció també és igual a 1.

- Sigui $f(x) = x^2$; calculem la seva derivada en el punt $x = 6$ aplicant la definició:

$$f'(6)=\lim_{x\to 6}\frac{f(6)-f(x)}{6-x}=\lim_{x\to 6}\frac{6^2-x^2}{6-x}$$

En aquest cas, sabem que $6^2 - x^2 = (6 - x)(6 + x)$, per tant,

$$f'(6)=\lim_{x\to 6}\frac{6^2-x^2}{6-x}=\lim_{x\to 6}\frac{\cancel{(6-x)}(6+x)}{\cancel{6-x}}=\lim_{x\to 6}(6+x)=2\cdot 6=12$$

Així, doncs , $f'(6) = 2 \cdot 6 = 12$.
En general, es pot observar que, seguint el mateix procediment, la derivada d'aquesta funció $f(x) = x^2$ en qualsevol punt és $f'(x) = 2x$.

- Sigui $f(x) = x^3$; calculem la seva derivada en el punt $x = 4$, aplicant la definició:

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(4)-f(x)}{4-x}=\lim_{x\to 6}\frac{4^3-x^3}{4-x}$$

En aquest cas, sabem que $4^3 - x^3 = (4 - x)(4^2 + 4x + x^2)$, per tant,

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{4^3-x^3}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(4-x)}(4^2+4x+x^2)}{\cancel{4-x}}=\lim_{x\to 4}(4^2+4x+x^2)=3\cdot 4^2=48$$ Així, doncs , $f'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$.
En general, es pot observar que, seguint el mateix procediment, la derivada d'aquesta funció $f(x) = x^3$ en qualsevol punt és $f'(x) = 3x^2$.

Què és la funció derivada i com es calcula?

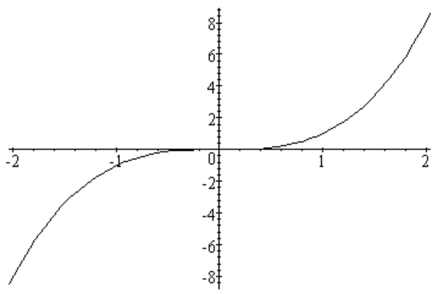
> La derivada d'una funció $f(x)$ és aquella funció que associa a cada valor la derivada de f. La funció es designa per $f'(x)$. Encara que teòricament s'hauria de calcular el límit que condueix a la derivada per cada punt, en la pràctica existeix una taula amb les funcions derivades de les principals funcions.

En calcular la derivada d'una funció, f, en tots i cadascun dels punts del seu domini, obtenim una nova funció, la funció derivada de f, que es designa f', que fa correspondre a cada valor el valor de la derivada de la funció f en aquest punt. El procés de trobar la funció derivada d'una funció donada es denomina *derivar la funció*.

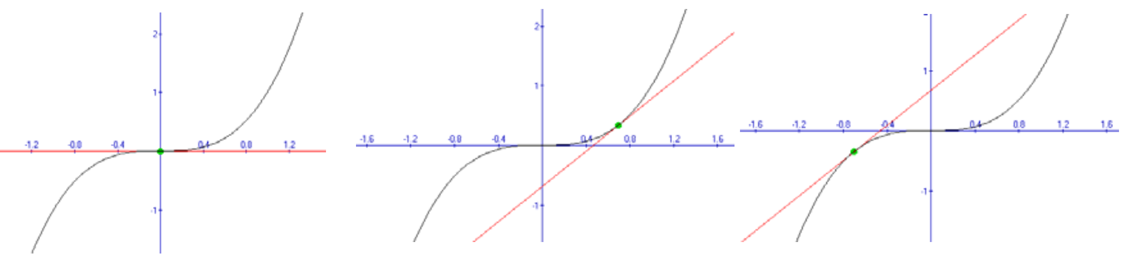
En principi, pot semblar que per derivar qualsevol funció s'hauria de calcular f' per a tots i cadascun dels punts d'una funció (és a dir, calcular el límit que defineix la derivada en un punt); això és, evidentment, impossible. Ara bé, analitzant aquests límits que condueixen a la derivada per diferents funcions (com s'ha vist per diferents monomis), s'ha arribat a una taula amb les derivades de les principals funcions conegudes. Aquesta és la taula:

Taula de derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	Exemples
k essent k un nombre	0	$f(x) = 3$ $\quad f'(x) = 0$
x	1	
x^n essent n un nombre enter	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$f(x) = 3^x$ $\quad f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$ $g(x) = e^x$ $\quad g'(x) = e^x$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$	$f(x) = \log_3 x$ $\quad f'(x) = (1/x) \cdot \log_3 e$ $g(x) = \ln x$ $\quad g'(x) = 1/x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$\dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Estudiem, per exemple, el cas de la funció $f(x) = x^3$. La gràfica d'aquesta funció és:



Sabem que la derivada d'aquesta funció en un punt qualsevol és igual al pendent de la recta tangent; aquests gràfics mostren algunes de les tangents en diferents punts:



En primer lloc, podem observar la tangent en el punt 0, que curiosament és el mateix eix X, una recta horitzontal; el seu pendent és, evidentment, 0. Així, doncs, podem afirmar que la derivada de la funció 0 és 0, $f'(0) = 0$. En segon lloc, es pot observar que la funció f sempre és creixent, amb la qual cosa la seva derivada ha de ser sempre positiva (és a dir, la recta tangent ha de ser creixent en tot punt, excepte en el 0). En les dues tangents que hem traçat s'observa aquest fet: ambdues són rectes creixents (pendent positiu); a més, no és difícil adonar-se que la derivada és la mateixa per a valors amb el mateix valor

absolut: en les dues últimes il·lustracions es pot observar que les tangents en –0,7 i en 0,7 tenen el mateix pendent. Per això, $f'(-0{,}7) = f'(0{,}7)$. Així, doncs, la funció derivada ha de ser simètrica respecte de l'eix d'ordenades.
Vegem si aquestes característiques es compleixen en la funció derivada que obtenim mitjançant l'ús de la taula de les derivades. Segons aquesta, $f'(x) = 3x^2$. Evidentment, $f'(0) = 0$; la funció derivada és sempre positiva i simètrica respecte de l'eix d'ordenades (es tracta d'una funció quadràtica molt senzilla), tal com havíem avançat. Es pot comprovar en els valors del triple gràfic anterior:
$f'(0{,}7) = 3 \cdot (0{,}7)^2 = 1{,}47$ i $f'(-0{,}7) = 3 \cdot (-0{,}7)^2 = 1{,}47$.

Quines són les regles de la derivació?

> Les regles de la derivació permeten derivar un gran nombre de funcions i permeten calcular: la derivada de la suma de funcions, la derivada d'un producte de funcions, la derivada d'un quocient de funcions, la derivada de la composició de funcions i la derivada d'una potència de funcions.

La taula de derivades, per si mateixa, no permet calcular, per exemple, la derivada d'un polinomi. Ara bé, hi ha una sèrie de regles per la suma, resta, multiplicació, divisió i composició de funcions que són de fàcil aplicació i que possibiliten el càlcul de la derivada d'un gran nombre de funcions:

- La derivada de la suma de funcions és igual a la suma de les derivades de cadascuna de les funcions.

Per exemple, si $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$, la derivada de la funció suma, és a dir $h(x) = x^3 + x^2$, és igual a la suma de les derivades de cadascuna d'elles: $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$, per tant, $h'(x) = 3x^2 + 2x$. Aquesta regla és similar per la resta de funcions: per exemple, si $c(x) = x^2 - x^5$, llavors $c'(x) = 2x - 5x^4$.

- Si f i g són dues funcions, la derivada del producte d'ambdues, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ és igual a:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

És a dir, s'ha de derivar la primera funció i multiplicar el resultat per la segona funció sense derivar; després s'ha de sumar el resultat al producte de la primera sense derivar per la derivada de la segona. Per exemple, $h(x) = 3x^5$ és el producte de $f(x) = 3$ per $g(x) = x^5$; la derivada de $f(x)$ és $f'(x) = 0$ i la derivada de $g(x)$ és $g'(x) = 5x^4$; així

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \cdot x^5 + 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$$

En altres paraules, la derivada d'un monomi és igual al producte del coeficient per la derivada de la part literal. Un altre exemple: la derivada de $7x^4$ és $28x^3$.
Vegem un exemple amb funcions no polinòmiques: si $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \sin x$, i $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \cos x \cdot \sin x$, la derivada de $h(x)$ és $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$. En definitiva:

$$h'(x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2\, x$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada del quocient d'ambdues, $h(x) = f(x)/g(x)$, és igual a:

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Per exemple, donada la funció $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 4}{2x^3 + x}$, la podem considerar com el quocient de $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ i $g(x) = 2x^3 + x$; les derivades d'aquestes funcions són $f'(x) = 6x - 4$ i $g'(x) = 6x^2 + 1$. Així:

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{(6x-4)\cdot\left(2x^3+x\right) - \left(3x^2-4x+4\right)\cdot\left(6x^2+1\right)}{\left(2x^3+x\right)^2}$$

és a dir,

$$h'(x) = \frac{-6x^4 + 16x^3 - 21x^2 - 4}{x^2\left(2x^2+1\right)^2}$$

- Si f i g són dues funcions, la derivada de la composició d'ambdues es calcula utilitzant la denominada *regla de la cadena*. Si $h(x) = f(g(x))$ la seva derivada és igual a:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Per exemple, si $f(x) = \ln x$ i $g(x) = 3x^2 - 1$, la funció $(fog)(x) = f(g(x)) = \ln(3x^2 - 1)$ s'ha de derivar així:

$$(fog)'(x) = f'(g(x) \cdot g'(x) = (1/(3x^2 - 1)) \cdot 6x$$

ja que $f'(x) = 1/x$ i, per tant, $f'(g(x)) = 1/(3x^2 - 1)$; a més, $g'(x) = 6x$.

Amb aquestes regles i la taula de derivades es pot derivar una gran quantitat de funcions.

- Per derivar una potència de dues funcions $h(x) = f(x)^{g(x)}$, en primer lloc, s'ha d'extreure el ln d'aquesta funció:

$$\ln h(x) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln\left(f(x)\right)$$

D'aquesta manera s'ha eliminat la funció de l'exponent. Ara només cal derivar ambdós membres de la igualtat utilitzant la regla de la cadena i la regla del producte de funcions:

$$\left(\ln h(x)\right)' = \frac{1}{h(x)} h'(x)$$

$$\left(g(x)\ln\left(f(x)\right)\right)' = g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}$$

D'aquesta manera:

$$\frac{1}{h(x)} h'(x) = g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}$$

és a dir:

$$h'(x) = h(x)\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)$$

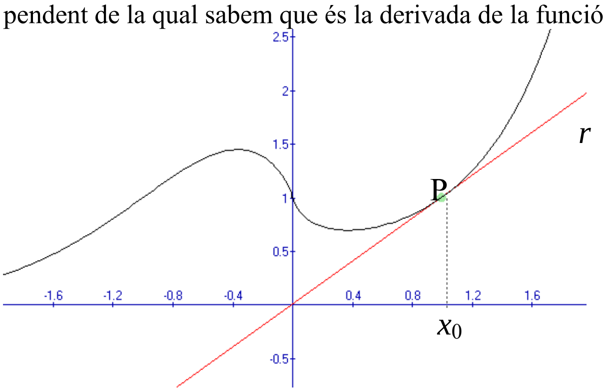
Per exemple, per derivar $h(x) = x^{\sin x}$, essent $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$:

$$h'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

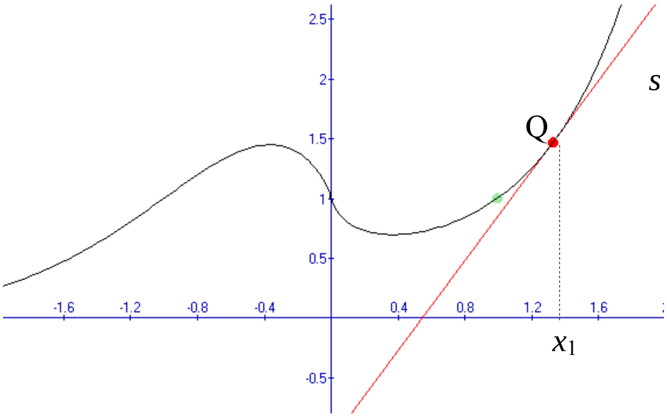
Quina relació hi ha entre la derivada d'una funció i el seu creixement?

> La derivada de la funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent en aquest punt. Per això mateix, si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és positiva; a més, com més ràpidament creix la funció, més gran serà el valor de la derivada en el punt i viceversa. De la mateixa manera, si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és negativa; a més, com més ràpidament decreix la funció, menor serà el valor de la derivada en el punt, i viceversa.

En la figura següent, en el punt P de la gràfica de la funció s'ha traçat la recta r tangent a la gràfica en aquest punt P, és a dir, una recta que talla la gràfica en el punt P, sense travessar-la (recolzant-s'hi), el pendent de la qual sabem que és la derivada de la funció en x_0.

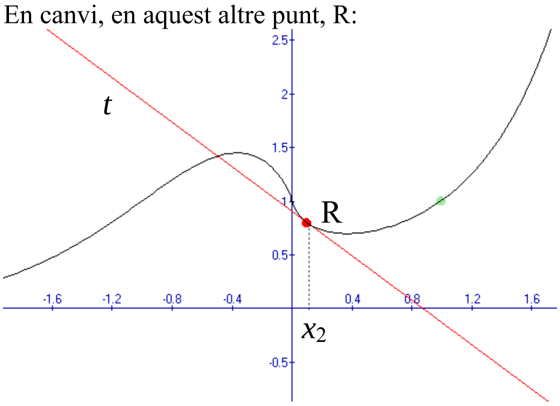


Si dibuixem la tangent en altre punt,



la recta tangent, *s*, a la funció *f* en el punt Q té un pendent superior a la recta tangent, *r*, en el punt P, com es pot observar comparant ambdues il·lustracions. Així, podem assegurar que la derivada de la funció *f* en x_0 és menor que la derivada de *f* en x_1. A més, en aquests dos punts, la derivada ha de ser positiva perquè sabem que si la recta és creixent, el seu pendent és positiu. Podem generalitzar dient que sempre que la funció sigui creixent (com en els punts de l'exemple), la derivada serà positiva perquè el pendent de la recta tangent ho és (ja que és una recta creixent) i, a més: $0 < f'(x_0) < f'(x_1)$

En canvi, en aquest altre punt, R:



és evident que el pendent de la tangent és negatiu; per tant, la derivada de la funció *f* en x_2 ha de ser, forçosament, negativa:

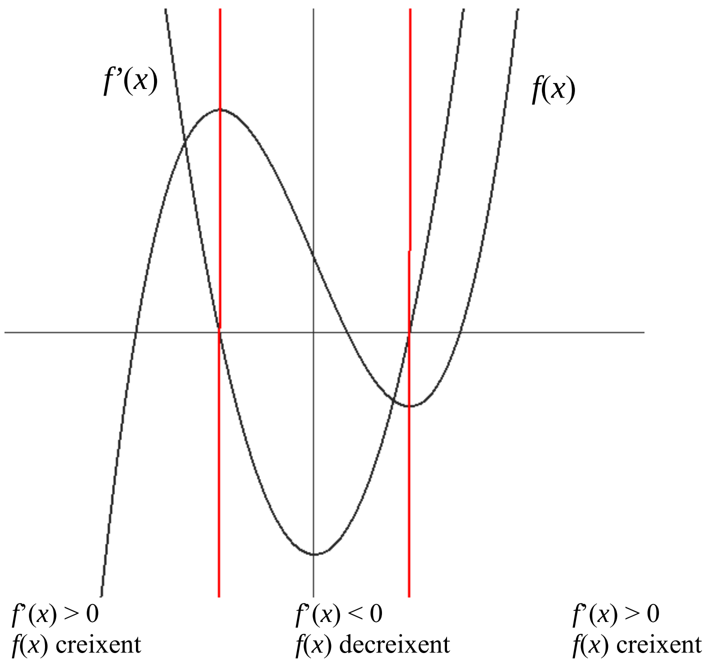
$$f'(x_2) < 0$$

En definitiva, podem afirmar que:

- Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és positiva; a més, com més ràpidament creix la funció, més gran serà el valor de la derivada en el punt i viceversa.

- Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és negativa; a més, com més ràpidament decreix la funció, menor serà el valor de la derivada en el punt, i viceversa.

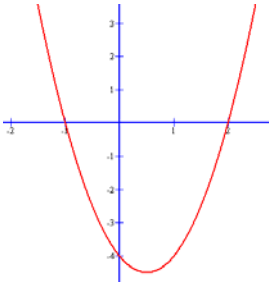
Per exemple, la derivada de la funció $f(x) = x^3 - 3x + 1$ és $f'(x) = 3x^2 - 3$; essent una funció quadràtica és fàcil deduir que és positiva en l'interval $(-\infty,-1)$ i $(1,+\infty)$, i és negativa en l'interval $(-1,1)$. Per tant, podem dir que $f(x)$ és creixent en l'interval $(-\infty,-1)$ i $(1,+\infty)$, i decreixent en $(-1,1)$. Es pot comprovar en aquesta gràfica:


f'(x)
f(x)
f'(x) > 0
f(x) creixent
f'(x) < 0
f(x) decreixent
f'(x) > 0
f(x) creixent

Exercicis

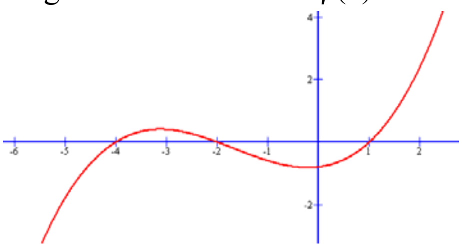
1. Calcula les derivades d'aquestes funcions:
    a. $f(x) = x \cdot \sin x$
    b. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$
    c. $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$
    d. $t(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln x}$
    e. $b(x) = e^{3x^2 - x - 1}$

2. Si aquesta és la gràfica de la derivada d'una funció, $f'(x)$:



Contesta raonadament aquestes preguntes sobre $f(x)$:
    a. La funció a $x = 0$ és creixent o decreixent?
    b. La funció a $x = 2.3$ és creixent o decreixent?
    c. Té cap mínim?
    d. Té cap màxim?
    e. Dóna els intervals de creixement i decreixement de la funció.

3. La gràfica d'una funció $f(x)$ és:



Contesta raonadament aquestes preguntes:
    a. Quin és el signe de la derivada, $f'(x)$, en $x = -3$? I en $x = 0$?
    b. Hi ha cap punt en què la derivada, $f'(x)$, sigui 0? Quina condició compleixen aquests punts?
    c. Dóna el signe de la derivada, $f'(x)$, en tots els punts del domini.

Solucions

1.

a. Aplicant la regla de la cadena:
$f'(x) = \sin x + x\cos x$

b. Aplicant la derivació d'un quocient:
$$g'(x) = \frac{2(x+1)-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

c. Aplicant la derivació d'una arrel i la regla de la composició de funcions:
$$h'(x) = \frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}} =$$

d. $$t'(x) = \frac{e^{2x+1}\ln x - \frac{e^{2x+1}}{x}}{\left(\ln x\right)^2}$$

e. $b'(x) = (6x-1)e^{3x^2-x-1}$

2.

a. És decreixent perquè la seva derivada és negativa.
b. És creixent, perquè la seva derivada és positiva.
c. Sí, al punt $x = 2$, perquè la derivada passa de ser negativa a positiva.
d. Sí, al punt $x = -1$, perquè la derivada passa de ser positiva a negativa.
e. La funció és decreixent a [-1,2], perquè la derivada és negativa, i creixent a la resta, $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

3.

a. És positiva, perquè la funció és creixent.
És negativa, perquè la funció és decreixent.
b. Sí, en els punts $x = -3, x = 0$, aproximadament, perquè són un màxim i un mínim locals de la funció.
c. La derivada és negativa a (-3,0), aproximadament, perquè la funció és decreixent, mentre que és positiva a $(-\infty,-3)\cup(0,\infty)$, perquè la funció és creixent.

Aplicacions de la derivada

Aplicacions de la derivada

Les aplicacions de la derivada són molt àmplies; entre les més importants hi ha:

Localització d'extrems (màxims i mínims) d'una funció

Un màxim és un punt de la funció la imatge de la qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper al punt. Un mínim és un punt de la funció la imatge del qual és menor o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper al punt:

$(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$

$(x_0,f(x_0)$ mínim de $f(x)$ si per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Hi ha dues maneres de trobar els màxims i mínims d'una funció:

1. Trobant la primera i segona derivades:

   $(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$

   $(x_0,f(x_0)$ mínim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.

2. Trobant la primera derivada i comprovant el creixement de la funció:

   $(x_0,f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa.

   $(x_0,f(x_0)$ mínim de $f(x)$ si $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva.

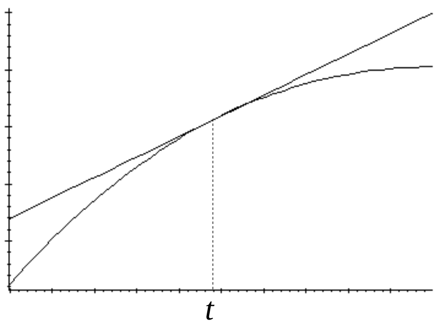
Problema d'extrems: un problema que pretengui resoldre una situació en la qual una certa magnitud M depèn d'una altra magnitud x, de manera que M = $f(x)$, i s'ha de trobar el màxim o el mínim de M.

1. En el cas d'un problema de màxims, es tractarà de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) < 0$
2. En el cas d'un problema de mínims, es tractarà de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) > 0$.

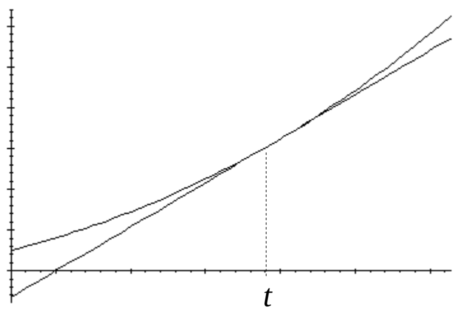
Concavitat i convexitat d'una funció

Una funció es diu que és convexa en un punt t quan aquesta funció és més petita que la tangent en un entorn d'aquest punt.

Una funció es diu que és còncava en el punt t quan aquesta funció és més gran que la tangent en un entorn d'aquest punt.



Funció convexa



Funció còncava

La concavitat i la convexitat d'una funció es poden trobar fent servir la derivació:

1. Una funció $f(x)$ és convexa en un punt x_0 si $f''(x_0) < 0$.
2. Una funció $f(x)$ és còncava en un punt x_0 si $f''(x_0) > 0$.

Un punt d'inflexió d'una funció és un punt en el qual la funció passa de ser còncava a convexa, o viceversa. Un punt d'inflexió d'una funció compleix que la seva 2a. derivada és 0.

Representació de la gràfica d'una funció

Per la representació d'una funció cal conèixer aquesta informació:

- Domini de la funció.
- Punts de tall amb els eixos.

Es tracta de buscar els punts de la gràfica del tipus:

$(0, f(0))$ o bé, $(x,0)$

- Simetries.

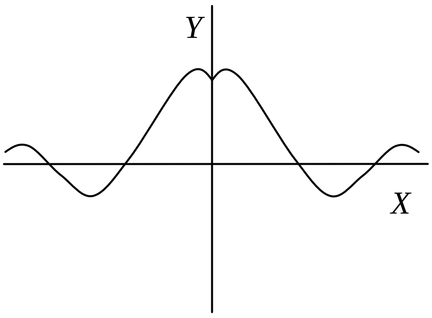
Es diu que una funció $f(x)$ és simètrica respecte de l'eix d'ordenades, si es compleix:

$$f(-x) = f(x)$$

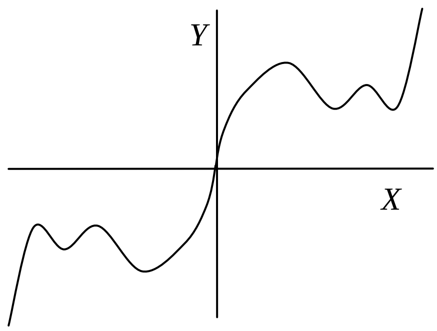
En canvi, una funció és simètrica respecte de l'origen si:

$$f(-x) = -f(x)$$

Gràficament es tradueix en representacions d'aquest tipus:



Funció simètrica respecte de l'eix d'ordenades



Funció simètrica respecte de l'origen

- Intervals de creixement i decreixement

Es poden trobar estudiant el signe de la funció derivada.

- Màxims i mínims

S'han de trobar estudiant quan s'anul·la la funció derivada.

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Per estudiar la concavitat i convexitat hem de conèixer la 2a. derivada.

- Asímptotes

Per descobrir les asímptotes d'una funció s'han de comprovar els límits d'aquesta funció en $+\infty$, $-\infty$ i en els punts que no pertanyen al domini.

Exemple: Representar $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

- Domini de la funció

Tots els punts excepte pel –1 i l'1.

- Punts de tall amb els eixos

L'únic punt de tall amb els eixos és (0,0).

- Simetries

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

Simètrica respecte l'origen.

- Zones de creixement i decreixement

  $f(x)$ és creixent en $(-\infty,-\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},+\infty)$

  $f(x)$ és decreixent en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$
- Màxims i mínims

En $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3^3}}{2}\right)$ hi ha un màxim; en $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3^3}}{2}\right)$ hi ha un mínim.

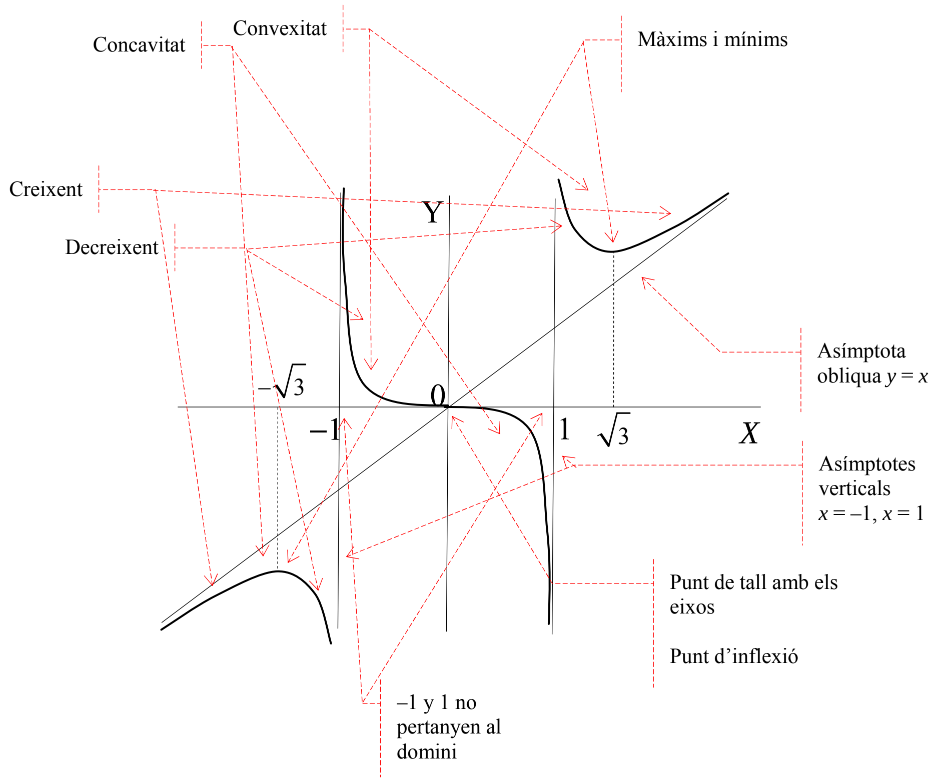
- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

En $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$ $f(x)$ és còncava.
En $(-1,0)$ i $(1,\infty)$ $f(x)$ és convexa.
En $x = 0$, la funció té un punt de inflexió perquè passa de convexa a còncava.

- Asímptotes

Asímptotes verticals:
Les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.
Asímptotes obliqües:
La recta $y = x$ és una asímptota obliqua.

Representació:



Com es localitzen màxims i mínims d’una funció utilitzant la seva derivada?

Una de les aplicacions bàsiques de les derivades és la recerca de màxims i mínims. Una funció $f(x)$ té un màxim en x_0 si $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) < 0$; una funció té un mínim en x_0 si $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f'(x_0) > 0$. També es poden trobar màxims i mínims analitzant el signe de la derivada de $f(x)$ en un entorn de x_0.

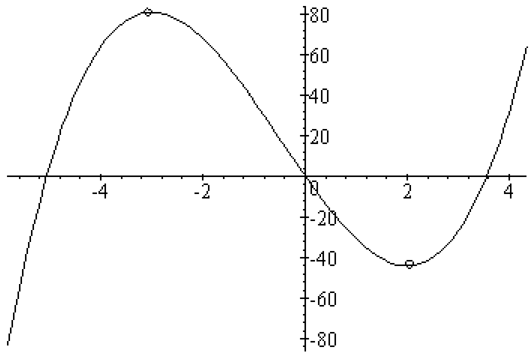
La derivació té múltiples aplicacions, des del càlcul de certs elements interessants per al traçat de la gràfica d’una funció, fins a problemes de maximització o minimització (en general, problemes d’extrems).

Una de les aplicacions més importants de les derivades és la recerca de màxims i mínims d’una funció. Un màxim és un punt de la funció la imatge de la qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper a aquest punt. Un mínim és un punt de la funció la imatge de la qual és menor o igual que la imatge de qualsevol punt que es trobi proper a aquest punt:

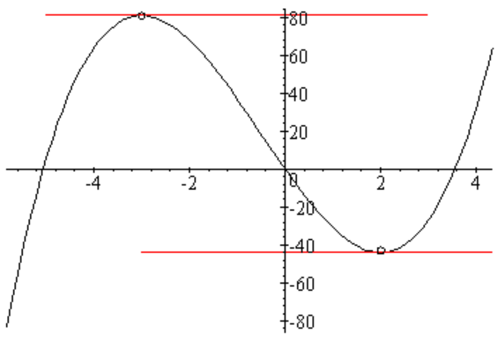
$(x_0, f(x_0))$ màxim de $f(x)$ si per a tot x d’un entorn de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$

$(x_0, f(x_0))$ mínim de $f(x)$ si per a tot x d’un entorn de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Per exemple, en la gràfica de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$



s’han destacat dos punts de la funció que corresponen a un màxim local i a un mínim local d’aquesta (local perquè són un màxim i un mínim en un entorn del punt, però no un màxim i un mínim globals); en el cas del màxim podem observar que la funció abans del màxim és creixent, mentre que després del màxim és decreixent. Així, doncs, abans del màxim la derivada de la funció ha de ser positiva (si la funció és creixent, la derivada és ne[illegible]a), mentre que després del màxim la derivada de la funció ha de ser negativa (si la funció és decreixent, la derivada és negativa). Per tant, la derivada passa de ser positiva a ser negativa en el punt màxim; no queda altra possibilitat que la derivada de la funció en el màxim sigui igual a 0, és a dir, $f'(x) = 0$.



De la mateixa manera, la funció abans del mínim és decreixent, mentre que després del mínim és creixent. Així, doncs, la derivada abans del mínim ha de ser negativa i després del mínim ha de ser positiva. Per tant, la derivada en el mínim ha de ser igual a 0. En definitiva, si un punt de la funció és un mínim o un màxim local, la seva derivada ha de ser zero en aquests punts. També es pot comprovar visualment, traçant les tangents en el màxim i el mínim, com s’observa a la gràfica.

Evidentment, la recta tangent és horitzontal en ambdós casos, és a dir, el seu pendent és igual a 0, que, com és sabut, correspon a la derivada de la funció en el punt corresponent al màxim i al mínim.

Podem comprovar, en aquest cas, en quins punts s’anul·la la derivada:

$f'(x) = 6x^2 - $ [illegible] $36 = 0$

Es tracta dels punts $x = 2$ i $x = -3$, tal com es podia observar en la imatge.

Ara bé, es pot saber quin dels dos és màxim o mínim sense mirar la gràfica de la funció? Sí que es pot saber i, a més, és molt senzill; per fer-ho només cal derivar la funció una altra vegada, és a dir, calcular la segona derivada utilitzant les mateixes regles de derivació. En el cas de l’exemple:

$f''(x) = 12x + 6$

Després de derivar una altra vegada la funció, la regla per saber si un punt és màxim o mínim diu així:

Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$, llavors el punt $(a, f(a))$ és un màxim.

Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$, llavors el punt $(a, f(a))$ és un mínim.

Si $f''(a)$ és igual a 0, llavors no podem dir res sobre si es tracta d'un màxim o un mínim.

Comprovem-ho amb la funció de l'exemple:

$f''(-3) = 12 \cdot (-3) + 6 < 0$, Així, doncs, el punt $(-3, f(-3))$ és un màxim, com ja sabíem.

$f''(2) = 12 \cdot 2 + 6 > 0$, Així, doncs, el punt $(2, f(2))$ és un mínim, com ja sabíem.

Una altra manera senzilla de saber si la funció té un màxim o un mínim en cert punt és comprovar com és el creixement en l'entorn del punt. D'aquesta manera:

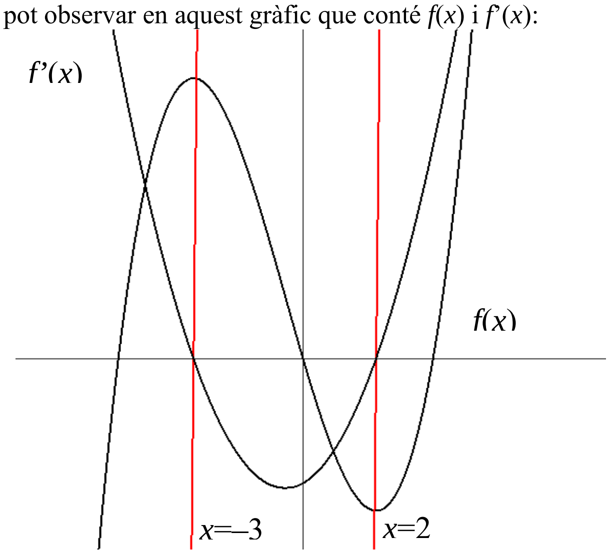
si $f'(a) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa, llavors en el punt a hem de tenir un màxim;

si $f'(a) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva, llavors en el punt a hem de tenir un mínim.

Vegem-ho en la funció anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$: la seva derivada és $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$. Els punts en què aquesta funció s'anul·la són –3 i 2, com sabíem. A més:

$f'(x) > 0$ si $x < -3$, i $f'(x) < 0$ si $x > -3$, per tant, en $x = -3$ tenim un màxim; $f'(x) < 2$ si $x < 2$, i $f'(x) > 0$ si $x > 2$, per tant, en $x = 2$ tenim un mínim.

Això es pot observar en aquest gràfic que conté $f(x)$ i $f'(x)$:



$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$
$f(x)$ creixent	$f(x)$ decreixent	$f(x)$ creixent

Com es resol un problema de màxims o mínims utilitzant la derivació?

> Un problema es diu que és de màxims o mínims o, en general, d'extrems, sempre que vulgui resoldre una situació en la qual una determinada magnitud M depèn d'una altra magnitud x, de manera que
> M = $f(x)$, i s'hagi de trobar un màxim o un mínim de M. En el cas d'un problema de màxims, es tractarà de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) < 0$. En canvi, en el cas d'un problema de mínims, es tractarà de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, s'haurà de buscar x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, a més, $f''(x_0) > 0$.

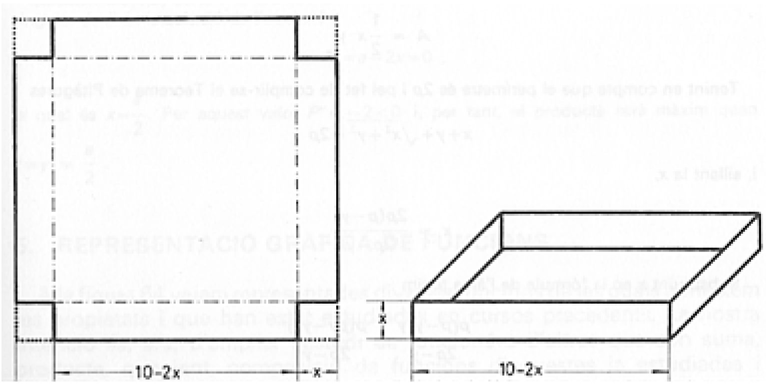
Un problema és de màxims o mínims sempre que vulgui resoldre una situació en la qual una determinada magnitud M depèn d'una altra magnitud x, de manera que

$$M = f(x)$$

i cal trobar un màxim o un mínim de M. Vegem un exemple de cada cas:

- Exemple de màxims:

Amb una peça de cartolina de 10 dm de costat es vol construir una caixa retallant en cada vèrtex del quadrat peces quadrades de costat x. Quin valor s'ha de donar a x perquè el volum de la caixa sigui el màxim?



El volum de la caixa, és a dir, el volum d'un prisma rectangular, es pot trobar multiplicant amplària, per llargària i per altura:

$$V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Així, doncs, el volum de la caixa dependrà del valor de x. S'ha de trobar un màxim d'aquesta funció en l'interval (0, 5), ja que el tall en els extrems no pot superar els 5 dm. El volum de la caixa, tant en 0 com en 5 és igual a 0: V(0) = V(5) = 0. Vegem si podem trobar el màxim en l'interior d'aquest interval. Per això, tractarem de trobar un punt, x_0, que compleixi les condicions d'un màxim:

$$V'(x_0) = 0.$$
$$V''(x_0) < 0$$

La funció derivada és:

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

que s'anul·la en:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 5/3 \end{array} \right.$$

El primer valor no es troba dintre de l'interval considerat, por el tant, només podem considerar $x = 5/3$. Per saber si en aquest punt tenim un màxim o un mínim de la funció hem de calcular la segona derivada:

$$V''(x) = 24x - 80$$

i $V''(5/3) = 24 \cdot 5/3 - 80 < 0$

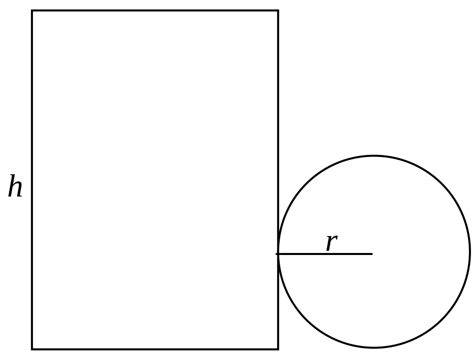
per tant, per $x = 5/3$ obtenim un màxim de la funció. Així, doncs, per obtenir el màxim volum en la caixa, hem de retallar petits quadrats, aproximadament, de 1,66 dm, i el volum màxim que s'obtindrà amb aquest valor serà de:

$$V(5/3) = (10 - 2 \cdot 5/3)^2 \cdot 5/3 = (20/3)^2 \cdot 5/3 = 2000/27 \approx 74{,}07 \text{ dm}^3$$

- Exemple de mínims:

Es volen construir pots cilíndrics (com els de les begudes refrescants) de 500 cm^3 de volum. Quines dimensions (altura i diàmetre de la base) s'ha de donar a un pot d'aquestes característiques perquè necessiti la mínima quantitat de material?

La forma cilíndrica del pot té aquest desenvolupament pla:



El material necessari per construir-lo ha de tenir una superfície de $S = 2\pi rh + \pi r^2$.

La condició imposa que el volum sigui de 500 cm^3, és a dir:

$$\pi r^2 h = 500$$

o sigui, $h = 500/\pi r^2$

Així, la funció S que depèn de r és $S(r) = 2\pi r(500/\pi r^2) + \pi r^2 = 1000/r + \pi r^2$.

Hem de trobar un valor per a la r de manera que S(r) sigui mínim de la funció. Per això, sabem que si r_0 és el valor mínim d'aquesta funció, s'ha de complir que:

$$S'(r_0) = 0.$$
$$S''(r_0) > 0$$

Calculem S'(r) i igualem a 0:

$$S'(r) = -1000/r^2 + 2\pi r = 0.$$
$$2\pi r^2 = 1000/r^2$$
$$2\pi r^3 = 1000$$
$$r^3 = 1000/2.\pi$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}$$

per tant, $r \approx 5{,}42$ cm.

Vegem ara el valor de $S''(r) = 3000/r^3 + 2\pi$.

És fàcil comprovar que S''(5,42) > 0, per tant, aquest valor és un mínim de la funció S'(r) i el valor mínim és igual a S(5,42) ≈ 276,8 cm^2.

Si s'interpretés que el pot ha de tenir dues tapes, com les llaunes de refrescs, i no només una, la superfície hauria d'incloure la superfície de l'altra tapa:

$$S(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

i imposant la condició que el volum sigui 500 cm^3, llavors:

$$S(r) = 1000/r + 2\pi r^2$$

En aquest cas:

$$S'(r) = -1000/r^2 + 4\pi r = 0.$$
$$4\pi r^2 = 1000/r^2$$
$$4\pi r^3 = 1000$$
$$r^3 = 1000/4.\pi$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$$

és a dir, $r \approx 4{,}3$ cm.

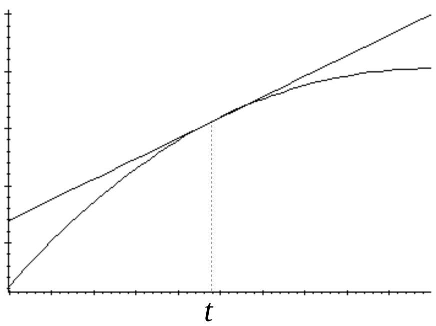
El valor de $S''(r) = 3000/r^3 + 4\pi$ i és fàcil comprovar que S''(4,3) > 0, per tant, aquest valor és un mínim de la funció S'(r) i el valor mínim és igual a:

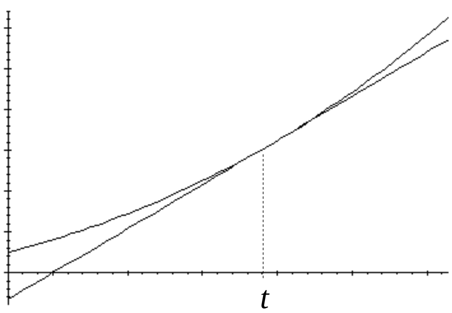
$$S(4{,}3) \approx 348{,}73 \text{ cm}^2$$

Què és la concavitat i la convexitat d'una funció i quina relació té amb la derivació?

> Quan la funció prop d'un punt és menor que la recta tangent en aquest punt, es diu que la funció és convexa, mentre que quan la funció és més gran que la recta tangent, es diu que la funció és còncava. Una funció és convexa en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva, mentre que una funció és còncava en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa.

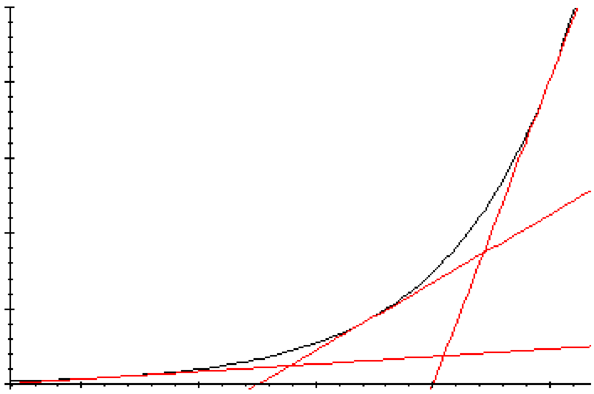
Observant atentament aquestes funcions creixents, amb les seves tangents en un punt t:



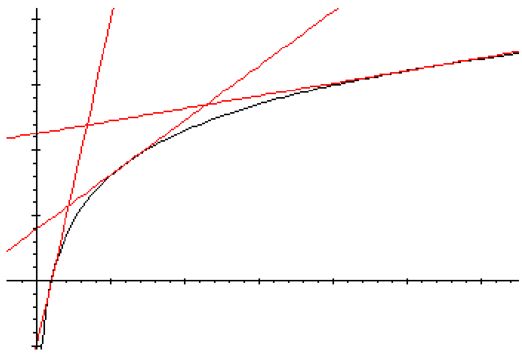


en el primer cas, la tangent en el punt t es troba per sobre de la funció, mentre que en el cas de la dreta, la tangent en el punt t es troba per sota de la funció. És a dir, en el primer cas, prop del punt t, la funció és més petita que la

tangent, mentre que en el segon cas, la funció és més gran que la tangent. En el primer cas es diu que la funció és *convexa*, mentre que en el segon cas es diu que és *còncava*.
L'estudi de segona derivada d'una funció és essencial per conèixer en quins punts la funció és còncava i en quins punts la funció és convexa. Vegem-ho: al costat d'aquesta funció còncava s'han traçat diferents tangents a la funció:



Podem observar com el pendent de la recta tangent va creixent a mesura que la funció va prenent valors x més grans. Ara bé, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la seva derivada; és a dir, si la funció és còncava, la derivada de la funció derivada creix a mesura que augmenta la x, és a dir, la funció derivada és una funció creixent. Ara bé, si la funció derivada és creixent, llavors la seva derivada, és a dir, la derivada segona de la funció original, ha de ser positiva (perquè sabem que si una funció és creixent, la seva derivada ha de ser positiva). En definitiva, una funció és còncava en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva.
De la mateixa manera, observem d'una funció convexa, algunes de les rectes tangents a la funció:



Podem observar que el pendent de la recta tangent va decreixent a mesura que la funció va prenent valors x més grans. Ara bé, com s'acaba d'esmentar, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la seva derivada; és a dir, si la funció és convexa, la derivada de la funció derivada decreix a mesura que augmenta la x, o sigui, la funció derivada és una funció decreixent. Així, doncs, si la funció derivada és decreixent, llavors la seva derivada, és a dir, la derivada segona de la funció original, ha de ser negativa (perquè sabem que si una funció és decreixent, la seva derivada ha de ser negativa). En definitiva, una funció és convexa en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa.
Es pot comprovar aquest fet amb la funció d'un exemple anterior:

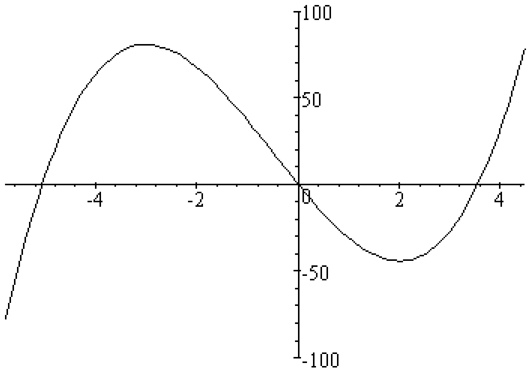
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La seva segona derivada, com sabem, és $f''(x) = 12x + 6$, per tant:

és positiva quan $x > -1/2$, és a dir, ha de ser còncava;

és negativa quan $x < -1/2$, és a dir, ha de ser convexa.

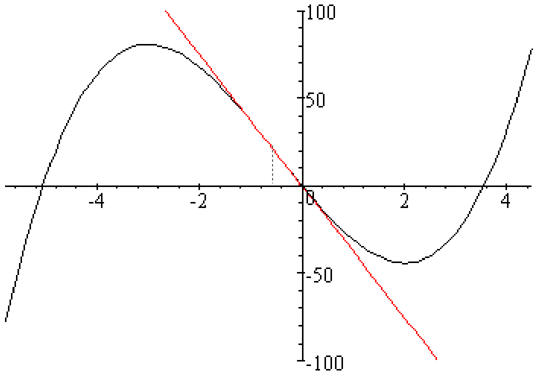
Observant la gràfica es pot veure que, efectivament, la funció és còncava en $(-\infty,-1/2)$, i és convexa en l'interval $(-1/2, +\infty)$, tal com mostra la gràfica de la funció:



Ara bé, què passa en el punt –1/2? En aquest punt, la segona derivada és igual a 0:

$$f''(-1/2) = 12(-1/2) + 6 = 0$$

Per tant, segons les propietats anteriors, la funció en aquest punt no és ni còncava ni convexa. Si observem la tangent en aquest punt:



A l'esquerra d'aquest punt, la funció és convexa, mentre que a la dreta, la funció és còncava. Dit d'una altra manera, a l'esquerra de $x = -½$ la tangent és més gran que la funció, mentre que a la dreta d'aquest punt, la funció és més gran que la tangent. Els punts en què passa això es denominen *punts d'inflexió*, i una de les seves característiques és que la segona derivada en el punt és igual a 0.

Quina informació s'ha de conèixer per representar aproximadament la gràfica d'una funció?

> Per representar la gràfica una funció una de les eines fonamentals és el càlcul de derivades. La informació que s'ha de buscar per representar una funció és: domini, punts de tall amb els eixos, simetries, creixement, màxims i mínims, concavitat i convexitat, punts d'inflexió i comportament asimptòtic.

Per representar manualment la gràfica d'una funció cal comptar amb informació sobre diferents aspectes de la funció que resultaran molt útils pel traçat aproximat de la gràfica. Entre ells trobem els aspectes de creixement, màxims i mínims, i concavitat i convexitat, que requereixen el càlcul de derivades.

Utilitzarem la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

per mostrar com s'ha de fer.
Els aspectes més importants són:

- Domini de la funció

La funció $f(x)$ té per domini tots els punts que no anul·len el denominador. En aquest cas, els punts del domini han de complir que $x^2 - 1 \neq 0$. Per tant, el domini està format per tots els punts excepte pel -1 i l'1.

- Punts de tall amb els eixos

Es tracta de buscar els punts de la gràfica del tipus:

$(0, f(0))$ o bé, $(x,0)$

En la funció $f(x)$

$f(x) = 0 \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Per tant, l'únic punt de tall amb els eixos és (0,0).

- Simetries

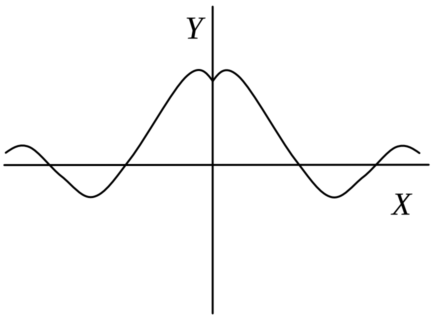
Es diu que una funció $f(x)$ és simètrica respecte de l'eix d'ordenades, si es compleix

$f(-x) = f(x)$

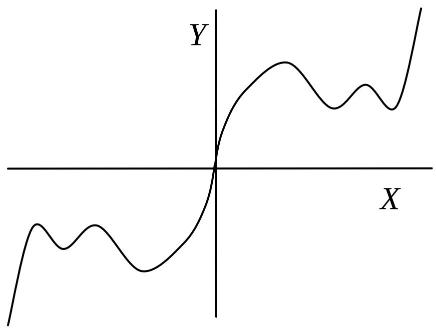
En canvi, una funció és simètrica respecte de l'origen si

$f(-x) = -f(x)$

Vegem en dos exemples què signifiquen aquestes propietats de simetria gràficament:



Funció simètrica respecte l'eix d'ordenades



Funció simètrica respecte l'origen

En el cas de l'exemple, la funció és simètrica respecte de l'origen, ja que:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -$$

S'ha de tenir en compte que una funció pot ser que no sigui ni simètrica respecte de l'eix d'ordenades, ni simètrica respecte de l'origen.

- Intervals de creixement i decreixement

Es poden trobar estudiant el signe de la funció derivada, en aquest cas:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Per veure en quins punts aquesta funció és positiva o negativa, només hem d'estudiar-ne el numerador, ja que el denominador és sempre positiu.

$x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$

Així, doncs, només s'ha d'estudiar l'expressió $x^2 - 3$, que, com sabem, es correspon a una paràbola i les arrels de la qual, $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$, separen els punts positius dels negatius. En definitiva:

$f'(x)$ és positiva en $(-\infty,-\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},+\infty)$

$f'(x)$ és negativa en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$

Per tant:

$f(x)$ és creixent en $(-\infty,-\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3},+\infty)$

$f(x)$ és decreixent en $(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$

- Màxims i mínims

La funció derivada s'anul·la en 0, $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$; en 0, la funció és creixent i, per tant, no té ni màxim ni mínim; en $-\sqrt{3}$ la funció passa de creixent a decreixent i, per tant, en $-\sqrt{3}$ hi ha un màxim. En $\sqrt{3}$, la funció passa de decreixent a creixent i, per tant, en $\sqrt{3}$ hi ha un mínim.

- Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Per estudiar la concavitat i convexitat hem de conèixer la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

L'única arrel del numerador és 0. En el cas del denominador, les arrels són 1 i –1. Per tant, el signe de la 2a. derivada és:

positiu en (–∞,–1) i (0,1) → en aquests intervals *f*(*x*) és còncava;
negatiu en (–1,0) i (1, ∞) → en aquests intervals *f*(*x*) és convexa.

Es pot observar que en $x = 0$, la funció té un punt d'inflexió perquè passa de convexa a còncava.

- Asímptotes

Per descobrir les asímptotes d'una funció s'han de comprovar els límits d'aquesta funció en +∞, –∞ i en els punts que no pertanyen al domini. A més, s'ha de comprovar si té una asímptota obliqua.
En l'exemple:
Asímptotes horitzontals:
No en té, ja que els seus límits a +∞ i –∞ són infinits.
Asímptotes verticals:
S'haan d'estudiar els límits en –1 i 1, que no pertanyen al domini:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

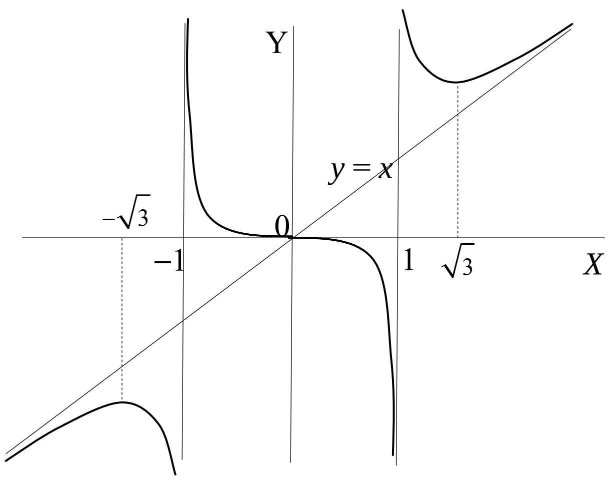
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Per tant, les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.
Asímptotes obliqües:
Es pot comprovar que la recta $y = x$ és una asímptota obliqua, ja que:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) - x = 0$$

Amb tots aquests elements, ja es pot representar la funció manualment:



A l'actualitat, hi ha molts programes d'ordinador que permeten fer la gràfica de la major part de les funcions només escrivint la seva expressió.

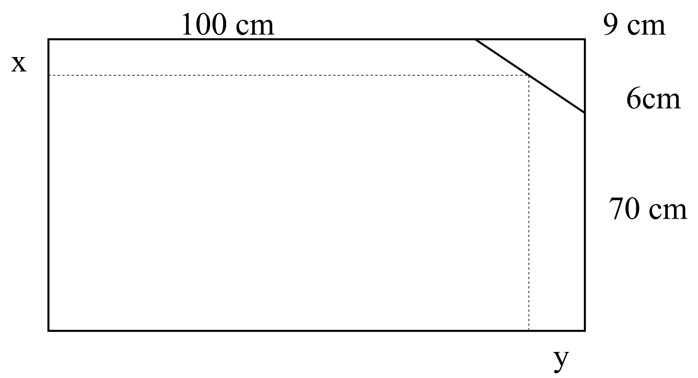
Exercicis

1. Donades aquestes funcions:

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2} \qquad g(x) = \frac{2x}{\ln(x)} \qquad h(x) = x^3 - 3x + 2$$

   a. Dóna el domini de cadascuna d'aquestes funcions.
   b. Determina els seus punts de talla amb els eixos.
   c. Calcula els màxims i els mínims.
   d. Calcula els punts d'inflexió.
   e. Dona els intervals de creixement i decreixement.
   f. Dona els intervals de concavitat i de convexitat.
   g. Determina les asímptotes.

2. Al traslladar un mirall de 70 x 100 cm, s'ha trencat per un dels seus vèrtexs i s'ha esbocinat un triangle rectangle de 6 x 9 cm, tal com es veu a la figura. Calcula per on s'ha de tallar el mirall per a obtenir un altre mirall que també sigui rectangular i que tingui l'àrea més gran possible.



Solucions

1. $f(x) = \dfrac{8x^2}{4 - x^2}$

a) El domini consta de tots els nombres excepte aquells que fan 0 el denominador: 4 - x^2 = 0. Per tant, no hi pertanyen +2 i – 2.

b) Talls amb l'eix Y: $f(0) = 0$, per tant, (0,0)
Talls amb l'eix X: $f(x) = 0$. Igualment, (0,0)

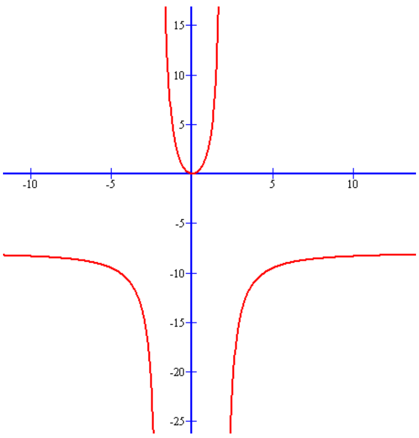
c) Per calcular màxims i mínims hem de derivar la funció:
$$f'(x) = \frac{16x(4-x^2) - 8x^2(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{64x}{\left(4-x^2\right)^2}$$
i igualar-la a 0. En aquest cas l'única possibilitat és $x = 0$. Calculem la segona derivada i és fàcil comprovar que $f''(0)>0$. Per tant, ens trobem al davant d'un mínim.
És a dir, només hi ha un mínim (0,0)

d) No hi ha cap punt d'inflexió perquè no trobem cap punt que compleixi $f''(x) = 0$.

e) Hi ha, clarament, 4 zones de creixement o decreixement, separades pels límits del domini i pel mínim. Hem d'analitzar, doncs, la derivada:
fins –2: $f'(x)<0$, per tant, la funció és decreixent.
de –2 a 0: $f'(x)<0$ per tant la funció és decreixent.
de 0 a 2: $f'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.
de 2 en endavant: $f'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.

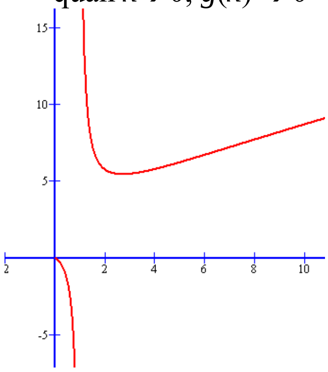
f) Una altra vegada cal estudiar la segona derivada entre els límits del domini, perquè no hi ha cap punt en què $f''(x) = 0$
fins –2: $f''(x)<0$, per tant, la funció és convexa
de –2 a +2: $f''(x)>0$, per tant, la funció és còncava.
de 2 en endavant: $f''(x) < 0$, per tant, la funció és convexa.

g) Aquesta funció, clarament, només té 3 asímptotes: x =-2 , x = 2, y = -8



$$g(x) = \frac{2x}{\ln(x)}$$

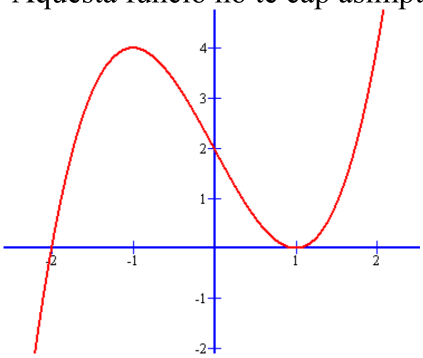
a) El domini consta de tots els nombres més grans que 0 (perquè hi ha la funció logaritme) excepte aquells que fan 0 el denominador: ln(x) = 0. En definitiva, el domini és igual a tots els nombres més grans que 0, excepte 1:
(0,1) U (1,+∞)
b) No hi ha punts de tall.
c) Per calcular màxims i mínims hem de derivar la funció:
$g'(x) = (2\ln(x) - 2)/\ln^2(x)$
i igualar-la a 0. En aquest cas l'única possibilitat és $x = e$. Calculem la segona derivada i és fàcil comprovar que $g''(0)>0$. Per tant, ens trobem al davant d'un mínim: (e, 2e)
d) Punts d'inflexió: $g''(x) = 0$ si $x = e^2$. A més, $g'''(x)$ no és 0. Per tant, (e^2,e^2) és un punt d'inflexió.
e) Hi ha, clarament, 3 zones de creixement o decreixement, separades pels límits del domini i pel mínim. Hem d'analitzar, doncs, la derivada:
de 0 a 1: $g'(x)<0$ per tant la funció és decreixent.
de 1 a e: $g'(x)<0$, per tant, la funció és decreixent.
de e en endavant: $f'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.
f) Cal estudiar la segona derivada entre els límits del domini, i també el punt d'inflexió (e^2,e^2)
de 0 a 1: $g''(x)<0$ per tant la funció és convexa.
de 1 a e^2: $g''(x)>0$, per tant, la funció és còncava.
de e^2 en endavant: $g''(x)<0$, per tant, la funció és convexa.
g) Aquesta funció, clarament, només té 1 asímptota: x =1. A més, quan $x \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$



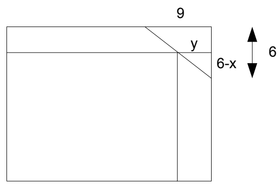
$h(x) = x^3 - 3x + 2$

a) El domini consta de tots els nombres perquè és una funció polinòmica.
b) Amb l'eix Y: $h(0) = 2$ (0,2)
   Amb l'eix X : $h(x) = 0$ (-2,0),(1,0).
c) Per calcular màxims i mínims hem de derivar la funció:
   $h'(x) = 3x^2 - 3$
   i igualar-la a 0. En aquest cas $x = +1$ ó $x = -1$ Calculem la segona derivada: $h''(x) = 4x$. Per tant, mínim a l'arrel positiva, (1, 0) i màxim a la negativa (-1,4).
d) Punts d'inflexió: $h''(x) = 6x = 0$ si $x = 0$. A més, $g'''(x)$ no és 0. Per tant, (0,2) és un punt d'inflexió.
e) Hi ha, clarament, 3 zones de creixement o decreixement, separades pels pels extrems. Hem d'analitzar, doncs, la derivada:
   fins -1: $h'(x)>0$ per tant la funció és creixent.
   de -1 a 1: $h'(x)<0$, per tant, la funció és decreixent.
   de 1 en endavant: $h'(x)>0$, per tant, la funció és creixent.
f) Cal estudiar la segona derivada en les dos parts en què la divideix el punt d'inflexió

   fins 0: $h''(x)<0$ per tant la funció és convexa.
   a partir de 0: $h''(x)>0$, per tant, la funció és còncava.
g) Aquesta funció no té cap asímptota.



2. L'àrea del nou mirall serà $(100 - y)(70 - x)$. Hem de calcular el valor de y en funció de x, per a eliminar una de les incògnites. Si ens fixem en aquesta altra representació:



és evident que $\dfrac{y}{6-x}=\dfrac{9}{6}$, pe tant, y = 3/2 ·(6 – x)

Així, doncs, hem de maximitzar

f(x) = (100 – *y*)(70 – *x*) = (100 – 3/2 · (6 – *x*))(70 – *x*)

és a dir

f(x)= 6370 + 14*x* – 3/2 x^2

Busquem ara la seva derivada per a trobar un màxim:

f'(x) = 14 – 3x

i busquem f'(*x*) = 0

14 – 3*x* = 0 → *x* = 14/3 cm

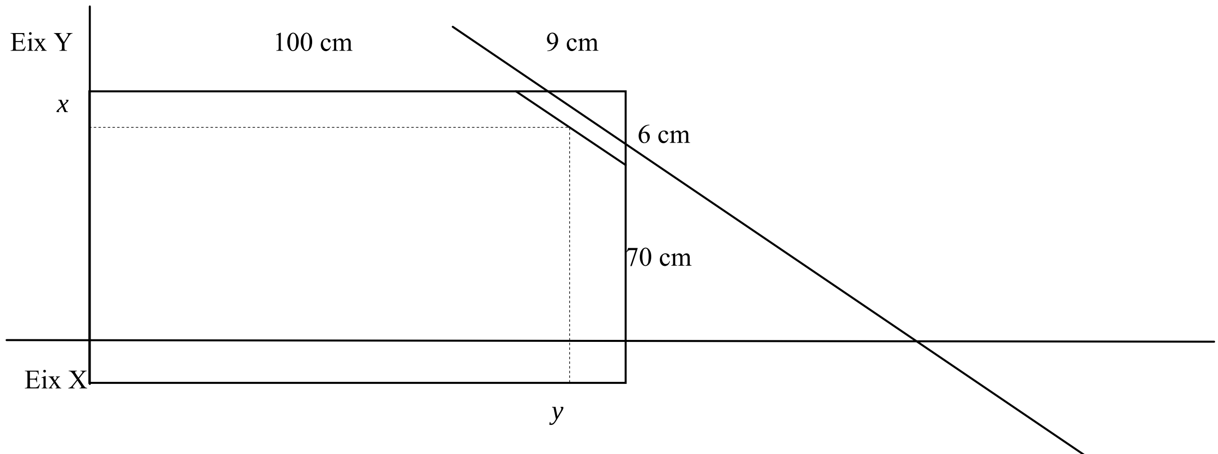
Ja que f''(x) = -3 < 0 ens trobem davant d'un màxim, i el valor de la y en aquest punt és:

y = 3/2 ·(6 – x) = 3/2 (6 – 14/3) = 2 cm.

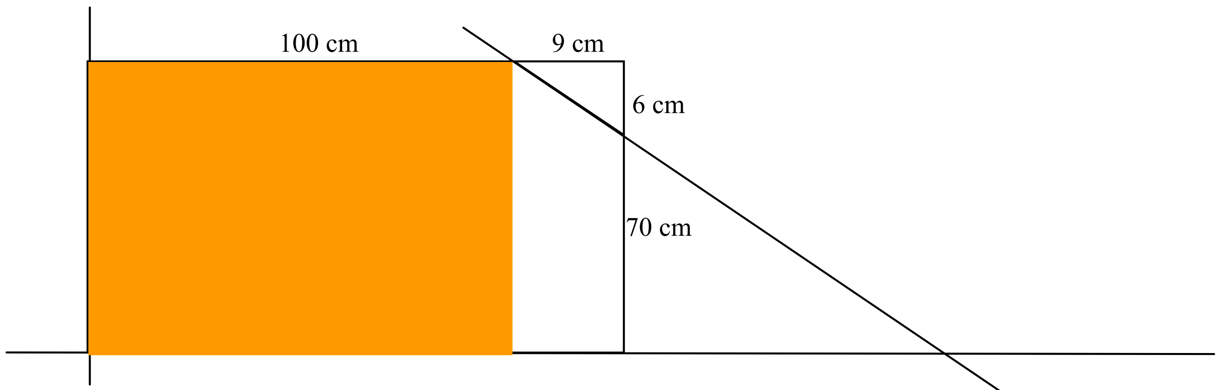
Així, doncs, el mirall retallat d'àrea màxima mesurarà 100 – 2 = 98 cm per 70 – 14/3 = 65,33 cm.

Si no entens gaire el desenvolupament, el podem fer més detalladament:

Es tracta d'un problema de maximització: és a dir, tens una situació en què has de maximitzar alguna cosa que pots mesurar. En aquest cas, has de maximitzar certa àrea. La figura, com tots sabeu, és aquesta:

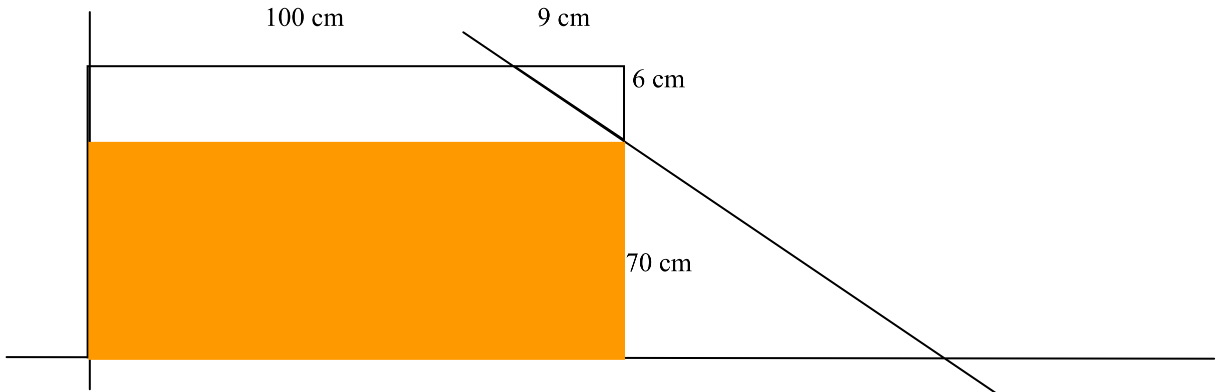


Es tracta d’escollir *x* i *y* de forma que l’àrea del rectangle puntejat sigui la màxima possible. Anem a calcular diverses àrees possibles, que tu dones en el teu missatge. Calculem aquesta (en taronja):



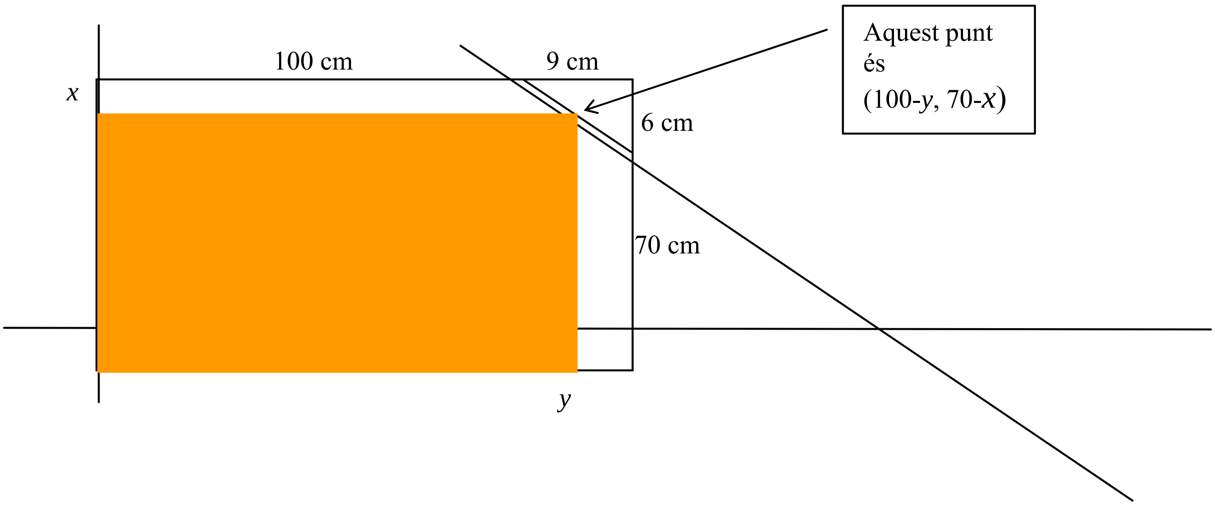
l’àrea és $(100-9)*70 = 91*70 = 6370 \text{ cm}^2$

calculem-ne una altra, aquesta (en taronja)



l’àrea és $100*(70-6)=6400 \text{ cm}^2$

En aquest cas, aquesta és més gran. Ara bé, la pregunta és, aquesta àrea és més gran que totes les àrees entre una i l’altra d’aquest tipus?



això, en principi, no ho podem saber fins que no calculem aquestes àrees. I quan val aquesta àrea? Doncs és un rectangle de costats 100 - y i 70 – x, per tant, la seva àrea serà:

$(100 - y)(70 - x)$

Si veus, un vèrtex del rectangle està sobre la recta de què parlava en el missatge anterior. Així, doncs, has de poder trobar l'equació d'aquesta recta, per a poder expressar aquest vèrtex del rectangle. I per què? Doncs perquè multiplicant les components d'aquest punt, que és el punt (100-y, 70-x), ens dóna l'àrea del rectangle, que com acabem d'escriure és

$A = (100 - y)(70 - x)$

Així, podràs posar la y d'aquesta fórmula en funció de la x, i tindràs l'àrea només en funció de la x. Ara hauràs d'aplicar el que saps de derivació: si tens una funció i té un màxim (en aquest cas, tens la funció àrea depenent de la x, i vols calcular un màxim), saps que la seva derivada ha de ser 0 i la segona derivada ha de ser negativa. Així doncs, has de derivar la funció àrea, i igualar-la a 0 i veure si la x que resulta permet que la segona derivada de l'àrea sigui 0. Si és així, hauràs trobat el punt que permet tallar el vidre de manera que l'àrea sigui màxima.

Integral d’una funció

Integral d'una funció

Els conceptes de *primitiva* i *integral indefinida*

La integració d'una funció és el pas invers de la derivació d'una funció.
Per definir correctament la integral d'una funció, s'ha de definir una primitiva d'una funció:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$ llavors, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$

Per expressar la integració d'una funció s'utilitza un símbol, $\int$, anteposat a la funció, i el símbol dx (denominat diferencial de x) després de la funció, és a dir, la integral indefinida d'una funció s'expressa

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

essent $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ i c una constant, és a dir, un nombre qualsevol.
Per exemple

$$\int \left(3x^2 + 5\right) dx = x^3 + 5x + c$$

ja que la derivada de $x^3 + 5x$ és $3x^2 + 5$, per tant, $x^3 + 5x$ és una primitiva dem $3x^2 + 5$.

Taula de les integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	Exemples
k essent k un nombre	$kx + c$	$f(x) = 3$ $\int f(x)dx = 3x + c$
x	$x^2/2 + c$	
x^n essent n un nombre enter diferent de -1	$x^{n+1}/(n + 1) + c$	$f(x) = x^3$ $\int f(x)dx = x^4/4 + c$
$1/x$	$\ln \lvert x\rvert + c$	
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc} \sin x + c$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc} \cos x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc} \tan x + c$	
a^x	$a^x/\ln a$	$f(x) = 3^x$ $\int f(x)dx = 3^x/\ln 3 + c$ $g(x) = e^x$ $\int g(x)dx = e^x + c$
$\log_a x$	$\frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c$	$f(x) = \log_3 x$ $\int f(x)dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln 3} + c$ $g(x) = \ln x$ $\int g(x)dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$

Regles d'integració

- La integral de la suma de funcions és igual a la suma de la integral de les funcions.

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

- Si $g(x) = \int f(x)dx \rightarrow g'(x) = f(x)$

- La regla de la cadena (és a dir, $(fog)' = (f'og) \cdot g'$) ens permet escriure que:

$$\int (f'og)(x) g'(x)dx = (fog)(x)$$

Generalització de la taula d'integrals immediates	
Integral	Exemple
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ si $n \neq 1$	$\int [\sin x]^4 \cdot \cos dx = \frac{[\sin x]^5}{5} + c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x) \rvert + c$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13} dx = \ln\left(x^2-3x+13\right) + c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3) dx = e^{4x^2+3x-2} + c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3) dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln 5} + c$
$\int f'(x) \cdot \sin\left(f(x)\right) dx = -\cos\left(f(x)\right) + c$	$\int \cos x \cdot \sin\left(\sin x\right) dx = -\cos\left(\sin x\right) + c$
$\int f'(x) \cdot \cos\left(f(x)\right) dx = \sin\left(f(x)\right) + c$	$\int 6 \cdot \cos\left(6x-2\right) dx = \sin\left(6x-2\right) + c$
$\int \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2} dx = \arctan\left(f(x)\right) + c$	$\int \frac{1/x}{1+\left(\ln x\right)^2} dx = \arctan\left(\ln x\right) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}} dx = \arcsin\left(f(x)\right) + c$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}} dx = \arcsin\left(e^x\right) + c$

Mètodes d'integració

- Mètode de substitució

Si F és una primitiva de la funció *f*, i *g* una altra funció, sabem per la regla de la cadena:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

essent $x = g(t)$

Així, doncs, la fórmula del mètode d'integració per substitució és:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt \ \text{ amb } x = g(t)$$

- Mètode d'integració per parts

Si *f* i *g* són dues funcions, la derivada del seu producte és igual a:

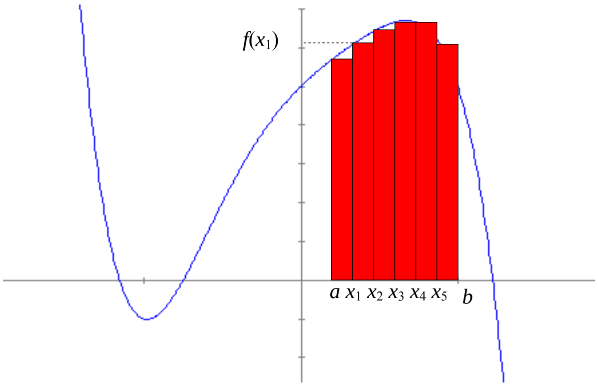
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \rightarrow \quad f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

i, per tant, integrant en ambdues parts

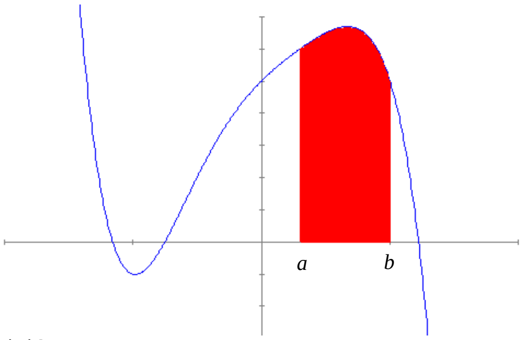
$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

La integral definida d'una funció

La integral indefinida d'una funció permet trobar l'àrea d'una funció i l'eix X, entre dos extrems *a i b*. Per trobar-la, s'ha de calcular el límit de la suma dels rectangles de la imatge, quan la seva base tendeix a 0:



$\xrightarrow{x_{i+1} - x_i \to 0}$



Aquesta àrea s
és la seva definició:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

Relació entre la integral indefinida i la integral definida

La integral definida es pot calcular a partir d'una primitiva de la funció de la manera següent: si F(x) és una primitiva de $f(x)$, llavors:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

per exemple:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

ja que una primitiva de x^2 és $\dfrac{x^3}{3}$.

En què consisteix el procés d'integració d'una funció?

> La integració d'una funció és un procés íntimament relacionat amb la derivació; de fet, es tracta del pas contrari de la derivació. La integració, a més, té múltiples aplicacions, entre les quals es destaca el càlcul d'àrees delimitades per una funció.

Donada una funció, *f*, és possible trobar la seva derivada, *f'*, utilitzant la taula de derivades i les regles pertinents. Aquesta transformació suggereix una pregunta: donada una funció, *f*, és possible trobar una funció, F, la derivada de la qual sigui la funció inicial, *f*, és a dir, $F'(x) = f(x)$? Per exemple, donada la funció $f(x) = 3x^2 + 5$, podem trobar una funció, F, la derivada de la qual sigui precisament $f(x)$? En aquest cas, és fàcil comprovar que la funció $F(x) = x^3 + 5x$ té com a derivada $F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$. Per tant, la resposta en aquest exemple és que sí.
Podríem trobar una altra funció que complís la mateixa condició? No és difícil adonar-se que la funció $G(x) = x^3 + 5x + 3$ també té com derivada $f(x)$; en general, tota funció de la forma $x^3 + 5x + c$ (on c és un nombre) té la mateixa derivada (ja que la derivada de c sempre serà 0).

Una procés de aquest tipus es denomina integració de *f* i a la funció resultant es denomina primitiva de *f*; és a dir, la integració és la operació contrària a la derivació:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$ llavors, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$

Així, podem afirmar que tota funció de la forma $F(x) + c$ (on c és un nombre) també és una primitiva de $f(x)$. El conjunt de totes les primitives d'una funció *f* es denomina integral indefinida o, simplement, integral de la funció *f*. Així, per exemple, la integral de la funció $f(x) = 3x^2 + 5$ és $x^3 + 5x + c$ (essent c un nombre) perquè qualsevol primitiva de la funció $f(x)$ s'escriurà d'aquesta forma; és a dir, l'única diferència entre una primitiva d'aquesta funció i una altra serà el seu *terme independent*. Per expressar la integració d'una funció s'utilitza un símbol, $\int$, anteposat a la funció, i el símbol dx (denominat diferencial de x) després de la funció, és a dir, la integral indefinida d'una funció s'expressa així:

$$\int f(x)dx$$

Així, doncs, l'exemple anterior podem expressar-lo així:

$$\int \left(3x^2 + 5\right)dx = x^3 + 5x + c$$

Aquesta és la taula amb algunes integrals elementals, anomenada també taula d'integrals immediates (on c és un nombre qualsevol):

Taula de les integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	Exemples
k essent k un nombre	$kx + c$	$f(x) = 3$ $\quad \int f(x)dx = 3x + c$
x	$x^2/2 + c$	
x^n essent n un nombre enter diferent de –1	$x^{n+1}/(n + 1) + c$	$f(x) = x^3$ $\quad \int f(x)dx = x^4/4 + c$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert + c$	
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	
a^x	$a^x/\ln a$	$f(x) = 3^x$ $\quad \int f(x)dx = 3^x/\ln 3 + c$ $g(x) = e^x$ $\quad \int g(x)dx = e^x + c$
$\log_a x$	$\frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c$	$f(x) = \log_3 x$ $\quad \int f(x)dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln 3} + c$ $g(x) = \ln x$ $\quad \int g(x)dx = x \cdot (\ln x - 1) + c$

Quines són les regles de la integració i com influeixen en el càlcul de primitives?

> Les regles principals de la integració són la de la suma de funcions, la del producte d'un nombre per una funció i la de la composició de funcions. Aquestes regles permeten generalitzar la taula d'integrals immediates.

El càlcul de la primitiva d'una funció qualsevol no és tan senzill com el de la derivada, ja que les úniques regles immediates que s'hi poden aplicar són:

- La integral de la suma de funcions és igual a la suma de la integral de les funcions.

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

En un exemple anterior ja s'havien aplicat ambdues regles:

$$\int\left(3x^2+5\right)dx = \int 3x^2dx + \int 5dx = 3\int x^2dx + 5x = x^3+5x+c$$

- Evidentment:

  si $g(x) = \int f(x)dx \rightarrow g'(x) = f(x)$

- La regla de la cadena (és a dir, $(fog)' = (f'og) \cdot g'$) ens permet escriure que:

  $$\int (f'og)(x)g'(x)dx = (fog)(x)$$

utilitzant la propietat anterior. D'aquesta manera, es pot generalitzar la taula anterior:

Generalització de la taula d'integrals immediates	
Integral	Exemple
$\int\left[f(x)\right]^n \cdot f'(x)dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+c$ si $n \neq 1$	$\int\left[\text{sen}\,x\right]^4 \cdot \cos dx = \frac{\left[\sin x\right]^5}{5}+c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left\|f(x)\right\|+c$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\left(x^2-3x+13\right)+c$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)}+c$	$\int e^{4x^2+3x-2}\cdot\left(8x+3\right)dx = e^{4x^2+3x-2}+c$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$	$\int 5^{4x^2+3x-2}\cdot\left(8x+3\right)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln 5}+c$
$\int f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)dx = -\cos\left(f(x)\right)+c$	$\int \cos x\cdot\sin\left(\sin x\right)dx = -\cos\left(\sin x\right)+c$
$\int f'(x)\cdot\cos\left(f(x)\right)dx = \sin\left(f(x)\right)+c$	$\int 6\cdot\cos\left(6x-2\right)dx = \sin\left(6x-2\right)+c$
$\int \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}dx = \arctan\left(f(x)\right)+c$	$\int \frac{1/x}{1+\left(\ln x\right)^2}dx = \arctan\left(\ln x\right)+c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}}dx = \arcsin\left(f(x)\right)+c$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx = \arcsin\left(e^x\right)+c$

En l'actualitat, hi ha programes informàtics que calculen les derivades i integrals de la major part de les funcions usuals, la qual cosa facilita en gran mesura l'aplicació pràctica d'aquests conceptes i les seves múltiples aplicacions.

Quins mètodes es poden utilitzar per integrar una funció?

> Tot i que hi ha mètodes per integrar funcions, s'ha de subratllar que no sempre és possible trobar l'expressió algebraica que es correspon amb aquesta integral. En qualsevol cas, els mètodes més habituals són el mètode de substitució i el mètode d'integració per parts.

La major part d'integrals indefinides que es poden plantejar, excepte les immediates, requereixen un llarg i metòdic procés per arribar a resoldre-les. Però no sempre és possible trobar una expressió algebraica que resolgui la integral plantejada. Els mètodes usuals per trobar la integral d'una funció, tot i que no sempre és possible trobar-la (per simplificar, en aquest apartat, en lloc de $\int f(x)dx$, s'utilitzarà simplement $\int f$):

- Mètode de substitució

Si F és una primitiva de la funció *f*, és a dir, $\int f(x)dx = F(x)+c$, i *g* una altra funció, sabem per la regla de la cadena que:

$$(Fog)' = (F'og) \cdot g'$$

per la qual cosa,

$$\int (F'og) \cdot g' = Fog$$

és a dir,

$$\int (fog) \cdot g' = Fog$$

o el que és el mateix

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

essent $x = g(t)$

Per tant, la fórmula del mètode d'integració per substitució és:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt \text{ amb } x = g(t)$$

Per exemple, si es vol calcular la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

es pot fer el canvi $x = \sin t$, per tant, $dx = \cos t\, dt$ (que és una manera diferent de dir que la derivada de *x* és $g'(t) = \cos t$, de manera que apareixen directament d*x* i d*t*, el diferencial de *x* i el diferencial de *t*). Així, doncs,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$$

amb la qual cosa, recordant que $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2} + c = \frac{1}{2}t + \frac{2\sin t \cdot \cos t}{4} + c$$

Desfent el canvi, tenim que t = arc sin *x*:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Un altre exemple:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx$$

sigui $t = \ln x$ i, per tant, $dt = \dfrac{1}{x}dx$. Així, doncs:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

- Mètode d'integració per parts

Si *f* i *g* són dues funcions, sabem que la derivada del seu producte és igual a:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Aquesta expressió es pot modificar així:

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$$

i integrant ambdós membres:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = \int\left((f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)\right)dx \text{ és a dir,}$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$$

que es correspon amb la fórmula d'integració per parts. Aquesta fórmula s'ha d'aplicar quan la integral del membre de la dreta sigui més senzilla que la de l'esquerra (per això, aquesta última s'ha de descompondre en el producte de dues funcions, una d'elles, *g*', ha de ser la derivada d'una altra funció *g* i, a més, fàcil de trobar).

Per exemple, si es vol resoldre aquesta integral $\int xe^x dx$, podem fer la descomposició següent:

$f(x) = x$ per tant, $f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x$ per tant, $g(x) = \int e^x dx = e^x$

Com que tenim tots els components de la integració per parts, podem fer el següent:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx$$

d'aquesta manera, la integral de la dreta es pot fer de manera immediata:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c = e^x\left(x-1\right)+c$$

Un altre exemple: $\int \ln x dx$

En aquest cas:

$f(x) = \ln x$ i $f'(x) = 1/x$

$g'(x) = 1$ i $g(x) = x$

(de vegades, per abreujar, s'utilitzen les variables u i v en lloc de *f* i *g* per expressar aquest canvi, i en lloc de *f'* y *g'* s'usen du i dv, d'aquesta manera:

$u = \ln x$ i $du = 1/x\ dx$

$dv = \mathrm{dx}$ i $v = x$)

per tant,

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

De vegades el procés d'integració per parts té un desenvolupament curiós. Per exemple, per calcular la integral $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ s'utilitza aquest mètode, de manera que

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$g'(x) = \sin x$ $g(x) = -\cos x$

per tant,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

ara, es torna a aplicar el mètode d'integració per parts a aquesta última integral, essent

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$h'(x) = \cos x$ $h(x) = \sin x$

per tant,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

si substituïm aquest valor en el pas anterior:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

podem passar $\int e^x \sin x dx$ al primer membre

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

és a dir,

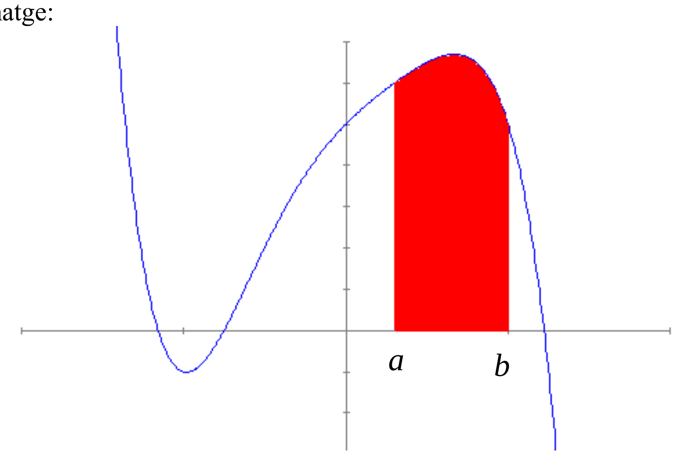
$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

Com s'ha pogut observar, l'aplicació successiva de la regla de la cadena, en aquest cas, ha permès calcular el valor de la integral de manera indirecta.

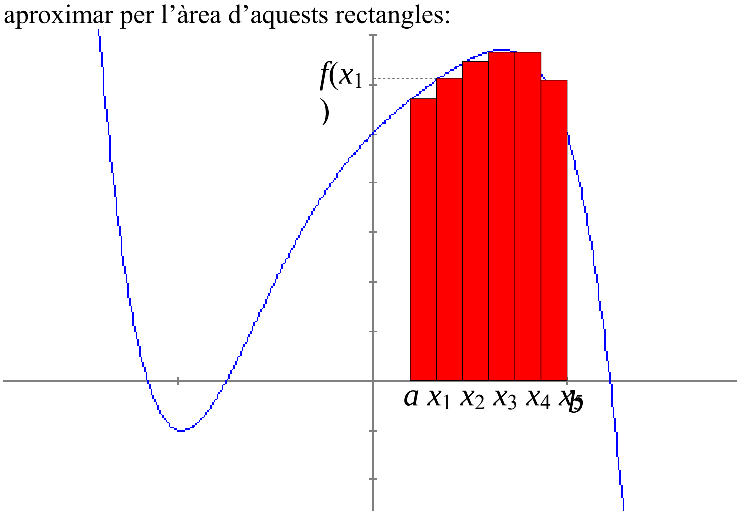
Què és la integral definida d'una funció?

> La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles, la base dels quals sigui constant, i l'altura dels quals sigui el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que s'estava buscant.

En ocasions cal calcular l'àrea limitada per una funció i l'eix X, tal com es mostra en aquesta imatge:



Si aquesta funció és $f(x)$, l'àrea que tanca la gràfica entre els punts a i b es pot aproximar per l'àrea d'aquests rectangles:



És a dir, podem aproximar l'àrea de la funció entre a i b dividint l'interval en diversos punts, $a = x_0$, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i $b = x_6$, i calculant l'àrea dels rectangles de la il·lustració anterior; per exemple, l'àrea del rectangle de base entre x_1 i x_2, i d'altura $f(x_1)$, ha de ser igual a $f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$. En general, doncs, l'àrea de la funció es pot aproximar de la manera següent:

$$A \cong \sum_{i=0}^{5} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

essent $\sum_{i=0}^{5}$ el símbol de sumatori, i indica que s'ha de sumar des que $i = 0$, fins que $i = 5$, l'expressió que ve a continuació (que correspon amb l'àrea d'un dels petits rectangles de la il·lustració).

Evidentment, com més rectangles es construeixin, el resultat serà més pròxim al valor de l'àrea de la funció en l'interval (a, b). Doncs bé, l'àrea de la funció $f(x)$ en un interval (a, b) és exactament igual a aquest límit

$$A = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

és a dir, el límit quan la diferència entre una x i la següent tendeix a 0 és, com ja s'havia avançat, l'àrea de la funció. Aquest límit, normalment, s'escriu en forma d'integral, quan la funció f és positiva:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

on a i b es denominen límits d'integració. Aquesta expressió rep el nom d'*integral definida* d'extrems a i b.

Com es calcula la integral definida a partir d'una primitiva de la funció?

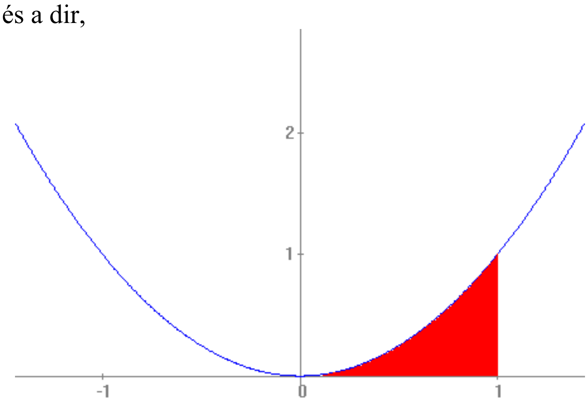
> La integral indefinida i la integral definida utilitzen els mateixos símbols, excepte els límits d'integració. Aquest fet revela l'íntima relació d'ambdós conceptes, que es plasma en el càlcul de la integral definida d'una funció: la integral definida d'una funció és igual a la diferència de qualsevol funció primitiva en els límits d'integració:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Es pot comprovar com tant la integral definida com la indefinida utilitzen pràcticament els mateixos símbols, amb la diferència dels límits d'integració que utilitza la integral definida. Això no és casual, perquè la integral definida es pot calcular a partir d'una primitiva de la funció de la manera següent; és a dir, si F(x) és una primitiva de $f(x)$, llavors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

i aquesta expressió es denomina *integral definida*. La demostració d'aquest fet no és senzilla. En qualsevol cas, l'origen del símbol integral és una S allargada, indicant que es tracta d'un sumatori, mentre que l'origen del símbol diferencial, dx, prové del fet que es tracta de diferències de x (prenent la inicial de "diferència" juntament amb la x, resulta precisament dx).

Per exemple, si $f(x) = x^2$, per calcular l'àrea que forma aquesta funció positiva en l'interval (0, 1), és a dir,



s'ha de calcular la integral definida següent:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

en primer lloc, doncs, s'integra x^2

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Per tant, si es tria la primitiva més senzilla, és a dir, $x^3/3$:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

El resultat es dóna en les unitats pròpies del sistema de coordenades (per exemple, si el sistema de coordenades és en cm, el resultat es dóna en cm^2).

Així, doncs, es pot assegurar que l'àrea entre l'eix X i la funció x^2 en l'interval [0,1], és igual a 1/3.

Vegem que, en aquest cas, la integral definida coincideix amb la diferència de la primitiva en els límits d'integració. Apliquem, en primer lloc, la definició d'integral definida, en el cas que ens ocupa:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

podem prendre n intervals iguals d'amplària $1/n$; per tant, els valors de la funció seran de la forma i/n, Així, doncs:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} i^2 \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n} i^2$$

Tenint en compte que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (fet que comprovarem en l'apartat següent) obtenim

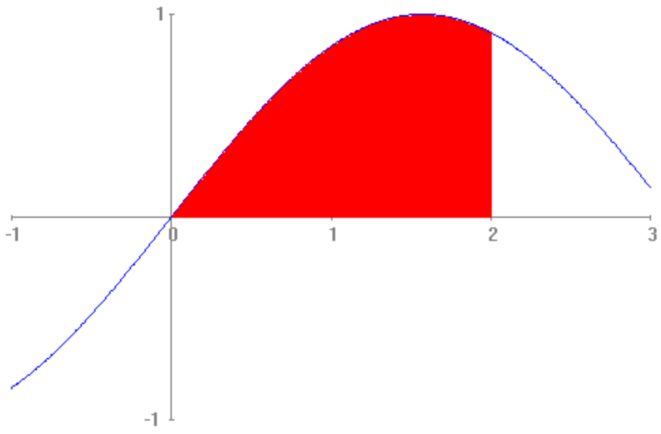
$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Tal com s'havia obtingut amb el càlcul de la diferència d'una primitiva en els límits d'integració.

Un altre exemple: si volem calcular l'àrea de la funció sin x entre els valors [0,2], és a dir,

$$\int_0^2 \sin x dx$$

és a dir,



s'ha de calcular, en primer lloc, la integral del sin x

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

La primitiva més senzilla és $-\cos x$; per tant,

$$\int_0^2 \sin x dx = -\cos x\Big|_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 \simeq -(-0,41615)+1=1,41615$$

Quin és el valor de la suma $\sum_{i=0}^{n} i^2$?

> Per fer la suma de diversos termes d'una successió hi ha mètodes i fórmules parcials que ajuden en la seva recerca. Per trobar $\sum_{i=0}^{n} i^2$ cal saber que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Amb aquesta suma, i realitzant la resta de diversos parells de cubs consecutius, s'arriba a la fórmula desitjada.

Es tracta d'obtenir el resultat de la suma

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

primer hem d'observar que

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

això és així perquè si sumem, alternativament, el primer i l'últim element de la successió el resultat és sempre n:

$$\overbrace{0+\underbrace{1+\overbrace{2+\underbrace{3+\ldots+(n-3)}_{3+(n-3)=n}+(n-2)}^{2+(n-2)=n}+(n-1)}_{1+(n-1)=n}+n}^{0+n=n}$$

i això es repeteix (n+1)/2 vegades; per tant, el resultat és l'avançat anteriorment.
A més, veiem que sempre es compleix que, sigui quin sigui s:

$$(s+1)^3 - s^3 = 3s^2 + 3s + 1$$

N'hi ha prou de desenvolupar el primer terme per comprovar-ho.

$$(s+1)^3 - s^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 - s^3 = 3s^2 + 3s + 1$$

Podem demostrar ara que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Fem servir la fórmula anterior per a s = 0, 1, 2, …, n

$$\begin{array}{lll}
 & 1^3 - 0^3 & = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \\
 & 2^3 - 1^3 & = 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 + 1 \\
 & \ldots & \\
 & n^3 - (n-1)^3 & = 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\
+ & \underline{(n+1)^3 - n^3} & \underline{= 3n^2 + 3n + 1} \\
 & (n+1)^3 - 0^3 & = 3 \cdot (0^2 + 1^2 + \ldots + n^2) + 3 \cdot (0 + 1 + \ldots + n) + n + 1.
\end{array}$$

Per tant,

$$(n+1)^3 = 3 \cdot (0^2 + 1^2 + \ldots + n^2) + 3 \cdot (0 + 1 + \ldots + n) + n + 1$$

o sigui,

$$(n+1)^3 = 3 \cdot (0^2 + 1^2 + \ldots + n^2) + 3n(n+1)/2 + n + 1$$

és a dir,

$$3 \cdot (0^2 + 1^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - 3n(n+1)/2 - n - 1$$

Operant s'obté que:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tal com ja s'havia avançat.

Exercicis

1. Calcula les següents integrals pràcticament immediates:
    a. $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 4)dx$
    b. $\int x(x^2 + 1)^3 dx$
    c. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$
    d. $\int \sqrt{2x - 6}dx$
    e. $\int 3e^{-2x+1} dx$
    f. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
    g. $\int \sin x \cdot \cos x dx$

2. Utilitza el mètode d'integració per parts per a integrar aquestes funcions:

    a. $\int 2xe^{-x} dx$
    b. $\int (x+1)\cos(2x)dx$
    c. $\int x \ln x dx$

3. Resol aquesta integral per parts:

    $\int x^2 e^x dx$

Solucions

1.

a. $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 4)dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + c$

b. $\int x(x^2+1)^3 dx \;=\; \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^3 dx \;=\; \frac{(x^2+1)^4}{8} + C$

c. $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

d. $\int \sqrt{2x-6}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\frac{(2x-6)^{3/2}}{3/2} + C \;=\; \frac{\sqrt{(2x-6)^3}}{3} + C$

e. $\int 3e^{-2x+1}dx = -3/2 \cdot e^{-2x+1} + C$

f. $\int \frac{\ln x}{x}dx = (\ln x)^2/2 + C$

g. $\int \sin x \cdot \cos x\,dx = (\sin x)^2/2 + C$

2.

a. $\int 2xe^{-x}dx = -2x\cdot(-e^{-x}) - \int -2e^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

$u = 2x \qquad v' = e^{-x}$
$u' = 2 \qquad v = -e^{-x}$

b. $\int (x+1)\cos(2x)dx \;=\; (x+1)\sin(2x) - \int \frac{\sin(2x)}{2}dx$

$= (x+1)\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{4} + C$

$u = (x+1) \qquad v' = \cos(2x)$
$u' = 1 \qquad v = \sin(2x)/2$

$\int x\ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{x^2}{2x}dx = x\ln x - \int 2x\,dx = x\ln$ [illegible]^2 + C

$u = \ln x \qquad v' = x$
$u' = 1/x \qquad v = x^2/2$

3.

$\int x^2e^x dx$

integrem per parts:

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$
$dv = e^x dx \quad v = e^x$

$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$

hem de tornar a integrar per parts:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

u = x du = dx
dv = e^xdx v = e^x

per tant,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + c =$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

Aplicacions del càlcul integral

Aplicacions del càlcul integral

Càlcul de l'àrea d'una funció

Per calcular l'àrea tancada per una funció en un interval [a, b] amb l'eix X, s'ha de fer servir la integral definida.

Casos:

1. Si $f(x)$ és una funció positiva en l'interval [a, b], llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dintre de l'interval [a, b] és igual a:

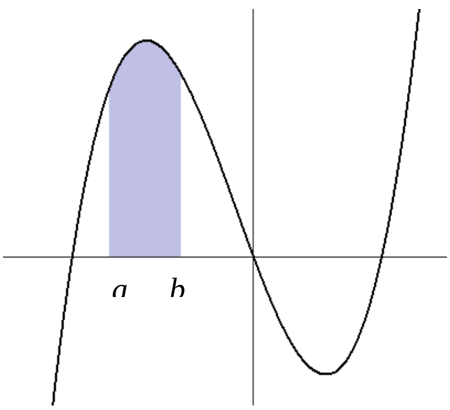
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2. Si $f(x)$ és una funció negativa en l'interval [a, b], llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dins l'interval [a, b] és igual a:

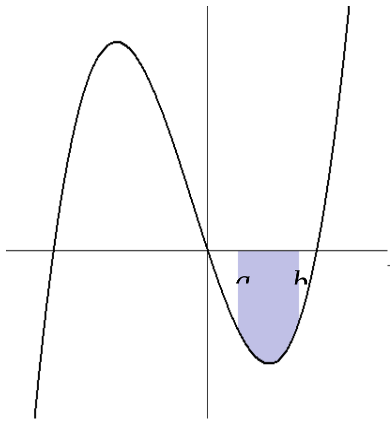
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

3. Si $f(x)$ és una funció qualsevol, la seva àrea entre els límits a i b s'ha de calcular a partir de la integral definida del valor absolut de la funció:

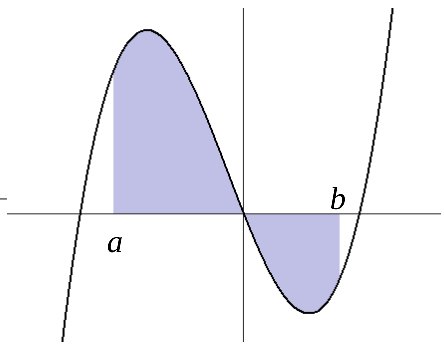
$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$



cas 1



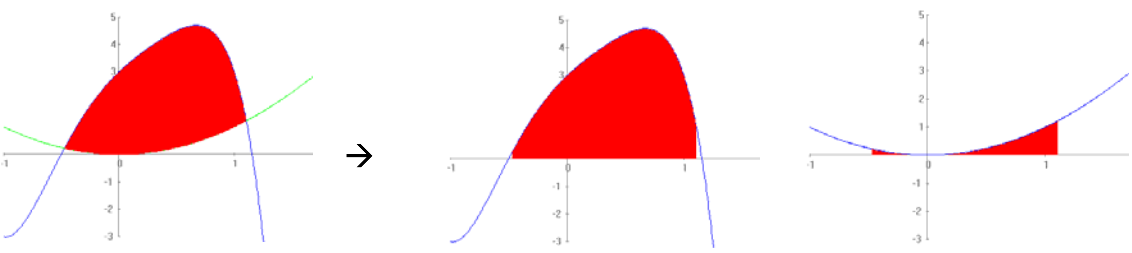
cas 2



cas 3

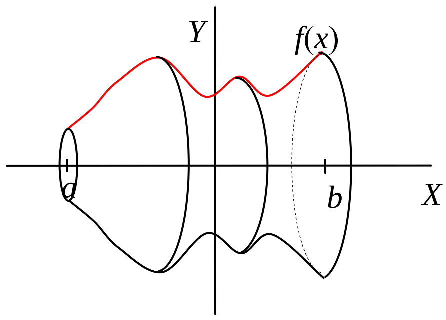
4. Per calcular l'àrea que es tanca entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ qualssevol en un interval [a, b], s'ha de calcular la integral definida del valor absolut de la diferència de les funcions en aquest interval:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



Volum d'una figura de revolució

La integral definida permet trobar el volum d'una figura de revolució la generatriu de la qual és una funció positiva.

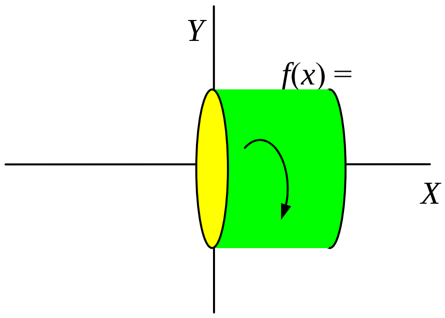


Si *f* és una funció positiva en un interval [*a*, *b*], el volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix d'abscisses aquesta funció, és a dir, la figura de revolució que té per generatriu la funció *f*, és igual a:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx$$

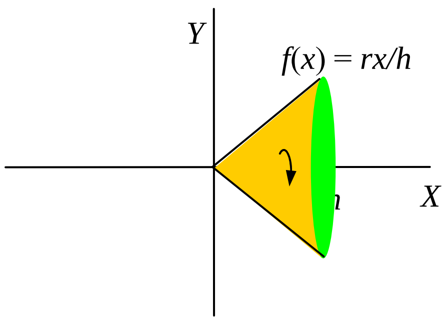
En el cas de les figures de revolució conegudes:

- Volum d'un cilindre:



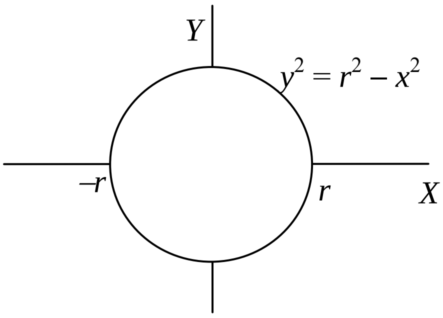
$$V = \pi \int_0^h \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 \left. x \right|_0^h = \pi r^2 h$$

- Volum d'un con:



$$V = \pi \int_0^h \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \left. \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

- Volum d'una esfera:



$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\cdot\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions

Per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$ de manera que en aquest interval $f(x) \geq g(x) \geq 0$, només cal calcular el volum de la figura de revolució generada per $f(x)$ i restar-li el volum de la figura de revolució generada per $g(x)$.

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - \pi\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx = \pi\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]dx$$

En general, per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions qualssevol positives, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$, s'ha de calcular la integral:

$$V = \pi\int_a^b \left|\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right| dx$$

Com es calcula l'àrea que tanca una funció positiva amb l'eix X?

> Per calcular l'àrea que tanca una funció $f(x)$ positiva en un interval $[a, b]$ amb l'eix X, només cal calcular la integral definida d'aquesta funció en aquest interval: A = $\int_a^b f(x)dx$

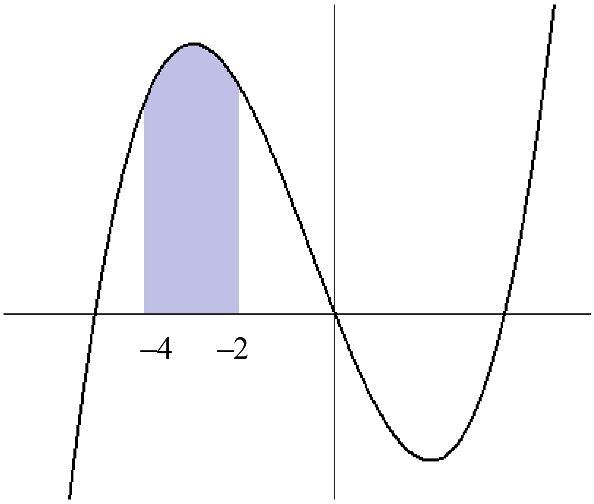
Si $f(x)$ és una funció positiva en l'interval $[a, b]$, llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dintre de l'interval $[a, b]$, és igual a:

$$\text{A} = \int_a^b f(x)dx$$

com es desprèn de manera immediata de la definició d'integral. Per exemple, l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4, -2]$ és igual a:

$$\text{A} = \int_{-4}^{-2} f(x)dx = 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 36\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-4}^{-2} = 152$$

ja que la funció $f(x)$, en l'interval $[-4, -2]$ és positiva, tal com es pot apreciar en aquest gràfic:



Com es calcula l'àrea que tanca una funció negativa amb l'eix X?

> Per calcular l'àrea que tanca una funció negativa $f(x)$ en un interval $[a, b]$ amb l'eix X, només cal calcular la integral definida d'aquesta funció en aquest interval i canviar el signe al resultat:
> $A = -\int_a^b f(x)dx$

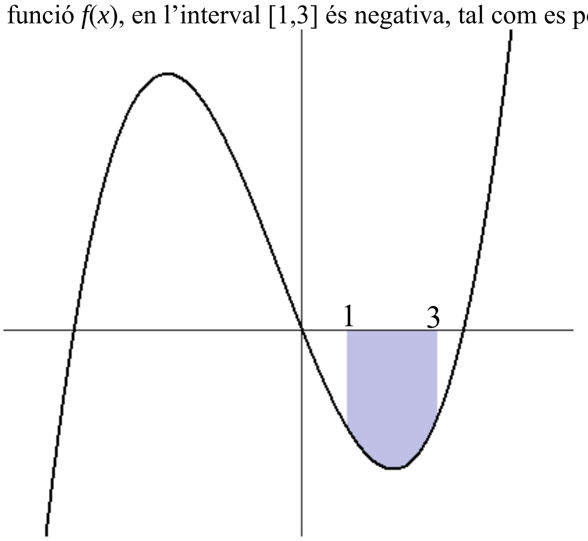
Si $f(x)$ és una funció negativa en l'interval $[a, b]$, llavors l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dintre de l'interval $[a, b]$, és igual a:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

com es desprèn de manera immediata de la definició d'*integral*. Per exemple, l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval [1,3] és igual a:

$$A = -\int_1^3 f(x)dx = -\left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 36\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = 78$$

ja que la funció $f(x)$, en l'interval [1,3] és negativa, tal com es pot apreciar en aquest gràfic:



Com es calcula l'àrea que tanca una funció qualsevol amb l'eix X?

> Per calcular l'àrea que tanca una funció $f(x)$ qualsevol en un interval
> $[a, b]$ amb l'eix X, només cal calcular la integral definida del valor absolut d'aquesta funció

en aquest interval: A = $\int_a^b |f(x)|dx$, és a dir, la funció, quan sigui negativa, s'ha de convertir en positiva.

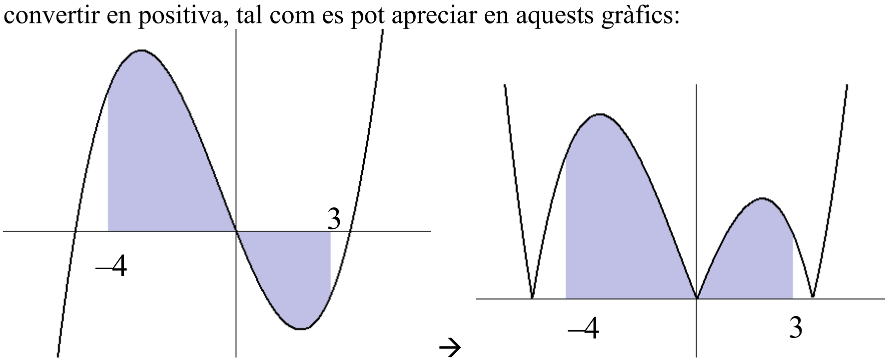
Fins al moment s'ha calculat l'àrea d'una funció positiva o una funció negativa, en un interval [*a, b*]; per trobar l'àrea que es forma amb l'eix, de qualsevol funció *f*(*x*), tingui aquesta valors positius o negatius, entre els límits *a* i *b*, s'ha de calcular la integral definida del valor absolut de la funció perquè tots els valors siguin positius.

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

L'àrea de les parts de la funció que quedessin sota l'eix X serien negatives. Per evitar-ho, es converteixen aquestes parts negatives en positives.
Per exemple, l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval [–4,3] és igual a:

$$\begin{aligned} A = \int_1^3 |f(x)|dx &= \int_{-4}^0 f(x)dx + \int_0^3 -f(x)dx = \\ &= 2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 36\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-4}^0 + \left(-2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 36\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \\ &= 224 + 94,5 = 318,5 \end{aligned}$$

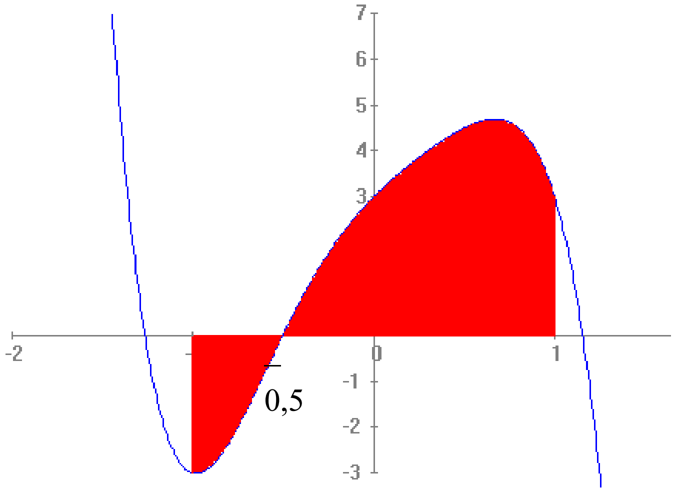
ja que la funció *f*(*x*), en l'interval [–4,0] és positiva, i en l'interval [0,3] és negativa i, per tant, s'ha de convertir en positiva, tal com es pot apreciar en aquests gràfics:



Vegem un altre exemple: càlcul de l'àrea de la funció

$f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3$.

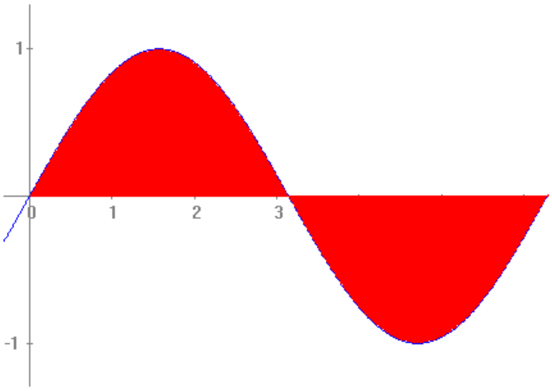
en l'interval [–1,1]. La gràfica d'aquesta funció i l'àrea tancada és la següent:



s'ha de partir la integral en dues parts: una fins a –0,5 i la resta, fins a 1. La primera s'ha de canviar de signe (perquè la funció en l'interval [–1, –0,5] és negativa); en canvi, en la segona part, com que tots els valors de la funció són positius, no s'ha de canviar de signe; és a dir:

$$A = -\int_{-1}^{-0,5} f(x)dx + \int_{-0,5}^{1} f(x)dx \simeq -(-0,9218) + 4,9218 = 5,8436$$

Com veiem, en molts casos, l'àrea és un nombre irracional i només es pot calcular de manera aproximada. En el cas de la funció $g(x) = \sin x$, ja sabem que és positiva entre 0 i π, i negativa entre π i 2π; així, doncs, l'àrea entre [0, 2π], tal com podem observar en aquesta il·lustració,



s'ha de calcular d'aquesta manera:

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} - \left(-\cos x\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 - (-2) = 4$$

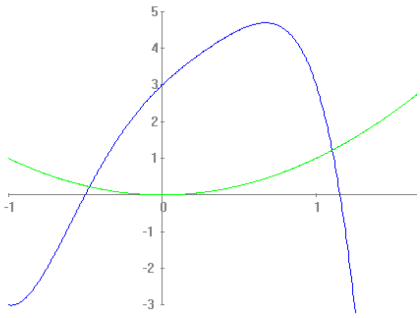
Com es calcula l'àrea que es tanca entre dues funcions en un interval determinat?

> Per calcular l'àrea que es tanca entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ qualssevol en un interval determinat $[a, b]$, només cal calcular la integral definida del valor absolut de la diferència de les funcions en aquest interval:
> $A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$

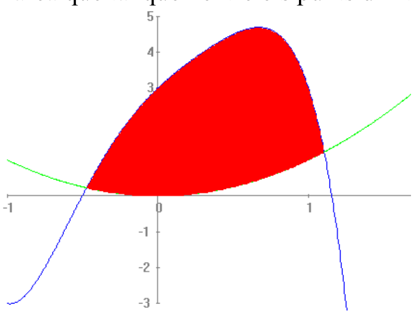
També es pot utilitzar la integració definida per calcular l'àrea compresa entre dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$ en un interval $[a, b]$. Aquesta àrea és igual a la integral definida del valor absolut de la diferència d'ambdues funcions:

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

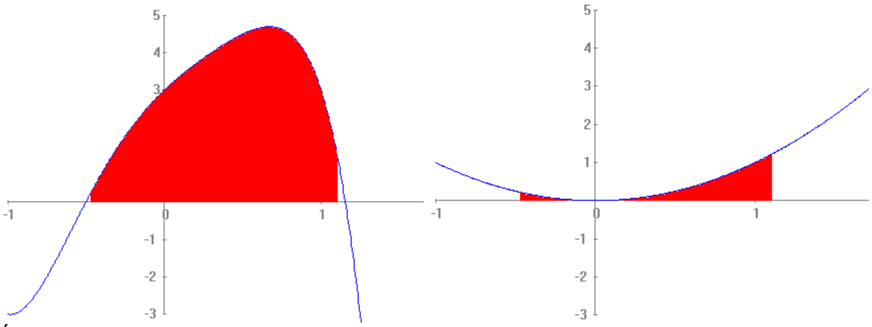
Per exemple, aquestes són les gràfiques de les funcions $g(x) = x^2$ i $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ representades conjuntament:



Per tant, l'àrea que tanquen entre els punts d'intersecció d'ambdues funcions:



Els punts d'intersecció són (–0,4725, 0,217951) i (1,1025, 1,267898). Per calcular l'àrea tancada entre aquestes dues gràfiques n'hi ha prou de calcular l'àrea de la qual es troba damunt, i restar-hi la que es troba a sota, tal com mostra aquesta doble il·lustració:



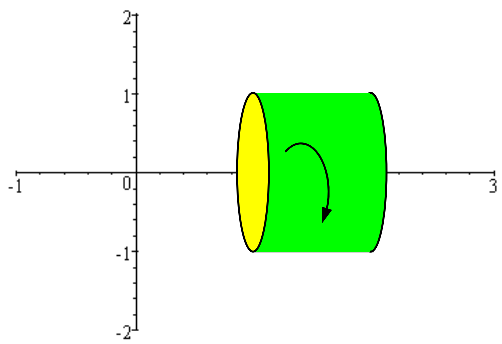
És a dir, per trobar l'àrea entre ambdues funcions, s'ha de restar l'àrea de la dreta a la de l'esquerra:

$$A \simeq \int_{-0,4725}^{1,1025} f(x)dx - \int_{-0,4725}^{1,1025} g(x)dx \simeq 5,14839 - 0,48435 = 4,66404$$

Com es calcula el volum d'una figura de revolució generada per una funció positiva?

> Per trobar el volum d'una figura de revolució generada a partir del gir d'una funció positiva al voltant de l'eix X, en l'interval [*a*, *b*], s'ha de fer aquesta integral: $V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$. Per arribar a aquesta fórmula s'ha de comparar el volum de la figura amb el volum d'un con.

Si *f* és una funció positiva en un interval [*a*, *b*], el càlcul del volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix d'abscisses aquesta funció, és a dir, la figura de revolució que té per generatriu la funció *f*, requereix el càlcul integral. Vegem-ne un exemple senzill: si $f(x) = 1$, una funció constant, en l'interval [1,2], aquesta és la figura resultant:



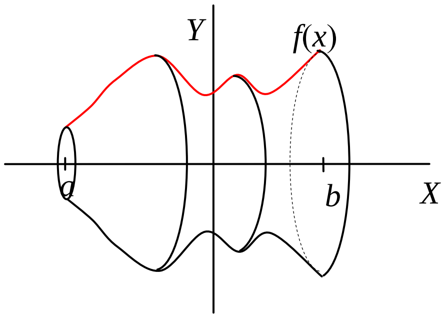
Evidentment, la figura resultant és igual a un cilindre de radi 1 i d'altura 1; per tant, el seu volum serà:

$$V = \pi r^2 h = \pi$$

Vegem que aquest resultat pot obtenir-se amb aquesta fórmula:

$$V = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^1 1^2 dx = \pi\cdot x\Big|_0^1 = \pi$$

Vegem que això es compleix per qualsevol funció positiva, $f(x)$, en un interval [*a, b*]. Es tracta de calcular el volum del cos de revolució que es genera en girar aquesta funció sobre l'eix X, tal com mostra aquesta gràfica:



Sigui $V(t)$ el volum de la figura engendrada en girar el tros de funció entre a y t; per tant, $V(t+h) - V(t)$ representa el volum engendrat pel tros de funció entre $f(t+h)$ i $f(t)$. Suposem que $f(t+h) > f(t)$. Així, doncs, el volum $V(t+h) - V(t)$ és més gran que el volum del cilindre la radi del qual de la base és $f(t)$ i altura h, i és més petit que el volum del cilindre el radi de la base del qual és $f(t+h)$ i l'altura, h:

$$\pi(f(t))^2 h \leq V(t+h) - V(t) \leq \pi(f(t+h))^2 h$$

Si ho dividim tot entre h, s'obté:

$$\lim_{h\to 0} \pi\left(f(t)\right)^2 \leq \lim_{h\to 0} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \pi\left(f(t+h)\right)^2$$

els límits d'ambdós extrems són iguals i, per tant, el límit que es troba en el centre també ha de ser igual:

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} = \pi\left(f(t)\right)^2$$

Per tant, la funció V és una primitiva de la funció $\pi(f(t))^2$, ja que la derivada d'aquella és igual a aquesta. En altres paraules:

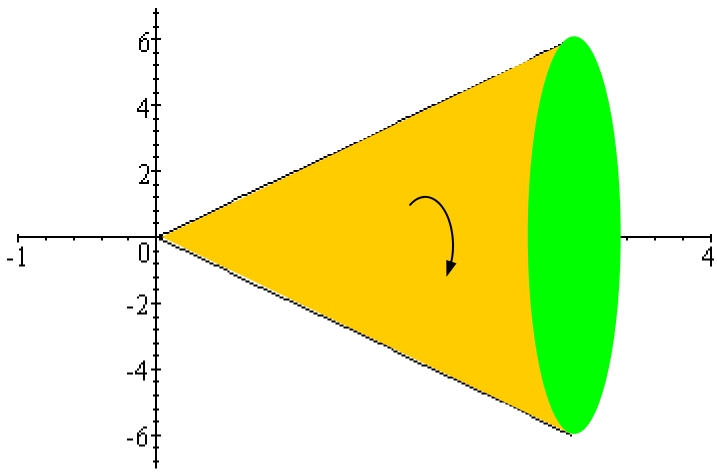
$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Tal com s'havia afirmat al principi.

Com es calcula la fórmula del volum de les figures de revolució bàsiques?

> Les fórmules de les figures de revolució bàsiques es poden explicar a partir del càlcul del volum amb l'ajuda de la integral indefinida. En el cas del cilindre, la funció generatriu és una recta que passa per l'origen; en el cas de l'esfera, la funció generatriu és l'equació d'una circumferència.

Si la generatriu és la recta $f(x) = 2x$, estant la x entre [0,3], la figura resultant és el con següent:



si s'aplica la fórmula general del volum:

$$V = \pi \int_0^3 \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_0^3 (2x)^2 dx = 4\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 4\pi \frac{3^3}{3} = 36\pi$$

el resultat és, doncs, el mateix si s'aplica la fórmula del volum del con: $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 36\pi$.

En el cas més general, si es vol buscar el volum d'un con d'altura *h*, i radi de la base *r*, la generatriu, *f*(*x*), ha de complir que:

$f(0) = 0 \qquad f(h) = r$

per tant, la funció lineal generatriu és $f(x) = rx/h$. Per trobar el seu volum, s'ha d'integrar de 0 a *h*:

$$V = \pi \int_0^h \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

com es pot veure, la fórmula coincideix amb la ja coneguda.

El mateix pot fer-se amb el volum d'una esfera. Per exemple, si una esfera està generada per una circumferència de radi 2, sabem que el seu volum és:

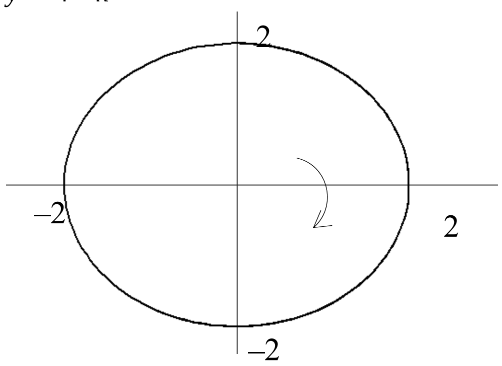
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32\pi}{3}$$

Utilitzem la fórmula del volum per comprovar-ho: l'equació de la generatriu d'una esfera de radi 2, és la circumferència següent:

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

per tant,

$$y^2 = 4 - x^2$$



En conseqüència, el seu volum és:

$$V = \pi \int_{-2}^2 \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 \left(4 - x^2 \right) dx = \pi \left. \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_{-2}^2 =$$

$$= \pi \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) \right) = \frac{32\pi}{3}$$

el mateix resultat que amb la fórmula.

Trobem ara el volum d'una esfera de radi *r*, sabent que una equació de la circumferència d'aquest radi és

$$x^2 + y^2 = r^2$$

si buidem la *y*

$$y^2 = r^2 - x^2$$

per tant,

$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\cdot\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

tal com ja sabíem.
Finalment, per trobar el volum d'un figura de revolució generada a partir del gir d'una funció qualsevol al voltant de l'eix X, es pot utilitzar la mateixa integral que en el cas d'una funció positiva: $V = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx$. Això és així perquè una vegada elevat al quadrat el valor de la funció, el signe negatiu desapareix.

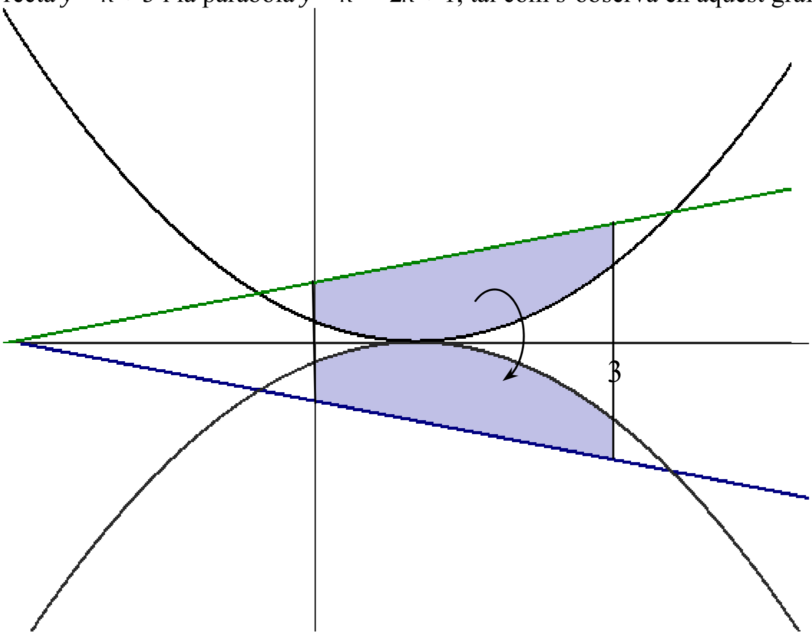
Com es calcula el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions?

> Per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions qualssevol, $f(x)$ i $g(x)$, positives en l'interval
> $[a, b]$, n'hi ha prou de calcular la integral $V = \pi\int_a^b \left|\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right| dx$

Per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$ de manera que $f(x) \geq g(x) \geq 0$, n'hi ha prou de calcular el volum de la figura de revolució generada per $f(x)$ i restar-li el volum de la figura de revolució generada per $g(x)$.

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - \pi\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx = \pi\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx$$

Per exemple, si es vol calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea limitada entre la recta $y = x + 3$ i la paràbola $y = x^2 - 2x + 1$, tal com s'observa en aquest gràfic:



Evidentment, s'han de restar els volums generats per la rotació de cadascuna de les funcions en l'interval [0,3], tenint en compte que la funció més gran és la recta:

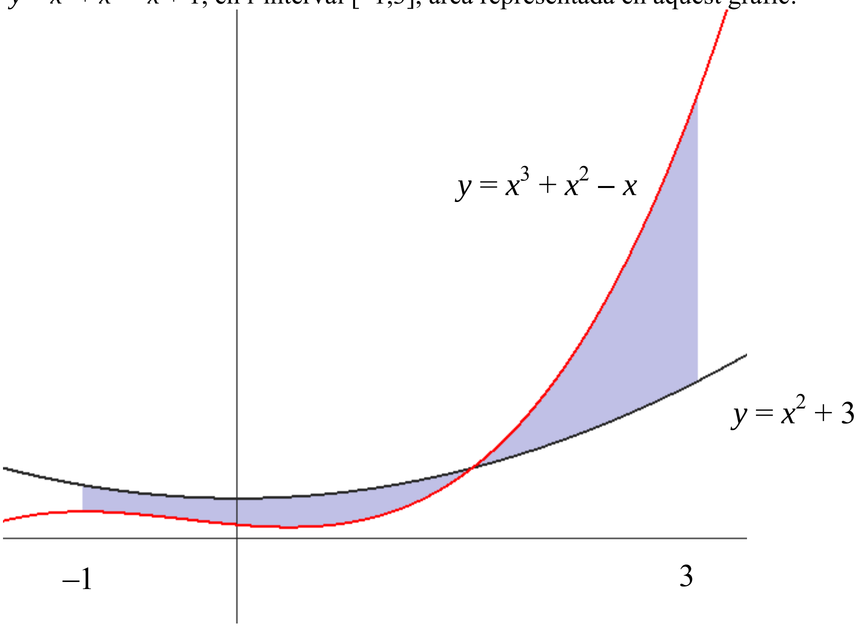
$$V = \pi\int_a^b\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx = \pi\int_0^3\left[\left(x+3\right)^2-\left(x^2-2x+1\right)^2\right]dx =$$

$$= \pi\int_0^3\left[-x^4+4x^3-5x^2+10x+8\right]dx = \frac{282\pi}{5}$$

De manera general, per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions positives qualssevol, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$, només cal calcular la integral següent:

$$V = \pi\int_a^b\left|\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right|dx$$

ja que amb això ens assegurem que sempre es resta el valor més gran del valor més petit de les funcions. Així, per exemple, per calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea limitada entre la paràbola $y = x^2 + 3$ i la funció $y = x^3 + x^2 - x + 1$, en l'interval $[-1,3]$, àrea representada en aquest gràfic:

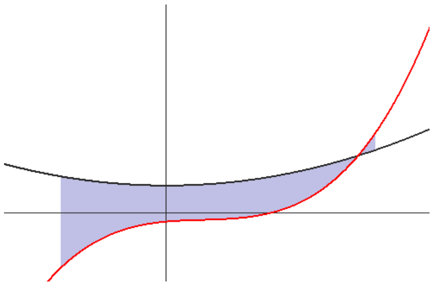


s'ha de fer el càlcul següent:

$$V = \pi\int_{-1}^3\left|\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right|dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^3\left|\left(x^2+3\right)^2-\left(x^3+x^2-x+1\right)^2\right|dx = \frac{42716\pi}{105} \simeq 1278$$

ja que es tracta de girar sobre l'eix X l'àrea tancada per aquestes dues funcions.

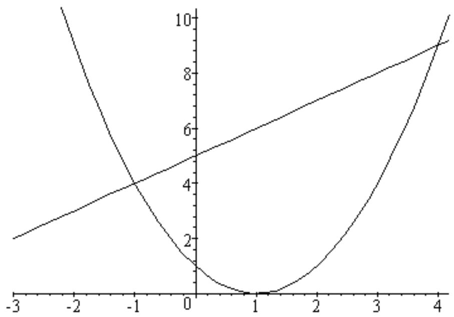


En general, les funcions han de ser positives, ja que, en cas contrari, si una és positiva i altra negativa, l'àrea tancada entre ambdues funcions, en girar, generaria solament el volum de la funció més gran en valor absolut, tal com es pot observar en el gràfic. Es tracta de les funcions $y = x^2 + 3$, i $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$. Es pot deduir fàcilment que en girar aquesta àrea al voltant de l'eix X, en la part en què ambdues funcions tenen signe diferent, es produiria una superposició de volums, amb la qual cosa l'aplicació de la fórmula del volum donaria un resultat incorrecte.

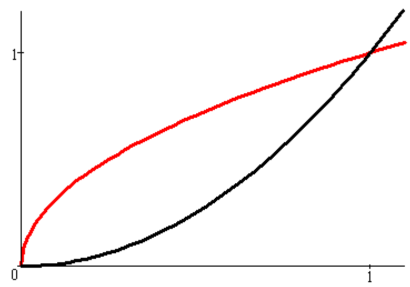
Exercicis

4. Donada la funció $f(x) = x^2 - 4$, calcula l'àrea que es tanca entre aquesta funció i l'eix X per a cadascun d'aquests intervals de la x:

5. Calcula l'àrea tancada entre les gràfiques de $y = x^2 - 2x + 1$, i la recta $y = x + 5$, sabent que aquestes són les seves gràfiques:



6. Calcula l'àrea que es forma entre les gràfiques de les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i g(x) = x^2 entre x = 0 i x = 1. Aquesta és la representació d'ambdues gràfiques (en vermell, f(x)):



Solucions

1. Com es tracta de calcular l'àrea entre aquests intervals, cal comprovar quan és negativa i quan és positiva, per a no restar-la. La funció *f*(*x*) és negativa només entre (-2 i 2), per tant, per a calcular l'àrea en un interval donat, s'ha de restar la part de l'interval que inclogui part de (-2, 2). Així:

   a. $A=\int_{-5}^{-3}(x^2-4)dx$, càlcul que podeu fer vosaltres mateixos.

   b. $A=\int_{-4}^{-2}(x^2-4)dx-\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx+\int_{2}^{4}(x^2-4)dx$, integrals que podeu calcular vosaltres fàcilment, sabent que la integral definida és $\int (x^2-4)dx=\frac{x^3}{3}-4x+C$.

2. En primer lloc, hem de calcular els punts en què es tallen ambdues funcions:

   $x^2 - 2x + 1 = x + 5$

   $x^2 - 3x - 4 = 0$

   per tant, x = 4 y x = -1.

   Els punts en què es tallen ambdues funcions són:

   (-1,4), (4,9)

   A més, la recta sempre és major que la paràbola en aquest interval. Per tant, l'àrea serà igual a la integral definida de la recta entre ambdós punts, menys la integral de la paràbola entre ambdós punts:

   $$\int_{-1}^{4} x+5-\left(x^2-2x+1\right)dx=\int_{-1}^{4} -x^2+3x+4dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$$

3. $f(x)=\sqrt{x}$ i g(x) = x^2

   entre x = 0 i x = 1.

   La funció g(x) és menor que la funció f(x) a l'interval [0,1] ja que:
   $\sqrt{x}=x^2$ si elevem al quadrat
   $x = x^4$
   $x - x^4 = 0$
   $x(1 - x^3) = 0$

   És a dir, f(x) = g(x) quan x = 1, x = 0.
   Quan x < 1 f(x) > g(x)
   Quan x > 1 f(x) < g(x)

per tant, l'àrea a l'interval $[0,1]$ és igual a:

$$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$